Análisis

NOTA: Todos los resultados deben estar simplificados.

1) Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x<1 \\ x^2-2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ *(2 puntos)*

2) Hallar: $\underset{x\to 2}{lím}\dfrac{x^2-x-2}{3-\sqrt{5x-1}}$ *(1 punto)*

3) Derivar y simplificar: $y=\operatorname{arctg} 3x^2$; $y=\dfrac{x^2e^{1-x}}{3}$; $y=\ln\sqrt[3]{\dfrac{(x-2)^2}{x-3}}$; $y=2\cos^2 4x$ *(2 ptos)*

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\dfrac{x^2+2x}{x+1}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$; $y''=-\dfrac{2}{(x+1)^3}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

SOLUCIONES

1) Estudiar la continuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x<1 \\ x^2-2 & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$ *(2 puntos)*

- Intervalo $(-\infty, 1)$: f coincide con la función $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$, que es continua en todo R salvo en $x=-2$, único punto que no pertenece a su dominio. Como -2 está en el intervalo, que es donde coincide f con esta función, la discontinuidad lo es también de f. De modo que f es continua en todo el intervalo excluyendo $x=-2$. Veamos de qué tipo es la discontinuidad.
  1) $\nexists f(-2)$ (-2 no está en el dominio).
  2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}x-2=-4$

  Por tanto, es una discontinuidad evitable la que presenta en $x=-2$.
- Intervalo $(1, +\infty)$: f coincide con $y=x^2-2$, que es continua siempre, al ser polinómica. Por tanto, f es continua en todo el intervalo.
- $x=1$:
  1) $\exists f(1)=1^2-2=-1$
  2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\dfrac{-3}{3}=-1;\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-2)=1^2-2=-1$

     Por tanto, $\exists \lim\limits_{x\to 1} f(x)=-1$
  3) Ambos resultados coinciden

  Por tanto, la función f es continua en $x=1$.

En resumen f es continua en $R-\{-2\}$ con una discontinuidad evitable en $x=-2$.

2) Hallar: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-2}{3-\sqrt{5x-1}}$ *(1 punto)*

Como presenta una indeterminación del tipo 0/0, y en el denominador tenemos una diferencia en la que interviene una raíz, multiplicamos y dividimos por el conjugado de dicha diferencia:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{5x-1}}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{3-\sqrt{5x-1}}\cdot\frac{3+\sqrt{5x-1}}{3+\sqrt{5x-1}}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(3+\sqrt{5x-1})}{3^2-\left(\sqrt{5x-1}\right)^2}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(3+\sqrt{5x-1})}{9-(5x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(3+\sqrt{5x-1})}{9-5x+1}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)(3+\sqrt{5x-1})}{10-5x}=$$

Como se sigue presentando la misma indeterminación, pero ya tenemos polinomios en el numerador y en el denominador, los descomponemos:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & -1 & -2 \\ 2 & & 2 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array}\qquad\qquad \begin{array}{c|cc} & -5 & 10 \\ 2 & & -10 \\ \hline & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

Y con ello:

$$= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+1)(3+\sqrt{5x-1})}{-5(x-2)} = \lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(3+\sqrt{5x-1})}{-5} = \frac{3\cdot(3+3)}{-5} = \boxed{-\frac{18}{5}}$$

3) Derivar y simplificar: $y=\operatorname{arctg} 3x^2$; $y=\frac{x^2e^{1-x}}{3}$; $y=\ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}}$; $y=2\cos^2 4x$ *(2 ptos)*

- $y=\operatorname{arctg} 3x^2 \Rightarrow y'=\frac{6x}{1+(3x^2)^2} = \boxed{\frac{6x}{1+9x^4}}$
- $y=\frac{x^2e^{1-x}}{3} = \frac{1}{3}x^2e^{1-x} \Rightarrow y'=\frac{1}{3}(2xe^{1-x}+x^2(-1)e^{1-x}) = \boxed{\frac{xe^{1-x}(2-x)}{3}}$
- $y=\ln\sqrt[3]{\frac{(x-2)^2}{x-3}} = \frac{1}{3}\ln\frac{(x-2)^2}{x-3} = \frac{1}{3}\left[\ln(x-2)^2-\ln(x-3)\right] =$

  $= \frac{1}{3}\left[2\ln(x-2)-\ln(x-3)\right] \Rightarrow y'=\frac{1}{3}\left(2\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right) = \boxed{\frac{2}{3(x-2)}-\frac{1}{3(x-3)}}$
- $y=2\cos^2 4x \Rightarrow y'=2\cdot 2\,(\cos 4x)\,(-\operatorname{sen} 4x)\,4 = \boxed{-16\operatorname{sen} 4x\cos 4x} =$

  $= -8\cdot 2\operatorname{sen} 4x\cos 4x = -8\operatorname{sen}(2\cdot 4x) = \boxed{-8\operatorname{sen} 8x}$

4) Estudiar y dibujar la gráfica de $y=\frac{x^2+2x}{x+1}$, comprobando previamente que sus derivadas son: $y'=\frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$; $y''=-\frac{2}{(x+1)^3}$

Derivadas:	*1 punto*
Dominio, Par/Impar, Int. Ejes:	*0,5 puntos*
Asíntotas:	*1 punto*
Monotonía/Extr.relativos:	*1 punto*
Curvatura/P.Inflexión:	*0,5 puntos*
Gráfica (tras estudio anterior):	*1 punto*

Comencemos derivando:

$$y'=\frac{(2x+2)(x+1)-(x^2+2x)\cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2+2x+2x+2-x^2-2x}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+2}{(x+1)^2}$$

$$y''=\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x+2)2(x+1)1}{[(x+1)^2]^2} = \frac{(x+1)[(2x+2)(x+1)-(x^2+2x+2)2]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2x^2+2x+2x+2-2x^2-4x-4}{(x+1)^3} = -\frac{2}{(x+1)^3}$$

a) Dominio: R – { –1 } (se anula el denominador)

b) Par / Impar: $f(-x)=\frac{(-x)^2+2(-x)}{-x+1} = \frac{x^2-2x}{-x+1} \Rightarrow$ Ni par ni impar.

c) Intersecciones con los ejes: $x=0 \Rightarrow y=0$: (0, 0).

$y=0 \Rightarrow 0=\frac{x^2+2x}{x+1} \Rightarrow 0=x^2+2x \Rightarrow 0=x(x+2) \Rightarrow x=0$ ó $x=-2$.

Por tanto, corta en (0, 0) y en (–2, 0).

d) Asíntotas:

1) AH: $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x+1}=\infty \Rightarrow$ No tiene.

2) AV: Tenemos discontinuidad en $x=-1 \Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{x^2+2x}{x+1}=\left(\frac{-1}{0}\right)=\infty$. Por tanto, la recta $x=-1$ es A.V.

3) A.O.:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+2x}{x+1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x(x+1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x+1} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x(x+1)}{x+1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-x^2-x}{x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

Luego la recta $y = x + 1$ es A.O.

e) Monotonía:

- Discontinuidades de f: $x = -1$.
- Discontinuidades de f': $x = -1$.
- $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2+2x+2}{(x+1)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 2x + 2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$ que no tiene solución.

Como -1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f'	$+$	$\nexists$	$+$
f	↗	$\nexists$	↗

No tiene extremos relativos.

f) Curvatura:

- Discontinuidades de f y f': $x = -1$.
- Discontinuidades de f'': $x = -1$.
- $f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; -\dfrac{2}{(x+1)^3} = 0 \;\Rightarrow\; -2 = 0 \;\Rightarrow\;$ No es posible.

Como -1 es el único punto obtenido, tenemos:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, +\infty)$
f''	$+$	$\nexists$	$-$
f	$\cup$ (convexa)	$\nexists$	$\cap$ (cóncava)

g) Gráfica: Las asíntotas se han dibujado de color verde. Combinando todos los resultados anteriores, se obtiene: