

1. Calcula el término general de una progresión aritmética sabiendo que el segundo término es 6 y el noveno 34

2. Calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 3}{n^2 + 3} \right)^{3n}$

3. Sabiendo que $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) = \infty$, calcula $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^{b_n}$

(Sol.: $e^{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n (a_n - 1)}$)

4. En una población de 30.000 habitantes se declara una epidemia que afecta a 100 habitantes un día determinado y, cada día que pasa, se extiende a 5 personas más.

a) ¿Cuántas personas estarán afectadas al cabo de 15 días?

b) ¿En cuántos días la epidemia se habrá extendido a más del 10% de la población?

5. En cierto país hay, en un momento determinado, 125.000 analfabetos. Una campaña de alfabetización promovida por el gobierno permite reducir en un 10 % este número al cabo de un trimestre. Si se consigue mantener ese ritmo, es decir, cada trimestre se reduce el número de analfabetos en un 10%,

a) ¿Cuál es el término general de la sucesión que indica el número de analfabetos al cabo de n trimestres?

b) ¿Cuál es el término general de la sucesión que indica el número de alfabetizados en el trimestre n ?

c) ¿Cuántos analfabetos habrá al cabo de un año?

d) ¿Al cabo de cuánto tiempo se habrá conseguido alfabetizar a la mitad de la población? (se supone que no se incorporan nuevos analfabetos a la población inicial)

6. Calcula la suma de los 25 primeros términos de una progresión geométrica de razón 0'5 cuya suma infinita es 20

(Sol.: $20(1-0'5^{25})$)

Soluciones:

4.

a_1 representa el nº de afectados el día 1: $a_1 = 100$

a_2 representa el nº de afectados el día 2: $a_2 = 100 + 5 = 105$

a_3 representa el nº de afectados el día 3: $a_3 = 105 + 5 = 110$

Se trata, por tanto, de una progresión aritmética con primer término 100 y diferencia 5. El término general será:

$$a_n = a_1 + (n - 1) d = 100 + (n - 1)5 = 100 + 5n - 5 = 95 + 5n$$

a) El número de afectados al cabo de 15 días es el número que hay el día 16, por tanto, buscamos $a_{16} = 95 + 5 \cdot 16 = 175$ afectados

b) Buscamos n de manera que $a_n > 0'1 \times 30.000 \Rightarrow 95 + 5n > 3.000 \Rightarrow 5n > 2.905$

$$\Rightarrow n > 2905 / 5 \Rightarrow n > 581 ; \text{ es decir, estará afectada el 10\% de la población el día}$$

$$\Rightarrow 582, \text{ o bien, al cabo de } 581 \text{ días.}$$

5.

a)

a_1 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 1, es decir, el nº inicial: $a_1 = 125.000$

a_2 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 2: $a_2 = 125.000 \times 0'9$
(reducción en 10% sobre los que había al principio del trimestre anterior: 125000)

a_3 representa el nº de analfabetos al principio del trimestre 3:

$$a_3 = 125000 \times 0'9 \times 0'9 = 125.000 \times 0'9^2$$

(reducción en 10% sobre los que había al principio del trimestre anterior: 125000 x 0'9)

Se trata entonces de una progresión geométrica cuyo primer término es 125.000 y de razón 0'9.

$$a_n = a_1 \cdot r^n \Rightarrow a_n = 125.000 \times 0'9^{n-1}$$

b)

b_1 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 1, es decir: $b_1 = 125.000 \times 0'1 = 12.500$
(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 1)

b_2 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 2, es decir:

$$b_2 = (125.000 \times 0'9) \times 0'1 = 12.500 \times 0'9$$

(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 2)

b_3 representa el nº de alfabetizados al final del trimestre 3, es decir:

$$b_3 = (125.000 \times 0'9^2) \times 0'1 = 12.500 \times 0'9^2$$

(el 10% de los analfabetos que había al principio del trimestre 3)

Se trata entonces de una progresión geométrica cuyo primer término es 12.500 y de razón 0'9.

$$b_n = b_1 \cdot r^n \Rightarrow b_n = 12.500 \times 0'9^{n-1}$$

c) El final de 1 año será al cabo del trimestre 4 o al inicio del 5, por tanto, buscamos

$$a_5 = 125.000 \times 0'9^4 = 82.012 \text{ analfabetos}$$

d) Buscamos n de manera que el nº de analfabetos sea menor de la mitad, es decir,

$$a_n < 125000 / 2 = 62500 \Rightarrow 125.000 \times 0'9^{n-1} < 62.500 \Rightarrow 0'9^{n-1} < \frac{62500}{125000} = \frac{1}{2} = 0'5$$

$$\Rightarrow \log 0'9^{n-1} < \log 0'5 \Rightarrow (n-1) \cdot \log 0'9 < \log 0'5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 > \frac{\log 0'5}{\log 0'9} = 6'5 \Rightarrow n > 7'5 \Rightarrow n = 8; \text{ es decir al principio del trimestre 8, o dicho de otra manera, han de pasar } \mathbf{7 \text{ trimestres.}}$$

(nota: cambia el sentido de la desigualdad porque $\log 0'9 < 0$)

Otra posibilidad es calcular cuando la suma de alfabetizados (b_n) supera los 62500, es decir, calcular n de manera que $S_n > 62500$, por tanto

$$S_n = b_1 \frac{1-r^n}{1-r} = 12500 \frac{1-0'9^n}{1-0'9} = 125000(1-0'9^n) > 62500 \Rightarrow 1-0'9^n > 0'5 \Rightarrow 0'9^n < 0'5$$

\Rightarrow (como antes se explicó $n > 6'5 \Rightarrow n = 7$; es decir, han de pasar 7 trimestres)