

11.    Calcula la expresión de  $\operatorname{tg} 3a$  en función de  $\operatorname{tg} a$ .  
Aplicala para  $a = 45^\circ$ .

Solución:  $\operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(3 \cdot 45^\circ) = -1$

12.    Halla  $\operatorname{sen} 2x$  si  $\operatorname{sen} x - \cos x = 1/3$

Solución:  $8/9$

## Ecuaciones trigonométricas

13.    Resuelve:

a)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$       d)  $\operatorname{sen}(x/2) = \sqrt{2}/2$   
 b)  $\operatorname{sec} x = 2$       e)  $\cos(x - \pi/2) = -1$   
 c)  $\operatorname{cotg} x = -1$       f)  $\operatorname{cosec}(x + \pi) = -2\sqrt{2}$

Solución: En todos los casos  $k \in \mathbb{Z}$ . a)  $x = 60^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 b)  $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 300^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 c)  $x = 135^\circ + k \cdot 180^\circ$  d)  $x = 90^\circ + k \cdot 720^\circ$ ,  
 $x = 270^\circ + k \cdot 720^\circ$  e)  $x = 3\pi/2 + k \cdot 2\pi$   
 f)  $x = \pi/4 + k \cdot 2\pi, x = 3\pi/4 + k \cdot 2\pi$

14.    Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a)  $\cos 3x = \operatorname{sen} 30^\circ$       h)  $\operatorname{sen} x - \frac{1}{\operatorname{sen} x} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}$   
 b)  $\cos(4x - \pi) = -1/2$       i)  $\operatorname{sen} x + 2 = 3 \cos 2x$   
 c)  $\operatorname{sen} 2x = \cos x$       j)  $1 = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \cos^2 x$   
 d)  $2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x = 1/2$       k)  $\cos 2x + 5 \cos x + 3 = 0$   
 e)  $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$       l)  $\frac{\operatorname{sen}^2 2x}{2} + \cos^2 x = 1$   
 f)  $\cos x - \cos 3x = 0$       m)  $6 \cos^2 x + \cos 2x = 5$   
 g)  $\operatorname{sen} x - \cos x = \sqrt{\frac{3}{2}}$       n)  $\cos x - \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 0$

Solución: En todos los casos  $k \in \mathbb{Z}$ . a)  $x = 20^\circ + k \cdot 120^\circ$ ,  
 $x = 100^\circ + k \cdot 120^\circ$  b)  $x = 15^\circ + k \cdot 90^\circ, x = 75^\circ + k \cdot 90^\circ$   
 c)  $x = \pi/6 + 2k\pi, x = 5\pi/6 + 2k\pi$  d)  $x = 17,99^\circ + 2k\pi$ ,  
 $x = 306^\circ + 2k\pi$  e)  $x = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$  f)  $x = k \cdot 90^\circ$   
 g)  $x = 105^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 165^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 h)  $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 i)  $x = 19,47^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 160,53^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 $x = 210^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 330^\circ + k \cdot 360^\circ$  j)  $x = k \cdot 180^\circ$ ,  
 $x = 45^\circ + k \cdot 180^\circ$  k)  $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$  l)  $x = k \cdot 180^\circ, x = 45^\circ + k \cdot 90^\circ$   
 m)  $x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ, x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$   
 n)  $x = 30^\circ + k \cdot 360^\circ, x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$

15.    Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)  $\begin{cases} 5 \operatorname{sen} x + 15 \cos y = -1 \\ 10 \operatorname{sen} x - 20 \cos y = 13 \end{cases}$   
 b)  $\begin{cases} \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen} y = \frac{1}{4} \\ \cos x + \cos^2 y = \frac{1}{4} \end{cases}$   
 c)  $\begin{cases} 2 \cos 2x = \operatorname{tg} y \\ 4 \operatorname{sen}^2 2x - 2 \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$

Solución: En todos los casos  $k \in \mathbb{Z}$ . a)  $x \cong 44,427^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $x \cong 135,573^\circ + k \cdot 360^\circ$  e  $y \cong 107,458^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $y \cong 252,542^\circ + k \cdot 360^\circ$  b)  $x = 120^\circ + k \cdot 360^\circ$ ,  
 $x = 240^\circ + k \cdot 360^\circ$  e  $y \cong 30^\circ + k \cdot 360^\circ, y \cong 150^\circ + k \cdot 360^\circ$   
 c)  $x = 30^\circ + k \cdot 180^\circ, x = 150^\circ + k \cdot 180^\circ$  e  $y \cong 45^\circ + k \cdot 180^\circ$

## Resolución de triángulos.

### Teoremas del seno y del coseno

16.    ¿Es posible resolver un triángulo sabiendo que  $a = 30$  cm,  $A = 110^\circ$  y  $B = 80^\circ$ ? ¿Por qué?

17.    Demuestra que el teorema del coseno equivale al teorema de Pitágoras cuando el triángulo es rectángulo.

18.    Resuelve los triángulos de los siguientes casos, ayudándote de su construcción gráfica:

a)  $a = 5$        $b = 4$        $c = 7$   
 b)  $A = 45^\circ$        $a = 8$        $b = 10$   
 c)  $A = 35^\circ$        $B = 48^\circ$        $a = 11$   
 d)  $A = 30^\circ$        $B = 100^\circ$        $C = 50^\circ$   
 e)  $A = 35^\circ$        $B = 48^\circ$        $c = 11$

Solución: a)  $A \cong 44,42^\circ, B \cong 34,05^\circ, C \cong 101,54^\circ$  b)  $B \cong 62,11^\circ$ ,  
 $C \cong 72,89^\circ, c \cong 10,81$  cm c)  $C \cong 97^\circ, b \cong 14,25$  cm,  $c \cong 19,03$  cm  
 d) Existen infinitos triángulos semejantes e)  $C \cong 97^\circ, a \cong 6,36$  cm,  
 $b \cong 8,24$  cm

19.    Resuelve los siguientes triángulos:

a)  $a = 10$  cm       $b = 7$  cm       $c = 13$  cm  
 b)  $a = 10$  cm       $b = 7$  cm       $B = 30^\circ$   
 c)  $a = 10$  cm       $b = 7$  cm       $C = 80^\circ$   
 d)  $a = 10$  cm       $B = 30^\circ$        $C = 80^\circ$

Solución: a)  $A \cong 49,58^\circ, B \cong 32,20^\circ, C \cong 98,21^\circ$  b) Primer triángulo:  
 $A \cong 45,58^\circ, C \cong 104,42^\circ, c \cong 13,56$  cm, segundo triángulo:  
 $A \cong 134,42^\circ, C \cong 15,58^\circ, c \cong 3,76$  cm c)  $c \cong 11,17$  cm,  
 $A \cong 61,84^\circ, B \cong 38,11^\circ$  d)  $A = 70^\circ, b \cong 5,32$  cm,  $c \cong 10,48$  cm

20.    Calcula una cualquiera de las alturas de los triángulos resueltos en el ejercicio anterior y utilízala después para calcular su área.

Solución: a)  $34,65$  cm<sup>2</sup> b)  $33,9$  cm<sup>2</sup> c)  $34,45$  cm<sup>2</sup> d)  $26,2$  cm<sup>2</sup>

21.    Calcula el área de cada uno de los triángulos siguientes, sabiendo:

a)  $b = 30$  cm,  $A = 50^\circ$  y  $B = 74^\circ$   
 b)  $a = 41$  cm,  $C = 45^\circ$ , y  $B = 75^\circ$   
 c)  $a = 18$  cm,  $b = 15$  cm,  $C = 19^\circ 42'$   
 d)  $a = 6$  cm,  $b = 12$  cm,  $A = 17^\circ 30'$   
 e)  $a = 33$  cm,  $b = 24$  cm,  $c = 20$  cm

Solución: a)  $297,303$  cm<sup>2</sup> b)  $662,881$  cm<sup>2</sup> c)  $45,709$  cm<sup>2</sup>  
 d)  $d_1: 29,298$  cm<sup>2</sup>,  $d_2: 12$  cm<sup>2</sup> e)  $283,332$  cm<sup>2</sup>

22.    Uno de los ángulos de un rombo mide  $75^\circ$ , y su diagonal mayor, 10 cm. Calcula su perímetro.

Solución:  $25,2$  cm

23.    El ángulo entre los dos lados iguales de un triángulo isósceles es de  $40^\circ$  y el lado desigual tiene una longitud de 40 cm. ¿Cuál es la longitud de cada uno de los lados iguales del triángulo?

Solución:  $58,48$  cm cada uno

24.    El ángulo agudo de un rombo mide  $25^\circ$ . El lado mide 13 cm. Calcula el área del rombo.

Solución:  $142,84$  cm<sup>2</sup>

24. Los lados de un triángulo miden 8 cm, 11 cm y 13 cm, respectivamente. Calcula el valor del seno del ángulo más pequeño.

Solución:  $\text{sen } \alpha \cong 0,612836428$

25. Los tres lados de un triángulo miden 6 cm, 8 cm y 9 cm. Calcula sus ángulos y su área.

Solución:  $40,80^\circ, 60,61^\circ$  y  $78,59^\circ, 23,52 \text{ cm}^2$

26. Una araña ha tejido una tela octogonal de 7 cm de radio. Calcula el área que abarca la tela de araña.

Solución:  $138,72 \text{ cm}^2$

27. Calcula el radio de las circunferencias inscrita y circunscrita de un pentágono regular de 5 dm de lado.

Solución:  $R_c \cong 4,25 \text{ dm}, R_i \cong 3,44 \text{ dm}$

28. En un triángulo  $ABC$ , conocemos los ángulos,  $A = 34,5^\circ, B = 78^\circ$  y la suma de los lados,  $a + b = 43 \text{ cm}$ . Calcula cuánto miden los lados  $a$  y  $b$ .

Solución:  $a \cong 15,75 \text{ cm}, b \cong 27,24 \text{ cm}$

29. En un triángulo  $ABC$ , conocemos los lados  $a = 15 \text{ cm}, b = 11 \text{ cm}$  y la suma de dos de sus ángulos  $A + B = 104^\circ$ . Calcula cuánto miden los ángulos  $A$  y  $B$ .

Solución:  $A \cong 63^\circ 8' 23,36''$  y  $B = 40^\circ 51' 36,64''$

30. En un triángulo  $ABC$  dados  $A - B = 16^\circ, a = 23 \text{ cm}$  y  $b = 19 \text{ cm}$ . Calcula los ángulos del triángulo.

Solución:  $A \cong 63^\circ 52' 34,69'', B \cong 47^\circ 52' 34,69''$  y  $C \cong 68^\circ 14' 50,62''$

31. Los ángulos de la base de un triángulo valen  $35^\circ$  y  $95^\circ$ , y la suma de los otros dos lados es 38 cm. Calcula el perímetro y el área del triángulo.

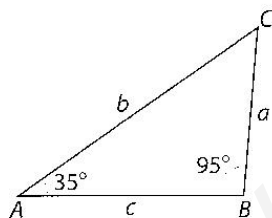


FIGURA 4.23.

Solución:  $P \cong 56,54 \text{ cm}, A \cong 128,25 \text{ cm}^2$

32. Demuestra que en todo triángulo  $ABC$ , se cumple la igualdad:

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\text{tg} \frac{A-B}{2}}{\text{tg} \frac{A+B}{2}}, \text{ conocida como Teorema de Nepper.}$$

(Indicación: debes usar el teorema del seno para escribir la relación entre  $a$  y  $b$ )

33. En los lados de un triángulo  $ABC$  se cumple que  $b - a = 1$  y  $c - b = 1$ , y se tiene que  $\cos A = 0,6$ . Calcula  $a$ ,  $\text{tg} \left( \frac{B}{2} \right)$  y  $\text{sen } 2C$ .

Solución:  $a = 1, \text{tg} \left( \frac{B}{2} \right) = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{sen } 2C = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

34. De un triángulo se conocen los lados  $b = 2,5 \text{ cm}$  y  $c = 3,5 \text{ cm}$  y se sabe que el ángulo  $B$  es la mitad del ángulo  $C$ . Calcula  $a$  y los ángulos  $A, B$  y  $C$ .

Solución:  $B \cong 45^\circ 34' 22,79'', C \cong 91^\circ 8' 45,57'', A \cong 43^\circ 16' 51,64''$   
y  $a \cong 2,400 \text{ cm}$

35. En un círculo de 10 cm de radio, dibujamos una cuerda que une los extremos de un arco que abarca un ángulo de  $80^\circ$ . Averigua la longitud de la cuerda que se estudia.

Solución:  $12,86 \text{ cm}$

36. Halla el ángulo que forman las dos tangentes comunes a dos circunferencias exteriores cuyos radios miden, respectivamente, 10 cm y 18 cm.

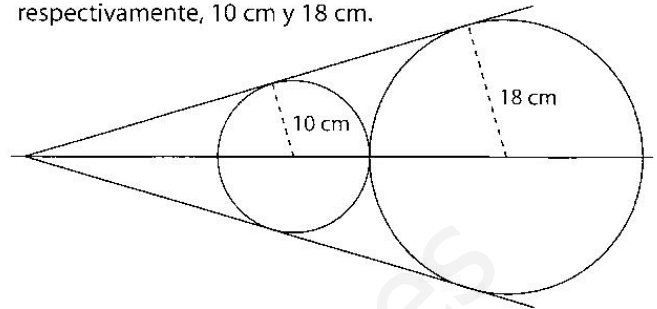


FIGURA 4.24.

Solución:  $33,2^\circ$

37. Un triángulo de lados 3 cm, 4 cm y 6 cm, está inscrito en una circunferencia.

a) Calcula su perímetro.

b) Averigua su área.

Solución: a)  $p \cong 21,21 \text{ cm}$

b)  $A \cong 35,79 \text{ cm}^2$

38. En una circunferencia de radio 10 cm, hay inscrito un triángulo isósceles cuyo lado desigual mide 10 cm también. Calcula el área de dicho triángulo.

Solución:  $A = 93,3 \text{ cm}^2$

39. Determina el área de un triángulo que está inscrito en una circunferencia de radio 3 cm, sabiendo que dos de los lados del triángulo miden 2 cm y 4 cm, respectivamente.

Solución: Triángulo 1:  $A \cong 3,51 \text{ cm}^2$

Triángulo 2:  $A \cong 1,52 \text{ cm}^2$

40. Calcula el área del triángulo  $ABC$  representado en la siguiente figura si sabes que  $AB = 25 \text{ cm}$ :

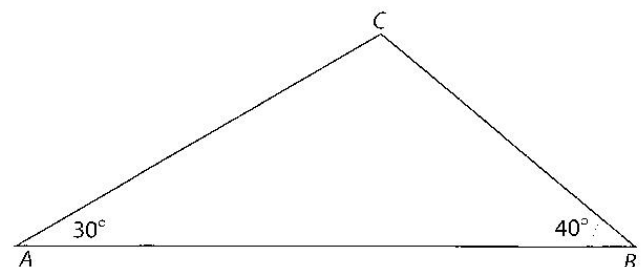


FIGURA 4.25.

Solución:  $A = 106,88 \text{ cm}^2$

41. Sabiendo que la longitud de las manecillas de un reloj de pared miden 10 y 12 centímetros, respectivamente.

a) ¿Cuál es la distancia entre sus extremos cuando son las 16:00?

b) ¿Qué área tiene el triángulo que determinan las manecillas a esta hora?

Solución: a)  $19,09 \text{ cm}$

b)  $51,96 \text{ cm}^2$

- El área de un triángulo de vértices  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tiene una superficie de  $50 \text{ m}^2$ . El ángulo  $A$  de este triángulo es de  $45^\circ$  y el ángulo  $B$  es de  $30^\circ$ . Sea  $D$  el pie de la altura desde el vértice  $C$ , es decir, el punto del segmento  $AB$  en que se cumple que  $CD$  es perpendicular a  $AB$ . Calcula la longitud de los segmentos  $CD$ ,  $AD$ ,  $BD$ ,  $AB$ ,  $BC$  y  $AC$ .

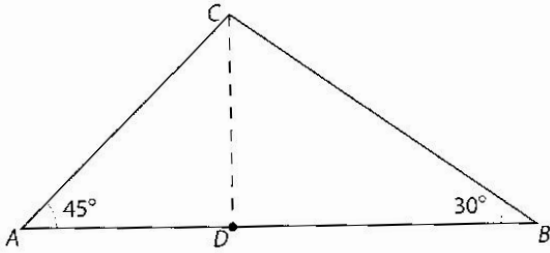


FIGURA 4.26.

Solución:  $CD = AD = 6,05 \text{ m}$ ;  $BD = 10,48 \text{ m}$ ;  $AB = 16,53 \text{ m}$ ;  
 $BC = 12,10 \text{ m}$ ;  $AC = 8,56 \text{ m}$

- De un triángulo conocemos que  $a + b = 11 \text{ m}$ ; el ángulo  $C = 30^\circ$ ; y el área es  $7 \text{ m}^2$ . Calcula:
- La longitud de cada uno de los lados del triángulo.
  - Los ángulos del triángulo.

Solución: a)  $4$  y  $7 \text{ m}$ , respectivamente b)  $29,49^\circ$ ,  $120,51^\circ$  y  $C = 30^\circ$

- Calcula el área de un triángulo isósceles inscrito en una circunferencia de  $30 \text{ cm}$  de radio, y cuyo lado desigual mide  $20 \text{ cm}$ .

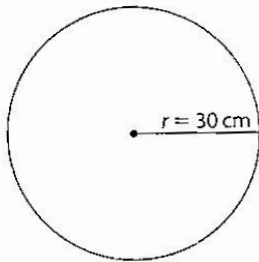


FIGURA 4.27.

Solución:  $17,2 \text{ cm}^2$

- Sobre una circunferencia de radio  $1 \text{ m}$  y centro en el punto  $O$ , consideramos los cinco vértices  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  de un pentágono regular. Calcula:

- El ángulo que forma el radio que acaba en el vértice  $A$  con el lado  $AB$  y el ángulo que forman en el vértice  $A$  los dos lados que lo tienen como extremo.
- La longitud de cada uno de los lados del pentágono.
- La longitud de cualquiera de las diagonales.
- El área del triángulo  $EAB$ .

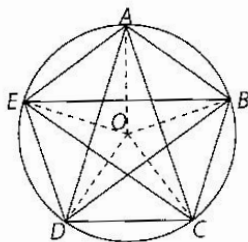


FIGURA 4.28.

Solución: a)  $54^\circ$ ,  $108^\circ$ , respectivamente b)  $1,176 \text{ m}$  c)  $1,902 \text{ m}$  d)  $0,657 \text{ m}^2$

- El lado más largo de un paralelogramo mide  $20 \text{ cm}$ , su área es de  $120 \text{ cm}^2$  y su ángulo menor,  $30^\circ$ . Determina:

- El ángulo mayor del paralelogramo.
- La longitud del lado menor.

Solución: a)  $150^\circ$  b)  $12 \text{ cm}$

## Aplicaciones de la trigonometría

- En un cierto lugar de su recorrido un río tiene sus orillas paralelas. En ese punto se desea medir su anchura. Para ello desde dos puntos  $A$  y  $B$  de una de sus orillas, que están separados  $25 \text{ m}$ , se observa un punto  $P$  de la otra orilla, situado río abajo. Si las visuales desde  $A$  y  $B$  a  $P$  forman con la orilla unos ángulos de  $39^\circ 25'$  y  $52^\circ 48'$  respectivamente, averigua la anchura del río en ese punto.

Solución:  $54,63 \text{ m}$

- Si el extremo superior de una estatua es observado desde un punto situado a ras del suelo y a cierta distancia, con un ángulo de elevación de  $35^\circ$ , ¿cuál será el ángulo de elevación desde el triple de distancia?

Solución:  $11,02^\circ$

- Una rampa de  $40 \text{ m}$  de longitud y  $10^\circ$  de inclinación conduce al pie de una estatua. Calcula su altura sabiendo que, en el inicio de la rampa, el ángulo de elevación del punto más alto de la estatua es de  $15^\circ$ .

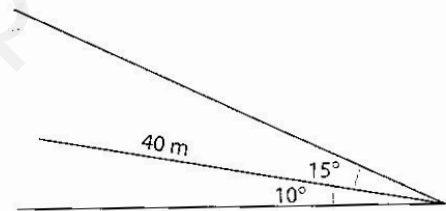


FIGURA 4.29.

Solución:  $11,42 \text{ m}$

- Una embarcación,  $A$ , se encuentra a  $45 \text{ km}$  al sureste de otro barco  $B$ , y una tercera embarcación,  $C$ , se halla a  $57 \text{ km}$  al sur de  $B$ .

- ¿Qué distancia separa a los barcos  $A$  y  $C$ ?
- ¿Qué rumbo debería tomar el barco  $C$  para arribar al punto donde está situado  $A$ ?

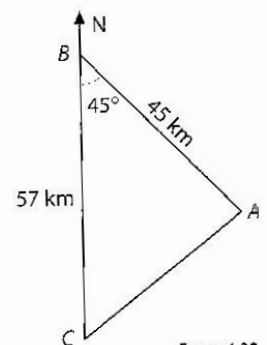


FIGURA 4.30.

Solución: a)  $40,58 \text{ km}$  b) Rumbo  $51,64^\circ$  Nor-este

- Un golfista golpea la pelota de modo que su lanzamiento alcanza una longitud de  $129 \text{ m}$ . Si la distancia del golfista al hoyo es de  $150 \text{ m}$  y la pelota queda a una distancia de  $40 \text{ m}$  del hoyo, calcula el ángulo que forma la línea de unión del golfista con el hoyo y la dirección del lanzamiento.

Solución:  $14,06^\circ$