Análisis

NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ clasificando las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{si } x<1\\ 3x^2-2, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

2) Decir si $y=\dfrac{3x^5}{3x^3-2x}$ es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas. *(1 punto)*

3) Dadas $f(x)=-3x^2-2x$ y $g(x)=\dfrac{-5x+4}{3x-1}$, hallar (simplificando el resultado):

   a) $g\circ f$ *(1 punto)*

   b) g^{-1}, si existe. *(1 punto)*

4) Hallar el dominio de $y=\ln(-6x^3+27x^2-30x+9)$ *(2 puntos)*

5) Calcular: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x-\sqrt{3x}}$ *(1 punto)*

6) Calcular las asíntotas de $y=\dfrac{2x^2-5}{3x}$ *(2 puntos)*

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)$ clasificando las discontinuidades: *(2 puntos)*

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x+2}, & \text{si } x<1\\ 3x^2-2, & \text{si } x\geq 1\end{cases}$$

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con la función $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$, cuyo único punto de discontinuidad es $x=-2$ (porque, al anular el denominador, no está en su dominio; y las funciones elementales son continuas en su dominio). Este punto, al estar en la zona de coincidencia de f con esta función, es una discontinuidad de f. *En el resto del intervalo, por tanto, f es continua.*
  Clasifiquemos la discontinuidad en $x=-2$.
  1) $\nexists f(-2)$ (-2 no está en el dominio).
  2) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{(x-2)(x+2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x-2) = -4$
  Al calcular el límite anterior, obteníamos inicialmente la indeterminación 0/0, por lo que hemos descompuesto factorialmente numerador y denominador.
  Por tanto, al fallar la condición 1 de continuidad, pero no la 2, se trata de una *discontinuidad evitable*.
- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y = 3x^2 - 2$, que es continua en todo R. Luego f es *continua en todo el intervalo*.
- $x = 1$: El punto que conecta unas zonas de definición con otras en una función definida a trozos debe estudiarse por separado. Tenemos que:
  1) $\exists f(1) = 3\cdot 1^2 - 2 = 1$
  2) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-4}{x+2} = \frac{-3}{3} = -1$ $\qquad$ $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x^2-2) = 1$

     Como los laterales no coinciden, no existe el límite. Se trata de una *discontinuidad de salto finito*.

> En resumen, f es continua en $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$ y una de salto finito en $x = 1$.

2) Decir si $y=\dfrac{3x^5}{3x^3-2x}$ es *par*, *impar* o ninguna de las dos cosas. *(1 punto)*

$$f(x)=\frac{3x^5}{3x^3-2x} \Rightarrow f(-x)=\frac{3(-x)^5}{3(-x)^3-2(-x)}=\frac{-3x^5}{-3x^3+2x}=\frac{-3x^5}{-(3x^3-2x)}=\frac{3x^5}{3x^3-2x}$$

Como consecuencia, $f(x) = f(-x)$, por lo que estamos ante una $\boxed{\text{función par}}$.

3) Dadas $f(x)=-3x^2-2x$ y $g(x)=\dfrac{-5x+4}{3x-1}$, hallar (simplificando el resultado):

a) $g\circ f$ *(1 punto)*

$$g\circ f(x)=g\left[f(x)\right]=g\left[-3x^2-2x\right]=\frac{-5(-3x^2-2x)+4}{3(-3x^2-2x)-1}=\boxed{\frac{15x^2+10x+4}{-9x^2-6x-1}}$$

b) g^{-1}, si existe. *(1 punto)*

$$y=\frac{-5x+4}{3x-1} \;\Rightarrow\; \text{Despejamos } x\text{:}\quad y(3x-1)=-5x+4 \;\Rightarrow\; 3xy-y=-5x+4 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 3xy+5x=y+4 \;\Rightarrow\; x(3y+5)=y+4 \;\Rightarrow\; x=\frac{y+4}{3y+5}$$

Esta última fórmula permite conocer quién es el original que se transforma en una imagen y conocida. La convertimos en función, usando las letras convencionales para las variables independiente y dependiente; es decir, intercambiamos x con y:

$$\boxed{y=\frac{x+4}{3x+5}}$$

4) Hallar el dominio de $y=\ln(-6x^3+27x^2-30x+9)$ *(2 puntos)*

Para que exista la imagen de x, el argumento del logaritmo neperiano debe ser estrictamente positivo pues, de lo contrario, no podría calcularse. Por tanto, el dominio lo constituyen las soluciones de la inecuación: $-6x^3+27x^2-30x+9>0$

Para resolverla, descomponemos factorialmente el polinomio mediante Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & -6 & 27 & -30 & 9 \\
1 & & -6 & 21 & -9 \\ \hline
 & -6 & 21 & -9 & \boxed{0} \\
3 & & -18 & 9 & \\ \hline
 & -6 & 3 & \boxed{0} & \\
1/2 & & -3 & & \\ \hline
 & -6 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Luego la inecuación es: $-6(x-1)(x-3)(x-½)>0 \;\Leftrightarrow\; \boxed{(x-1)(x-3)(x-½)<0}$, puesto que al pasar -6 al otro miembro dividiendo, cambia el sentido de la desigualdad, porque se trata de un factor negativo.

Para resolverla, rellenamos el siguiente cuadro, que resulta de dividir R en intervalos mediante los valores que anulan cada factor, esto es (en orden): ½, 1 y 3:

	(−∞, ½)	½	(½, 1)	1	(1, 3)	3	(3, +∞)
$x-½$	−	0	+	…	+	…	+
$x-1$	−	…	−	0	+	…	+
$x-3$	−	…	−	…	−	0	+
$(x-½)(x-1)(x-3)$	−	0	+	0	−	0	+
¿Sirven? →	Si	No	No	No	Si	No	No

Donde hemos tenido en cuenta que dentro de cada intervalo resultante, el signo de cada uno de los factores anteriores permanece constante, por lo que, para hallarlo, basta dar a x un valor cualquiera de dicho intervalo en cuestión. Por tanto, la solución de la inecuación y, consiguientemente, el dominio, es:

$$\boxed{D(f)=(-\infty,\,½)\cup(1,\,3)}$$

5) Calcular: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{x-\sqrt{3x}}$ *(1 punto)*

Obtenemos la indeterminación 0/0, por lo que hemos de descomponer en factores. Como el numerador tiene un sumando que es una raíz, hay que multiplicar y dividir por su conjugado. Igual sucede con el denominador. Por tanto:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-\sqrt{3x}} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2x-2}-2}{x-\sqrt{3x}}\,\frac{\sqrt{2x-2}+2}{\sqrt{2x-2}+2}\,\frac{x+\sqrt{3x}}{x+\sqrt{3x}} =$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left[\left(\sqrt{2x-2}\right)^2-2^2\right]\left(x+\sqrt{3x}\right)}{\left[x^2-\left(\sqrt{3x}\right)^2\right]\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{(2x-2-4)\left(x+\sqrt{3x}\right)}{\left(x^2-3x\right)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} =$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{(2x-6)\left(x+\sqrt{3x}\right)}{x(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2(x-3)\left(x+\sqrt{3x}\right)}{x(x-3)\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \lim_{x\to 3}\frac{2\left(x+\sqrt{3x}\right)}{x\left(\sqrt{2x-2}+2\right)} = \frac{2\cdot(3+3)}{3(2+2)} =$$

$$=\frac{12}{12}=\boxed{1}$$

6) Calcular las asíntotas de $y=\dfrac{2x^2-5}{3x}$ *(2 puntos)*

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{3} = \infty$, por lo que no tiene. En el cálculo del límite hemos tenido en cuenta que el comportamiento de un polinomio en el infinito lo decide el término de mayor grado, puesto que los demás presentan valores despreciables frente al mismo.
- Asíntotas verticales: La única discontinuidad la tiene la función en $x=0$, por lo que es donde puede tener alguna. Calculamos el límite en dicha discontinuidad:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-5}{3x}=\left(\frac{-5}{0}\right)=\infty$$

  Por tanto, la función tiene una asíntota vertical de ecuación $\boxed{x=0}$.
- Asíntota oblicua: Abordamos su cálculo porque no hay asíntotas horizontales.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-5}{3x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5}{3x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3} \quad\Rightarrow$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5}{3x}-\frac{2}{3}x\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-5}{3x}-\frac{2x^2}{3x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{-5}{3x}\right) = 0$$

  Por consiguiente, la recta de ecuación $\boxed{y=\frac{2}{3}x}$ es una asíntota oblicua.