



Instrucciones:

- Duración: 1 hora y 30 minutos.
- Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados.
- Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno.
- Cada ejercicio tiene un valor máximo de 2,5 puntos.
- Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar.
- Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.
- En la puntuación máxima de cada ejercicio están contemplados 0,25 puntos para valorar la expresión correcta de los procesos y métodos utilizados.

BLOQUE A. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 1. (2,5 puntos)

Sea la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(x)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

- [1,5 puntos]** Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B .
- [1 punto]** Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A .

EJERCICIO 2. (2,5 puntos)

Considera la función continua f definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x \cos(x) - a \operatorname{sen}(x)}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ b \cos(x) - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcula a y b .

BLOQUE B. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 3. (2,5 puntos)

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1$, $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0, 1)$.

EJERCICIO 4. (2,5 puntos)

Halla la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $(0, \frac{\pi}{2})$ y $(\pi, 2\pi)$.



BLOQUE C. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 5. (2,5 puntos)

Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/8 & 1/8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

- a) [1 punto] Calcula A^{2024} .
- b) [1,5 puntos] Halla la matriz X , si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

EJERCICIO 6. (2,5 puntos)

Considera el sistema

$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$$

- a) [1,75 puntos] Discute el sistema según los valores de k .
- b) [0,75 puntos] Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

BLOQUE D. Resuelve sólo uno de los siguientes ejercicios:

EJERCICIO 7. (2,5 puntos)

- a) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $P(2, 2, 1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$
- b) [1,25 puntos] Halla el punto simétrico de $Q(1, -1, -3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

EJERCICIO 8. (2,5 puntos)

Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

- a) [1 punto] Estudia la posición relativa de r y s .
- b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidista de ambas rectas.