Cinemática

41.- El vector de posición de un móvil viene dado por: $\vec{r} = -2t^2\,\vec{i} + \left(3 - \frac{3}{2}t^2\right)\vec{j}$ (S.I.)

Se pide:

a) **Ecuación de su trayectoria.**
b) **Velocidad media durante los dos primeros segundos.**
c) **Velocidad y aceleración en cualquier instante.**
d) **Componentes intrínsecas de la aceleración.**
e) **Tipo de movimiento que tiene el móvil.**

a) Para determinar la ecuación de la trayectoria eliminamos el tiempo de las ecuaciones paramétricas del movimiento:

$$x = -2t^2 \rightarrow t^2 = \frac{-x}{2}$$
$$y = 3 - \frac{3}{2}t^2 \rightarrow y = 3 - \frac{3}{2}\left(\frac{-x}{2}\right) \Rightarrow \boxed{y = 3 + \frac{3}{4}x}$$: ec. de una recta.

b) La velocidad media relaciona el desplazamiento con el tiempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0}$$
$$\vec{r}_0(t=0) = 3\vec{j}$$
$$\vec{r}(t=2) = -8\vec{i} - 3\vec{j}$$
$$\vec{v}_m = \frac{-8\vec{i} - 3\vec{j} - 3\vec{j}}{2} = \boxed{-4\vec{i} - 3\vec{j}\ \text{m/s}}$$

c) $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \boxed{-4t\,\vec{i} - 3t\,\vec{j}\ \text{m/s}}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \boxed{-4\vec{i} - 3\vec{j}\ \text{m/s}^2}$$

d) Las componentes intrínsecas de la aceleración son las aceleraciones tangencial y normal:

• $a_t = \frac{dv}{dt}$
$$v = \sqrt{(-4t)^2 + (-3t)^2} = 5t\ \text{m/s}$$
$$a_t = \boxed{5\ \text{m/s}^2}$$

• $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n \Rightarrow a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$
$$a = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5\ \text{m/s}^2$$
$$5 = \sqrt{5 + a_n^2} \Rightarrow \boxed{a_n = 0}$$

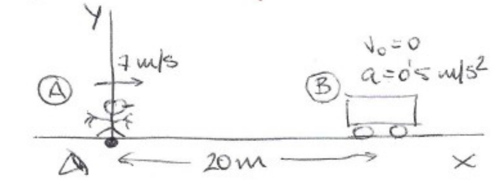
e) Las características del movimiento son las siguientes:

• trayectoria: rectilínea
• velocidad: módulo: variable; dirección y sentido: ctes
• aceleración: a_t = cte; $a_n = 0$

Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

42.- Un tren arranca desde el reposo con una aceleración de 0´5 m/s^2. Un pasajero que camina a 7 m/s se encuentra a 20 m de la última puerta del tren en el momento de comenzar éste a moverse. ¿Conseguirá subirse al tren? En caso afirmativo, indicar dónde y cuándo.

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



El pasajero tiene mru, y el tren, mrua. Así pues:

A $\quad \vec r = \cancel{\vec r_0} + \vec v t \Rightarrow r\cancel{\vec\imath} = v\cancel{\vec\imath} t \Rightarrow r_A = 7t$

B $\quad \begin{cases} \vec r = \vec r_0 + \cancel{\vec v_0 t} + \frac{1}{2}\vec a t^2 \longrightarrow r\cancel{\vec\imath} = r_0\cancel{\vec\imath} + \frac{1}{2} a\cancel{\vec\imath} t^2 \Rightarrow r_B = 20 + 0'25\, t^2 \\ \vec v = \cancel{\vec v_0} + \vec a t \longrightarrow v\cancel{\vec\imath} = a\cancel{\vec\imath} t \Rightarrow v_B = 0'5t \end{cases}$

Cuando el pasajero alcance al tren, ambos se encontrarán a la misma distancia del observador:

$r_A = r_B \Rightarrow 7t = 20 + 0'25\, t^2 \;;\quad 0'25\, t^2 - 7t + 20 = 0$

Resolviendo esta ecuación obtenemos dos valores para el tiempo que la persona y el tren se encuentran en la misma posición con respecto al observador:

$\boxed{t = 0'322\ s} \qquad \boxed{t = 24'78\ s}$

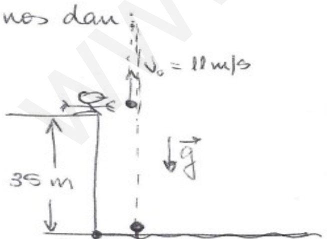
El primer valor se corresponde con el momento en que la persona alcanza el tren; posteriormente, aunque la persona adelanta al tren, éste tiene cada vez mayor velocidad, por lo que alcanzará a la persona al cabo de 24'78 s después de haber iniciado su movimiento.

43.- Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba desde un puente situado a 35 m del agua con una velocidad de 11 m/s.

a) ¿Cuánto tiempo tardará en llegar al agua? ¿Con qué velocidad lo hará?

b) Un segundo más tarde se lanza, desde el agua y en la misma vertical que la primera, otra piedra con una velocidad de 30 m/s. ¿Cuánto tiempo tardarán en chocar? ¿A qué altura lo harán? ¿Qué velocidad tendrá cada una en ese momento?

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



a) La piedra tiene mrua; así pues:

$\vec r = \vec r_0 + \vec v_0 t + \frac{1}{2}\vec g t^2 \longrightarrow 0 = r_0\cancel{\vec\jmath} + v_0\cancel{\vec\jmath}\, t - \frac{1}{2} g\cancel{\vec\jmath}\, t^2$

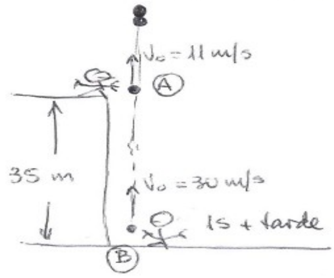
$\vec v = \vec v_0 + \vec g t \longrightarrow -v\cancel{\vec\jmath} = v_0\cancel{\vec\jmath} - g\cancel{\vec\jmath}\, t$

$0 = 35 + 11t - 5t^2 \longrightarrow t = 3'97\ s$

$-v = 11 - 10t \longrightarrow v = -11 + 10 \cdot 3'97 = \boxed{28'65\ m/s}$

b) Las ecuaciones del movimiento de ambas piedras son:

A $\quad \begin{cases} \vec r = \vec r_0 + \vec v_0 t + \frac{1}{2}\vec g t^2 \longrightarrow r\cancel{\vec\jmath} = r_0\cancel{\vec\jmath} + v_0\cancel{\vec\jmath}\, t - \frac{1}{2} g\cancel{\vec\jmath}\, t^2 \\ \vec v = \vec v_0 + \vec g t \longrightarrow v\cancel{\vec\jmath} = v_0\cancel{\vec\jmath} - g\cancel{\vec\jmath}\, t \end{cases}$



(B) $\begin{cases} \vec{r} = \cancel{\vec{r}_0}^{\,0} + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \rightarrow r\cancel{\vec{j}} = v_0\cancel{\vec{j}}(t-1) - \frac{1}{2}g\cancel{\vec{j}}(t-1)^2 \\ \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \longrightarrow v\cancel{\vec{j}} = v_0\cancel{\vec{j}} - g\cancel{\vec{j}}(t-1) \end{cases}$

Sustituyendo, obtenemos:

(A) $\begin{cases} r_A = 35 + 11t - 5t^2 \\ v_A = 11 - 10t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} r_B = 30(t-1) - 5(t-1)^2 \\ v_B = 30 - 10(t-1) \end{cases}$

Cuando choquen ambas piedras, se encontrarán a la misma altura sobre el suelo:

$r_A = r_B \Rightarrow 35 + 11t - 5t^2 = 30(t-1) - 5(t-1)^2 \Longrightarrow \boxed{t = 2'41\ s}$

La altura a la que se encuentran será:

$r_A = r_B = 35 + 11 \cdot 2'41 - 5 \cdot 2'41^2 = \boxed{32'47\ m}$

Y la velocidad de cada una en el momento del choque serán:

$v_A = 11 - 10 \cdot 2'41 = \boxed{-13'1\ m/s\ (\downarrow)}$

$v_B = 30 - 10 \cdot (2'41 - 1) = \boxed{15'9\ m/s\ (\uparrow)}$

Cuando se encuentran, (A) está bajando y (B), subiendo.

44.- Un CD de 12 cm de diámetro tiene, en el transcurso de una canción, una frecuencia de 9 Hz. Se pide:

a) Aceleración de un punto de su periferia.
b) Velocidad de un punto situado a 1 cm del centro del CD.
c) Ángulo, expresado en radianes, que habrá girado en 4 min.

Durante el transcurso de la canción el CD se mueve con m.c.u.:

$R = 6\ cm = 0'06\ m$
$f = 9\ Hz$
a) $a = ?$
b) $v = ?\ (R = 0'01\ m)$
c) $\varphi = ?$
$t = 4\ min = 240\ s$

a)

La velocidad de un punto de la periferia cambia constantemente de dirección y sentido, por lo que tendrá aceleración normal, radial o centrípeta: $a_n = \frac{v^2}{R}$

Calculamos la velocidad de dicho punto:

$v = \omega R$
$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

$v = 2\pi f R = 2\pi \cdot 9 \cdot 0'06 = 3'39\ m/s$

Sustituyendo: $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{3'39^2}{0'06} = \boxed{191'87\ m/s^2}$

b) De acuerdo con lo dicho en el apartado anterior:

$v = \omega R$
$\omega = 2\pi f$

$v = 2\pi f R = 2\pi \cdot 9 \cdot 0'01 = \boxed{0'57\ m/s}$

c) $\varphi = ?$
$t = 240\ s$
$\omega = 2\pi f$

$\omega = \frac{\varphi}{t} \Rightarrow \varphi = \omega t = 2\pi f t = 2\pi \cdot 9 \cdot 240 = \boxed{13571'68\ rad}$

45.- Un volante que gira en torno a su eje a razón de 30 rpm es frenado y se para en 20 s. Calcular:

a) **La aceleración angular.**
b) **El número de vueltas que da el volante hasta pararse.**
c) **Si el radio del volante es de 10 cm, calcular las componentes intrínsecas de la aceleración en un punto de su periferia en el instante en que la rueda acaba de dar 2 vueltas.**

$\omega_0 = 30 \text{ rpm} = 3'14 \text{ rad/s}$

$\omega = 0$

$t = 20 \text{ s}$

a) $\alpha = ?$

b) $\varphi = ?$ (vueltas)

c) $R = 10 \text{ cm} = 0'1 \text{ m}$

$a_t = ?$

$a_n = ?$

$\varphi = 2 \text{ vueltas} = 12'57 \text{ rad}$

a) El volante se mueve con m.c.u.a.; así pues:

$\varphi = \cancel{\varphi_0}^{0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow \varphi = 3'14 \cdot 20 + \frac{1}{2}\alpha \cdot 20^2$

$\cancel{\omega}^{0} = \omega_0 + \alpha t \longrightarrow 0 = 3'14 + \alpha \cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -0'16 \text{ rad/s}^2}$

b)

$\varphi = 3'14 \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot (-0'16) \cdot 20^2 = 31'42 \text{ rad} =$

$= \boxed{5 \text{ vueltas}}$

c) $a_t = \alpha \cdot R = -0'16 \cdot 0'1 = \boxed{-0'016 \text{ m/s}^2}$

$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{1'185^2}{0'1} = \boxed{14'042 \text{ m/s}^2}$

$v = \omega R = 11'85 \cdot 0'1 = 1'185 \text{ m/s}$

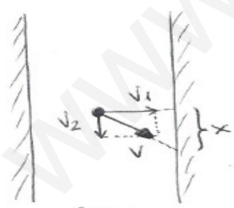
$\omega = \omega_0 + \alpha t \longrightarrow \omega = 12'57 + (-0'16) \cdot 4'5 = 11'85 \text{ rad/s}$

$\varphi = \cancel{\varphi_0}^{0} + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \rightarrow 12'57 = 3'14t + \frac{1}{2}(-0'16) \cdot t^2 \Rightarrow t = 4'5 \text{ s}$

46.- En el punto medio de un río de 800 m de anchura se encuentra una balsa a la deriva. El agua del río baja con una velocidad de 4 m/s y existe un fuerte viento, perpendicular a la corriente, con una velocidad de 8 m/s. Calcular:

a) **Tiempo que tarda la balsa en tocar la orilla.**
b) **Distancia que recorre la balsa hasta tocar la orilla.**
c) **Distancia que se desvía la balsa río arriba.**

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:

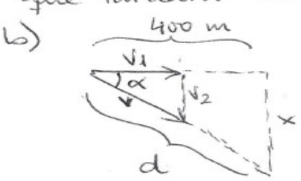


$v_1 = 8 \text{ m/s}$

$v_2 = 4 \text{ m/s}$

a) La balsa se mueve con m.r.u.; para calcular el tiempo que tarda en tocar la orilla, tenemos en cuenta que recorre, en la dirección horizontal, 400 m a 8 m/s, por lo que tardará 50 s.

b)



El ángulo que forman v y v_1 se calcula de la siguiente manera:

$tg\,\alpha = \frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{8} = 0'5 \Rightarrow \alpha = 26'57°$

Así pues, la distancia "d" que recorre la balsa será:

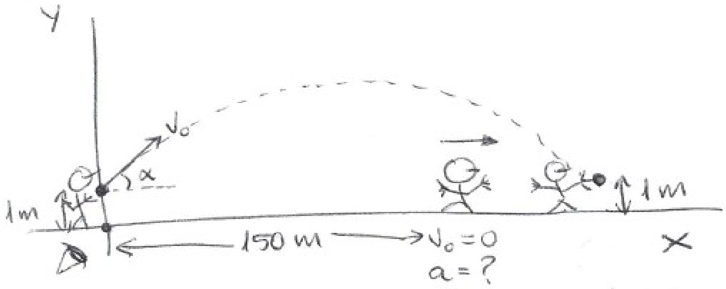
$\cos\alpha = \frac{400}{d} \Rightarrow d = \frac{400}{\cos\alpha} = \frac{400}{\cos 26'57°} = \boxed{447'21 \text{ m}}$

c) La distancia "x" que se desvía la balsa río arriba será:

$tg\,\alpha = \frac{x}{400} \Rightarrow x = 400 \cdot tg\,\alpha = 400 \cdot tg\, 26'57° = \boxed{200 \text{ m}}$

47.- Un jugador de béisbol lanza una pelota con una velocidad de 50 m/s desde 1 m de altura sobre el suelo y un ángulo de elevación de 30º. Simultáneamente al lanzamiento, otro jugador situado a 150 m del primero en la misma dirección que lleva la pelota empieza a correr para intentar cogerla cuando esté a una altura de 1 m sobre el suelo. ¿Con qué aceleración deberá hacerlo?

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



$v_0 = 50$ m/s
$\alpha = 30^\circ$

En primer lugar, calculamos el alcance de la pelota para saber si el jugador debe correr hacia la derecha o hacia la izquierda:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \longrightarrow x = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot t$$
$$y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow 0 = 1 + 50 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot t - 5t^2 \Rightarrow \underline{t = 5'04 \text{ s}}$$

El alcance será: $x_{máx} = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5'04 = \underline{218'22 \text{ m}}$

Así pues, el jugador deberá correr hacia la derecha.

Calculamos la posición de la pelota cuando se encuentra a 1 m sobre el suelo:

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \longrightarrow x = 50 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 = \underline{216'51 \text{ m}}$$
$$y = y_0 + v_0 \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \longrightarrow \cancel{1} = \cancel{1} + 50 \cdot \operatorname{sen} 30^\circ \cdot \cancel{t} - 5t^{\cancel{2}} \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

El jugador debe desplazarse desde 150 hasta 216'51 m del observador; su movimiento es m.r.u.a.:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \cancel{\vec{v_0}}\, t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \longrightarrow r\cancel{\vec{i}} = r_0 \cancel{\vec{i}} + \frac{1}{2} a \cancel{\vec{i}} t^2 \Rightarrow r = r_0 + \frac{1}{2} a \cdot 5^2$$
$$\vec{v} = \cancel{\vec{v_0}} + \vec{a} t \longrightarrow v\cancel{\vec{i}} = a\cancel{\vec{i}} t \Rightarrow v = a \cdot 5$$

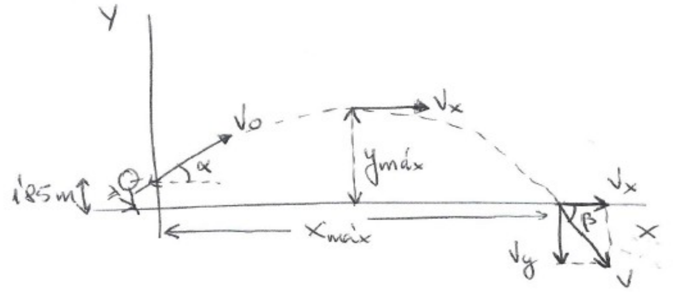
Hemos tenido en cuenta que el jugador dispone de 5 s para atrapar el balón. Sustituyendo las posiciones inicial y final, tendremos:

$$216'51 = 150 + \frac{1}{2} \cdot a \cdot 5^2 \Rightarrow \boxed{a = 5'32 \text{ m/s}^2}$$

48.- Un lanzador de jabalina realiza un lanzamiento con una velocidad que forma un ángulo de 50º con la horizontal a una altura, en el momento de soltar la jabalina, de 1´85 m sobre el suelo. Si el tiempo que tarda la jabalina en clavarse en el suelo es de 3 s, calcular:

a) Velocidad con que se realizó el lanzamiento.
b) Alcance de la jabalina.
c) Altura máxima de la jabalina.
d) Velocidad (módulo, dirección y sentido) con que la jabalina llega al suelo.

Realizamos un esquema del problema y anotamos los datos que nos dan:



$t = 3'5$ s

$\alpha = 50°$

a) $v_0 = ?$

b) $y_{máx} = ?$

a) El movimiento de la jabalina es parabólico:

$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \longrightarrow x = v_0 \cdot \cos 50° \cdot 3$

$y = y_0 + v_0 \, \text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = 1'85 + v_0 \cdot \text{sen}\, 50° \cdot 3 - 5 \cdot 3^2 \Rightarrow \boxed{v_0 = 18'78 \text{ m/s}}$

b) El alcance ($x_{máx}$) de la jabalina será:

$x_{máx} = 18'78 \cdot \cos 50° \cdot 3 = \boxed{36'21 \text{ m}}$

c) Para calcular la altura máxima ($y_{máx}$) de la jabalina debemos tener en cuenta que, en dicho punto, la velocidad de la jabalina es horizontal, por lo que $v_y = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} x = v_0 \cdot \cos\alpha \cdot t = 18'78 \cdot \cos 50° \cdot t \Rightarrow x = 12'07 t \\ y = y_0 + v_0 \,\text{sen}\,\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 1'85 + 18'78 \cdot \text{sen}\, 50° \, t - 5t^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow y = 1'85 + 14'39 t - 5t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = 12'07t\,\vec{i} + (1'85 + 14'39t - 5t^2)\,\vec{j}$$

La velocidad de la jabalina será:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \underbrace{12'07}_{v_x}\,\vec{i} + \underbrace{(14'39 - 10t)}_{v_y}\,\vec{j}$$

En $y_{máx} \rightarrow v_y = 0 \Rightarrow 14'39 - 10t = 0 \Rightarrow t = \underline{1'439 \text{ s}}$

Sustituyendo: $y_{máx} = 1'85 + 14'39 \cdot 1'439 - 5 \cdot 1'439^2 = \boxed{12'2 \text{ m}}$

d) Cuando la jabalina llega al suelo las dos componentes de la velocidad son:

$v_x = 12'07$ m/s

$v_y = 14'39 - 10 \cdot 3 = -15'61$ m/s

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{12'07^2 + (-15'61)^2} = \boxed{19'73 \text{ m/s}}$

El ángulo que forma dicha velocidad con el suelo será:

$$tg\,\beta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{-15'61}{12'07} = -1'29 \Rightarrow \boxed{\beta = -52'22^\circ}$$

La jabalina llega al suelo con una velocidad de 19'73 m/s que forma un ángulo de 52'22° con el suelo.