

## Análisis

**NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.**

- 1) Estudiar la continuidad de  $f(x)$  clasificando las discontinuidades: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{x-3}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x}{x-2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 2) Calcular el dominio de la siguiente función:  $y = \sqrt{-2x^3 + 7x^2 - 9}$  (2 puntos)

- 3) Calcular las asíntotas de:  $y = \frac{2x^2}{x-4}$  (1,2 puntos)

- 4) Calcular: a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{3}{x-2}}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{1}{x-2}}$  (1,8 puntos)

- 5) Calcular las derivadas de: (3 puntos)

a)  $y = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$

b)  $y = \operatorname{arctg}(e^{-2x})$

c)  $y = \operatorname{sen}^3 3x$

d)  $y = \ln \frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}}$

e)  $y = x^3 e^{-3x}$

## SOLUCIONES

- 1) Estudiar la continuidad de  $f(x)$  clasificando las discontinuidades: (2 puntos)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4x^2}{x-3}, & \text{si } x < 1 \\ \frac{2x}{x-2}, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Intervalo  $(-\infty, 1)$ :  $f$  coincide con la función  $y = \frac{4x^2}{x-3}$ , que es continua en todo  $\mathbb{R}$  salvo en  $x = 3$ , único punto que no pertenece a su dominio. Pero  $3 \notin (-\infty, 1)$ , luego no es una discontinuidad de  $f$ . Por tanto,  $f$  es continua en todo el intervalo.
- Intervalo  $(1, +\infty)$ :  $f$  coincide con  $y = \frac{2x}{x-2}$ . Ésta, al ser una función elemental, es continua en su dominio; es decir, lo es en  $\mathbb{R} - \{2\}$ . Como 2 está en el intervalo, que es donde coincide  $f$  con esta función, la discontinuidad lo es también de  $f$ . Veamos de qué tipo es.

1)  $\nexists f(2)$  (2 no está en el dominio).

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x}{x-2} = \left(\frac{4}{0}\right) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x}{x-2} = \left(\frac{4}{0}\right) = +\infty$$

puesto que, en el primer caso, cuando  $x$  está a la izquierda de 2 y muy próximo a él (es decir, es menor que 2),  $x - 2$  es negativo, mientras que  $2x$  es positivo, por lo que el cociente resulta negativo; por tanto, el infinito al que tiende es  $-\infty$ . Y en el segundo límite,  $x - 2$  es positivo, al estar  $x$  a la derecha de 2, manteniéndose  $2x$  positivo para valores muy próximos a 2; luego el cociente resulta positivo.

De ello se deduce que estamos ante una discontinuidad asintótica de salto infinito en  $x = 2$ .

- $x = 1$ :

$$1) \exists f(1) = \frac{2 \cdot 1}{1 - 2} = -2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4x^2}{x-3} = \frac{4}{1-3} = -2; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x-2} = \frac{2 \cdot 1}{1-2} = -2$$

Por tanto,  $\exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

3) Ambos resultados coinciden

Por tanto, la función  $f$  es continua en  $x = 1$ .

En resumen  $f$  es continua en  $\mathbb{R} - \{2\}$  y presenta una discontinuidad asintótica de salto infinito en  $x = 2$ .

- 2) Calcular el dominio de la siguiente función:  $y = \sqrt{-2x^3 + 7x^2 - 9}$  (2 puntos)

La única operación que presenta valores para los que no puede calcularse es la raíz cuadrada. Y para que exista la raíz cuadrada, el radicando debe ser positivo.

Por tanto, los valores de  $x$  que están en el dominio son las soluciones de la inecuación:

$$-2x^3 + 7x^2 - 9 \geq 0.$$

Para resolver esta inecuación, descomponemos factorialmente el polinomio, por Ruffini:

	-2	7	0	-9
-1		2	-9	9
	-2	9	-9	0
3		-6	9	
	-2	3	0	
3/2		-3		
	-2	0		

Luego la inecuación anterior se transforma en:

$$-2(x+1)(x-3/2)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3/2)(x-3) \leq 0$$

Puesto que al pasar  $-2$ , que es negativo, dividiendo al segundo miembro cambia el sentido de la desigualdad. Dividiendo  $\mathbb{R}$  en intervalos mediante los valores que anulan cada factor, que en orden son  $-1$ ,  $3/2$  y  $3$ , nos queda el siguiente cuadro, cuyos signos estudiamos dando a  $x$  un valor cualquiera dentro de cada intervalo, ya que los signos no varían dentro de ellos:

	$(-\infty, -1)$	$-1$	$(-1, 3/2)$	$3/2$	$(3/2, 3)$	$3$	$(3, +\infty)$
$x+1$	-	0	+	...	+	...	+
$x-3/2$	-	...	-	0	+	...	+
$x-3$	-	...	-	...	-	0	+
$(x+1)(x-3/2)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+
¿Sirven? $\rightarrow$	Si	Si	No	Si	Si	Si	No

Luego:

$$D(f) = (-\infty, -1] \cup [3/2, 3].$$

3) Calcular las asíntotas de:  $y = \frac{2x^2}{x-4}$  (1,2 puntos)

- Asíntotas verticales: Sólo tenemos una discontinuidad, en  $x = 4$  (que anula el denominador). Ahí es donde únicamente podríamos encontrar asíntota vertical. Veámoslo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2}{x-4} = \left( \frac{32}{0} \right) = \infty \Rightarrow \text{La recta } x = 4 \text{ es una asíntota vertical.}$$

- Asíntota horizontal:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = \infty \Rightarrow \text{No tiene A.H.}$

- Asíntota oblicua: Puede que exista, porque no hay A.H.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(x-4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2-4x} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x^2}{x-4} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 2x^2 + 8x}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x-4} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x}{x} = 8$$

Por tanto, la recta  $y = 2x + 8$  es asíntota oblicua.

4) Calcular: a)  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{3}{x-2}}$  b)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{1}{x-2}}$  (1,8 puntos)

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x+3}{2x+1} \right)^{\frac{3}{x-2}} &= (1^\infty) = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \left( \frac{x+3}{2x+1} - 1 \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \left( \frac{x+3-(2x+1)}{2x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \left( \frac{x+3-2x-1}{2x+1} \right)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3}{x-2} \left( \frac{-x+2}{2x+1} \right)} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(-x+2)}{(x-2)(2x+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-2)(2x+1)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3}{2x+1}} = \boxed{e^{\frac{-3}{5}} = \frac{1}{e^{\frac{3}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^3}}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} 3^{\frac{1}{x-2}} = (3^\infty).$$

Pero la exponencial se comporta de distinta forma en  $+\infty$  y en  $-\infty$ . Por tanto, distinguimos entre límite por la derecha y por la izquierda.

Cuando  $x \rightarrow 2^- \Rightarrow x - 2 < 0$  (porque  $x$  es menor que 2, al estar a su izquierda). Por lo tanto, el exponente es negativo (más entre menos):

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} 3^{\frac{1}{x-2}} = (3^{-\infty}) = 0$$

En cambio, a la derecha de 2 tendremos  $x - 2 > 0$ . Luego:

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} 3^{\frac{1}{x-2}} = (3^{+\infty}) = +\infty$$

Al no coincidir los límites laterales, **no existe el límite completo**.

5) Calcular las derivadas de:

(3 puntos)

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{\sin x}{1 + \cos x} \Rightarrow y' = \frac{\cos x(1 + \cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1 + \cos x)^2} = \\ &= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} = \boxed{\frac{1}{1 + \cos x}} \end{aligned}$$

$$\text{b) } y = \operatorname{arctg}(e^{-2x}) \Rightarrow y' = \frac{-2e^{-2x}}{1 + (e^{-2x})^2} = \boxed{-\frac{2e^{-2x}}{1 + e^{-4x}}}$$

$$\text{c) } y = \sin^3 3x \Rightarrow y' = 3(\sin^2 3x)(3 \cos 3x) = \boxed{9 \sin^2 3x \cos 3x}$$

$$\text{d) } y = \ln \frac{(x-2)^3}{\sqrt{2x-1}} = \ln(x-2)^3 - \ln \sqrt{2x-1} = 3 \ln(x-2) - \frac{1}{2} \ln(2x-1) \Rightarrow$$

$$y' = 3 \frac{1}{x-2} - \frac{1}{2} \frac{2}{2x-1} = \frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-1} = \boxed{\frac{3}{x-2} - \frac{1}{2x-1}}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } y &= x^3 e^{-3x} \Rightarrow y' = 3x^2 e^{-3x} + x^3 (-3) e^{-3x} = 3x^2 e^{-3x} - 3x^3 e^{-3x} = \\ &= \boxed{3x^2 e^{-3x} (1-x)} \end{aligned}$$