1º) En un experimento aleatorio A y B son dos sucesos independientes tales que $p(\bar{A}) = 0{,}4$ y $p(B) = 0{,}7$

Calcúlese:

a) $p(A \cup B)$

b) $p(A - B)$

Resolución

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6 \;\; ; \;\; p(A \cap B) \overset{indep}{\triangleq} p(A) \cdot p(B) = 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}42$$

a) $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0{,}6 + 0{,}7 - 0{,}42 = 0{,}88$

b) $p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = 0{,}6 - 0{,}42 = 0{,}18$

2º) En una población se sabe que el 80% de los jóvenes tiene ordenador portátil, el 60% tiene teléfono móvil y el 10% no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcula la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil.

Resolución

$P = \text{"El joven tiene ordenador portátil"}$;

$M = \text{"El joven tiene teléfono móvil"}$;

$$p(P) = 0{,}8 \, ; \; p(M) = 0{,}6 \, ; \; p(\bar{P} \cap \bar{M}) = 0{,}1$$

$$p(\bar{P} \cap \bar{M}) = 0{,}1 \Longrightarrow p(\overline{P \cup M}) = 0{,}1 \Longrightarrow p(P \cup M) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$$

$$p(P \cup M) = p(P) + p(M) - p(P \cap M) \Longleftrightarrow 0{,}9 = 0{,}8 + 0{,}6 - p(P \cap M) \Longleftrightarrow p(P \cap M) = 0{,}5$$

$$p(P|M) = \frac{p(P \cap M)}{p(M)} = \frac{0{,}5}{0{,}6} = \frac{5}{6} \cong 0{,}8333$$

3º) Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50%, el 30% y el 20% de las resistencias que se producen en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Se selecciona al azar una resistencia:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea defectuosa?

b) Si es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el operario A?

Resolución

Consideramos los sucesos siguientes:

$A = \text{"La resistencia ha sido producida por el operario A"}$

$B = \text{"La resistencia ha sido producida por el operario B"}$

$C = \text{"La resistencia ha sido producida por el operario C"}$

$D = \text{"La resistencia es defectuosa"}$

Del enunciado tenemos que

$$p(A) = 0{,}6 \, ; \; p(B) = 0{,}3 \, ; \; p(C) = 0{,}2 \, ; \; p(D|A) = 0{,}06 \;\; ; \;\; p(D|B) = 0{,}05 \, ; \; p(D|C) = 0{,}03$$

a) $p(\bar{D}) \overset{P.Total}{\triangleq} p(A) \cdot p(\bar{D}|A) + p(B) \cdot p(\bar{D}|B) + p(C) \cdot p(\bar{D}|C) =$

$$0{,}5 \cdot (1 - 0{,}06) + 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}05) + 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}03) = 0{,}47 + 0{,}285 + 0{,}194 = 0{,}949$$

⍰) $p(A|D) \overset{T.Bayes}{\triangleq} \dfrac{p(A)\cdot p(D|A)}{p(D)} = \dfrac{0{,}5\cdot 0{,}06}{1-0{,}949} = \dfrac{0{,}03}{0{,}051} = \dfrac{30}{51} = \dfrac{10}{17} \cong 0{,}5882$

4º) Las notas que se han obtenido por 1500 opositores, para optar a 330 plazas de administrativos en ayuntamientos de la Comunidad de Madrid, han seguido una distribución normal de media 4,05 puntos y desviación típica 2,5. Determina razonadamente:
a) ¿cuántos opositores han superado el 5?
b) La nota de corte.
c) El porcentaje de opositores que obtienen menos de un 4.

Resolución

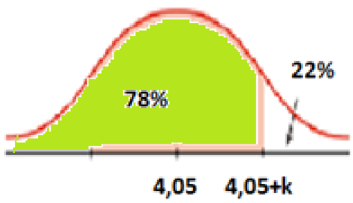
Definimos la variable $X=$ "Notas obtenidas"; $X \to N(4{,}05\,;2{,}5)$

⍰) $p(X>5) = p\left(Z > \dfrac{5-4{,}05}{2{,}5}\right) = p(Z>0{,}38) = 1-p(Z\le 0{,}38) = 1-0{,}6480 = 0{,}352$

El número de opositores que han superado el 5 es $1500\cdot 0{,}352 = 528$

b) Las 330 plazas son para las notas más altas y como $\frac{330}{1500} = 0{,}22$ se trata de hallar el valor $4{,}05+k$ tal que por encima de él están el 22% de las calificaciones o, lo que es lo mismo,

$$p(X\le 4{,}05+k) = 0{,}78$$



$$p(X\le 4{,}05+k) = 0{,}78 \Leftrightarrow p\left(Z\le \frac{k}{2{,}5}\right) = 0{,}78 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{k}{2{,}5} = 0{,}775 \Leftrightarrow k = 1{,}9375$$

La nota de corte es $4{,}05+1{,}9375 = 5{,}9875$

c) $p(X<4) = p\left(Z<\frac{4-4{,}05}{2{,}5}\right) = p(Z<-0{,}02) = p(X>0{,}02) = 1-p(Z\le 0{,}02)$
$= 1-0{,}5080 = 0{,}492$

El porcentaje de opositores que obtienen menos de un 4 es el 49,2%

5º) La probabilidad de que un test rápido para detectar COVID-19 dé "negativo" en humanos es $p=0{,}7$.
a) Si hacemos test rápidos a 5 personas elegidas aleatoriamente, calcula la probabilidad de que al menos 4 den negativo.
b) Si realizamos una campaña con 2100 test rápidos para detectar COVID-19, utilizando la aproximación de la binomial por la normal, calcula la probabilidad de que den negativo por lo menos 1450 test.

Resolución

Consideramos el suceso $A = $ "*El test da negativo*" ; $p(A) = 0{,}7 = p$ y esta probabilidad es la misma cada vez que volvemos a realizar el test.
Sea la variable aleatoria discreta $X=$ "*Número de test negativos*"
a) Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(5, 0'7)$

$$P(X\ge 4) = p(X=4)+p(X=5) = \binom{5}{4}0{,}7^4\cdot 0{,}3^1 + \binom{5}{5}0{,}7^5 = 5\cdot 0{,}7^4\cdot 0{,}3 + 0{,}7^5 = 0{,}52822$$

b) Ahora el número de test es $n=2100$
Se trata de una binomial $X \hookrightarrow B(2100, 0'7)$

Como $np(1-p) = 2100 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 441 > 10$, la binomial se puede aproximar por una normal de media el producto $2100 \cdot 0'7 = 1470$ y desviación típica $\sqrt{2100 \cdot 0'7 \cdot 0'3} = \sqrt{441} = 21$

$$X \hookrightarrow (2100, 0'7) \hookrightarrow N(1470, 21)$$

$$p(X \geq 1450) =^{Tificamos}= p\left(Z \geq \frac{1449{,}5 - 1470}{21}\right) = p(Z \geq -0{,}98) = p(Z \leq 0{,}98) = 0{,}8365$$