**Análisis**

**NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.**

1) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{3x-1}$ y $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{2x^4+7}$, hallar $g \circ f$. *(2 puntos)*

2) Hallar $f^{-1}(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x-3}{3x-8}$ *(1,5 puntos)*

3) Calcular el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15}}$ *(2,5 puntos)*

4) Dibujar la siguiente función. El estudio de la parábola debe incluir el cálculo del eje, del vértice y de las intersecciones con los ejes:

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & si \quad x \le -1 \\ 2x+1, & si \quad -1 < x < 1 \\ 4x - x^2 & si \quad x > 1 \end{cases}$$ *(2 puntos)*

5) a) Tomar logaritmos en la expresión: $A = \dfrac{x\sqrt{\dfrac{y}{z}}}{ab}$ *(1 punto)*

b) Eliminar logaritmos en la expresión: $\log A = 3 - \log x + 2 \log y - \dfrac{7}{2} \log z$ *(1 pto)*

# SOLUCIONES

1) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{3x-1}$ y $g(x) = \dfrac{3x^2-2}{2x^4+7}$, hallar $g \circ f$. *(2 puntos)*

$$g \circ f(x) = g[f(x)] = g[\sqrt{3x-1}\,] = \frac{3\left(\sqrt{3x-1}\right)^2-2}{2\left(\sqrt{3x-1}\right)^4+7} = \frac{3(3x-1)-2}{2(3x-1)^2+7} = \frac{9x-3-2}{2(9x^2-6x+1)+7} =$$

$$= \frac{9x-5}{18x^2-12x+2+7} = \boxed{\frac{9x-5}{18x^2-12x+9}}$$

2) Hallar $f^{-1}(x)$, siendo $f(x) = \dfrac{4x-3}{3x-8}$ *(1,5 puntos)*

$$y = \frac{4x-3}{3x-8} \;\Rightarrow\; y(3x-8) = 4x-3 \;\Rightarrow\; 3xy-8y = 4x-3 \;\Rightarrow\; 3xy-4x = 8y-3 \;\Rightarrow$$

$$x(3y-4) = 8y-3 \;\Rightarrow\; x = \frac{8y-3}{3y-4}.$$

Intercambiando $x$ con $y$: $y = \dfrac{8x-3}{3x-4}$. Por tanto, $\boxed{f^{-1}(x) = \dfrac{8x-3}{3x-4}}$

3) Calcular el dominio de $y = \sqrt{\dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15}}$ *(2,5 puntos)*

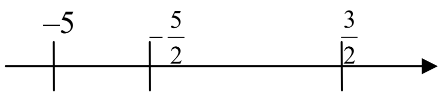
$x \in \mathrm{D}(f) \iff \dfrac{x+5}{-4x^2-4x+15} \geq 0$, manteniéndose el denominador no nulo. Y ello es porque, para que exista la raíz cuadrada, el radicando no puede ser negativo.
Para solucionar esta inecuación, descomponemos factorialmente el denominador. Lo hacemos resolviendo la ecuación $-4x^2-4x+15 = 0 \iff 4x^2+4x-15 = 0$:

$$x = \frac{-4\pm\sqrt{16+240}}{8} = \frac{-4\pm\sqrt{256}}{8} = \frac{-4\pm16}{8} = \left\langle \begin{array}{l} = \dfrac{-4-16}{8} = \dfrac{-20}{8} = -\dfrac{5}{2} \\ = \dfrac{-4+16}{8} = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto, $-4x^2-4x+15 = -4\left(x+\dfrac{5}{2}\right)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)$. De donde la inecuación a resolver es:

$$\frac{x+5}{-4\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \geq 0 \iff \boxed{\frac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)} \leq 0}$$

Puesto que al pasar $-4$ multiplicando al otro miembro cambia el sentido de la desigualdad, puesto que $-4 < 0$. Como los números que anulan cada uno de los factores intervinientes son:




dividimos $\mathbb{R}$ en intervalos mediante esos tres puntos, obteniendo el siguiente cuadro. Dentro de cada intervalo resultante, el signo de cada uno de los factores anteriores permanece constante, por lo que, para hallarlo, basta dar a $x$ un valor cualquiera dentro del intervalo en cuestión. Con ello, nos queda:

| | $(-\infty,-5)$ | $-5$ | $(-5,-\frac{5}{2})$ | $-\frac{5}{2}$ | $(-\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ | $\frac{3}{2}$ | $(\frac{3}{2},+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+5$ | – | 0 | + | … | + | … | + |
| $x+\frac{5}{2}$ | – | … | – | 0 | + | … | + |
| $x-\frac{3}{2}$ | – | … | – | … | – | 0 | + |
| $\dfrac{x+5}{\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right)}$ | – | 0 | + | ∄ | – | ∄ | + |
| ¿Sirven? → | Si | Si | No | No | Si | No | No |

Al rellenar el cuadro, tenemos en cuenta que si se anula el denominador no existe el resultado final de la expresión cuyo signo estamos evaluando. Por tanto, los puntos que sirven como resultado de la inecuación constituyen el dominio; esto es:

$$\boxed{D(f)=(-\infty,-5]\cup\left(-\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)}$$

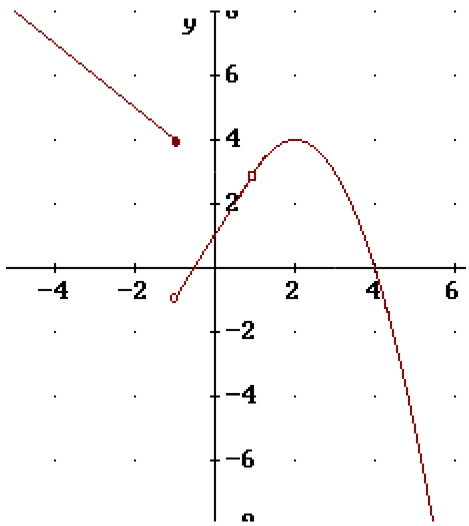
4) Dibujar la siguiente función. El estudio de la parábola debe incluir el cálculo del eje, del vértice y de las intersecciones con los ejes:

$$f(x)=\begin{cases}-x+3, & si \quad x\le -1\\ 2x+1, & si \quad -1<x<1\\ 4x-x^2 & si \quad x>1\end{cases}$$

*(2 puntos)*

Las rectas $y=-x+3$ y $y=2x+1$ se dibujan fácilmente mediante una pequeña tabla de valores, que puede hacerse de memoria. Al hacerlo, hay que restringirlas sólo a las zonas donde coinciden con $f$, esto es, a $(-\infty,-1]$ y a $(-1, 1)$ respectivamente. Todo ello lo hemos reflejado directamente en la gráfica. Por tanto, nos centramos en el estudio de la parábola $y=-x^2+4x$.

- Se trata de una función *cóncava*, puesto que el coeficiente de $x^2$ es negativo.
- El eje es: $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-4}{-2}=2$, es decir, la recta de ecuación $x=2$.
- Como $f(2)=-4+8=4$, el vértice es $(2, 4)$.
- Intersección con OY: $x=0 \Rightarrow y=0$: $(0, 0)$.
- Intersección con OX: $y=0 \Rightarrow 0=-x^2+4x \Rightarrow 0=x(-x+4) \Rightarrow x=0$ ó $x=4$.
  Es decir: $(0, 0)$ y $(4, 0)$.




Con estos datos y una pequeña tabla de valores adicional, dibujamos la parábola. Y la gráfica resultante la restringimos a la zona donde coincide con $f$, o sea, a $(1,+\infty)$.

Y así hemos dibujado la gráfica.

5) a) Tomar logaritmos en la expresión: $A = \dfrac{x\sqrt{\dfrac{y}{z}}}{ab}$ *(1 punto)*

$$\log A = \log\frac{x\sqrt{\dfrac{y}{z}}}{ab} = \log x\sqrt{\frac{y}{z}} - \log ab = \log x + \log\sqrt{\frac{y}{z}} - (\log a + \log b) =$$

$$= \log x + \frac{1}{2}\log\frac{y}{z} - \log a - \log b = \log x + \frac{1}{2}(\log y - \log z) - \log a - \log b =$$

$$= \boxed{\log x + \frac{1}{2}\log y - \frac{1}{2}\log z - \log a - \log b}$$

b) Eliminar logaritmos en la expresión: $\log A = 3 - \log x + 2\log y - \dfrac{7}{2}\log z$ *(1 pto)*

$$\log A = \log 1000 + \log y^2 - \log x - \frac{1}{2}\log z^7 = \log 1000y^2 - (\log x + \log\sqrt{z^7}) =$$

$$= \log 1000y^2 - \log x\sqrt{z^7} = \log\frac{1000y^2}{x\sqrt{z^7}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \frac{1000y^2}{x\sqrt{z^7}}}$$