

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 3
- Junio, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 3
Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 2, Ejercicio 3
Reserva 2, Ejercicio 4
- Reserva 3, Ejercicio 3
Reserva 3, Ejercicio 4
- Reserva 4, Ejercicio 3
Reserva 4, Ejercicio 4
- Julio, Ejercicio 3
Julio, Ejercicio 4
- Modelo, Ejercicio 6

Considera la función f definida por $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$, para $x \neq -1, x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{r} x^3 + 2 \\ -x^3 + x \\ \hline x + 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} | \\ x^2 - 1 \\ \hline x \end{array}$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx = \int x dx + \int \frac{x+2}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{x+2}{x^2 - 1} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1; x = -1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 1 \Rightarrow 3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$$

$$x = -1 \Rightarrow 1 = -2B \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:
$$\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1} dx = \frac{x^2}{2} + \int \frac{\frac{3}{2}}{x-1} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

Calculamos la primitiva que pasa por $(0,1)$

$$F(0) = 1 \Rightarrow \frac{0^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|0-1| - \frac{1}{2} \ln|0+1| + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + 1$

Halla la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f''(x) = x \cos(x)$ y cuya gráfica pasa por los puntos $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$.

MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x) = \int x \cos x \, dx$, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \cos x \, dx; \quad v = \text{sen } x \end{aligned}$$

$$f'(x) = \int x \cos x \, dx = x \cdot \text{sen } x - \int \text{sen } x \, dx = x \cdot \text{sen } x + \cos x + C$$

Calculamos

$$f(x) = \int x \cdot \text{sen } x + \cos x + C \, dx = \int x \cdot \text{sen } x \, dx + \int \cos x \, dx + \int C \, dx = \int x \cdot \text{sen } x \, dx + \text{sen } x + Cx + D$$

Calculamos por partes $\int x \cdot \text{sen } x \, dx$

$$\begin{aligned} u &= x; \quad du = dx \\ dv &= \text{sen } x \, dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\int x \cdot \text{sen } x \, dx = -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cdot \cos x + \text{sen } x$$

Luego: $f(x) = -x \cdot \cos x + \text{sen } x + \text{sen } x + Cx + D = -x \cdot \cos x + 2\text{sen } x + Cx + D$

Como nos piden una primitiva que pase por $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $(\pi, 2\pi)$, sustituyendo podemos calcular el valor de C y D

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow -0 \cdot \cos 0 + 2\text{sen } 0 + C \cdot 0 + D = \frac{\pi}{2} \Rightarrow D = \frac{\pi}{2}$$

$$f(\pi) = 2\pi \Rightarrow -\pi \cdot \cos \pi + 2\text{sen } \pi + C \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow \pi + C \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $f(x) = -x \cdot \cos x + 2\text{sen } x + \frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$

Halla la función $f : (2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$ y verifica

$$f'(x) = \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} \text{ donde } \ln \text{ denota la función logaritmo neperiano.}$$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} dx = \int 3 dx + \int \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = 3x + \int \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 ; x = -2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{4x + 24}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{x^2 - 4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x = 2 \Rightarrow 32 = 4A \Rightarrow A = 8$$

$$x = -2 \Rightarrow 16 = -4B \Rightarrow B = -4$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{3x^2 + 4x + 12}{x^2 - 4} dx = 3x + \int \frac{4x + 24}{x^2 - 4} dx = 3x + \int \frac{8}{x - 2} dx - \int \frac{4}{x + 2} dx = \\ &= 3x + 8\ln|x - 2| - 4\ln|x + 2| + C \end{aligned}$$

Calculamos la función que pasa por el punto $(3, -4\ln 5)$

$$f(x) = 3x + 8\ln|x - 2| - 4\ln|x + 2| + C \Rightarrow -4\ln 5 = 9 + 8\ln|3 - 2| - 4\ln|3 + 2| + C \Rightarrow C = -9$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x) = 3x + 8\ln|x - 2| - 4\ln|x + 2| - 9$

Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x$. Halla una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $(0,5)$.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral, que es una integral por partes.

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 3x + 5; \quad du = (2x - 3) \, dx \\ dv &= e^x \, dx; \quad v = e^x \end{aligned}$$

$$\int (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x \, dx = (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x - \int (2x - 3) \cdot e^x \, dx$$

La volvemos a hacer por partes

$$\begin{aligned} u &= 2x - 3; \quad du = 2 \, dx \\ dv &= e^x \, dx; \quad v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x \, dx &= (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x - \int (2x - 3) \cdot e^x \, dx = (x^2 - 3x + 5) \cdot e^x - (2x - 3) \cdot e^x + 2e^x + C = \\ &= (x^2 - 5x + 10) \cdot e^x + C \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(0,5)$.

$$F(x) = (x^2 - 5x + 10) \cdot e^x + C \Rightarrow F(0) = 5 \Rightarrow 10 + C = 5 \Rightarrow C = -5$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = (x^2 - 5x + 10) \cdot e^x - 5$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^x \cos(t) \cdot \operatorname{sen}^2(t) dt$.

Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{4}$.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $f(x) = \int_0^x \cos(t) \cdot \operatorname{sen}^2(t) dt = \left[\frac{\operatorname{sen}^3(t)}{3} \right]_0^x = \frac{\operatorname{sen}^3(x)}{3}$

Calculamos la derivada: $f'(x) = \cos(x) \cdot \operatorname{sen}^2(x)$

La ecuación de la recta tangente es: $y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Calculamos:

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{sen}^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3} = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{12}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Luego, sustituyendo, tenemos que: $y - \frac{\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

La ecuación de la normal es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = -\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4}} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{2}}{12} = -2\sqrt{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Calcula $\int \frac{dx}{\sqrt{4+4e^x}}$ (Sugerencia efectúa el cambio de variable $t = \sqrt{1+e^x}$)

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t = \sqrt{1+e^x}$, vamos a calcular cuánto vale dx :

$$dt = \frac{e^x}{2 \cdot \sqrt{1+e^x}} dx \Rightarrow dx = \frac{2 \cdot \sqrt{1+e^x}}{e^x} dt = \frac{2 \cdot t}{t^2-1} dt$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{2t dt}{2\sqrt{1+e^x}} = \int \frac{2t dt}{t^2-1} = \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{t^2-1}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t = 1 \Rightarrow 1 = 2B \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$t = -1 \Rightarrow 1 = -2A \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{(t^2-1)} = \int \frac{Adt}{t+1} + \int \frac{Bdt}{t-1} = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + C$$

Des hacemos el cambio de variable:

$$\int \frac{dx}{(t^2-1)} = -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{2} \ln|t-1| + C = -\frac{1}{2} \ln|\sqrt{1+e^x}+1| + \frac{1}{2} \ln|\sqrt{1+e^x}-1| + C$$

Considera la función $f(x) = \begin{cases} 1 - e^x & \text{si } x \leq 0 \\ x \cos(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$. Calcula $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

Calculamos primero la integral por partes

$$\int x \cdot \cos x dx = x \cdot \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx = x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x$$

$$u = x; du = dx$$

$$dv = \cos x dx; v = \operatorname{sen} x$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx &= \int_{-\pi}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^{\pi} x \cos(x) dx = \left[x - e^x \right]_{-\pi}^0 + \left[x \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \right]_0^{\pi} = \\ &= (0 - e^0) - (-\pi - e^{-\pi}) + (\pi \cdot \operatorname{sen} \pi + \cos \pi) - (0 \cdot \operatorname{sen} 0 + \cos 0) = -1 + \pi + e^{-\pi} - 1 - 1 = -3 + \pi + e^{-\pi} \end{aligned}$$

Calcula una primitiva de la función $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2}$

cuya gráfica pase por el punto $\left(5, -\frac{7}{2}\right)$, donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(Sugerencia: efectúa el cambio de variable $x-1=t^2$)

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

$$x-1=t^2 \Rightarrow dx=2t dt$$

$$\int (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} dx = \int t^4 \ln \frac{t}{2} 2t dt = 2 \int t^5 \ln \frac{t}{2} dt = 2 \int t^5 (\ln t - \ln 2) dt = 2 \int t^5 \ln t dt - 2 \int t^5 \ln 2 dt$$

Hacemos por parte la primera integral

$$\int t^5 \cdot \ln t dt = \frac{t^6 \cdot \ln t}{6} - \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{t^6 \cdot \ln t}{6} - \frac{1}{6} \frac{t^6}{6} = \frac{t^6 \cdot \ln t}{6} - \frac{t^6}{36}$$

$u = \ln t; du = \frac{1}{t} dt$ $dv = t^5 dt; v = \frac{t^6}{6}$

$$\begin{aligned} \int (x-1)^2 \ln \frac{\sqrt{x-1}}{2} dx &= 2 \int t^5 \ln t dt - 2 \int t^5 \ln 2 dt = 2 \left(\frac{t^6 \ln t}{6} - \frac{t^6}{36} \right) - 2 \ln 2 \frac{t^6}{6} = \frac{t^6 \ln t}{3} - \frac{t^6}{18} - \ln 2 \frac{t^6}{3} = \\ &= \frac{(x-1)^3 \ln \sqrt{x-1}}{3} - \frac{(x-1)^3}{18} - \ln 2 \frac{(x-1)^3}{3} + C \end{aligned}$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $\left(5, -\frac{7}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} -\frac{7}{2} &= \frac{(5-1)^3 \ln \sqrt{5-1}}{3} - \frac{(5-1)^3}{18} - \ln 2 \frac{(5-1)^3}{3} + C \Rightarrow -\frac{7}{2} = \frac{64 \ln 2}{3} - \frac{64}{18} - \ln 2 \frac{64}{3} + C \Rightarrow \\ \Rightarrow C &= -\frac{7}{2} - \frac{64 \ln 2}{3} + \frac{64}{18} + \ln 2 \frac{64}{3} \Rightarrow C = -\frac{7}{2} + \frac{64}{18} = \frac{1}{18} \end{aligned}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = \frac{(x-1)^3 \ln \sqrt{x-1}}{3} - \frac{(x-1)^3}{18} - \ln 2 \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{1}{18}$

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.

a) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con los ejes de coordenadas y esboza dicha gráfica.

b) Calcula la suma de las áreas de los recintos acotados y limitados por la gráfica de f y el eje de abscisas

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 3

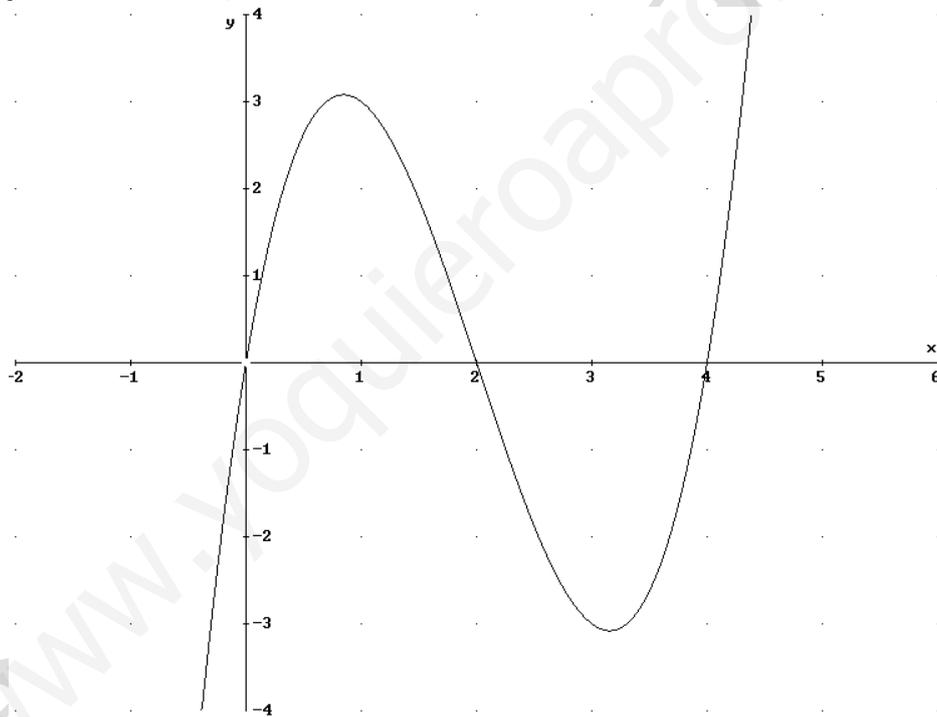
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos lo punto de corte con los ejes

Corte con el eje X

$$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow x = 0 ; x = 4 ; x = 2 \Rightarrow (0,0) ; (4,0) \text{ y } (2,0)$$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (0,0)$



El área de la región pedida es:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^2 (x^3 - 6x^2 + 8x) dx + \int_2^4 -(x^3 - 6x^2 + 8x) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} \right]_0^2 + \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2} \right]_2^4 = \\
 &= \left(\frac{2^4}{4} - \frac{6 \cdot 2^3}{3} + \frac{8 \cdot 2^2}{2} \right) - (0) + \left(-\frac{4^4}{4} + \frac{6 \cdot 4^3}{3} - \frac{8 \cdot 4^2}{2} \right) - \left(-\frac{2^4}{4} + \frac{6 \cdot 2^3}{3} - \frac{8 \cdot 2^2}{2} \right) = 4 + 0 + 0 - (-4) = 8 \text{ u}^2
 \end{aligned}$$

Calcula $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx$. (Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t = e^x$)

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

$$e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$$

$$\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-3} dx = \int \frac{t^3-1}{(t-3)} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{t^3-1}{t^2-3t} dt$$

Dividimos los dos polinomios

$$\begin{array}{r} t^3-1 \\ -t^3+3t^2 \\ \hline 3t^2-1 \\ -3t^2+9t \\ \hline 9t-1 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} t^2-3t \\ \hline t+3 \end{array} \right.$$

Con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{t^3-1}{t^2-3t} dt = \int (t+3) dt + \int \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{9t-1}{t^2-3t} dt$$

Calculamos las raíces del denominador: $t^2-3t=0 \Rightarrow t=0$; $t=3$

Descomponemos en fracciones simples: $\frac{9t-1}{t^2-3t} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-3} = \frac{A(t-3)+B \cdot t}{t \cdot (t-3)}$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A , B y C sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=0 \Rightarrow -1 = -3A \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

$$t=3 \Rightarrow 26 = 3B \Rightarrow B = \frac{26}{3}$$

Con lo cual:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^3-1}{t^2-3t} dt &= \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{9t-1}{t^2-3t} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{26}{t-3} dt = \frac{t^2}{2} + 3t + \frac{1}{3} \ln|t| + \frac{26}{3} \ln|t-3| = \\ &= \frac{e^{2x}}{2} + 3e^x + \frac{1}{3} \ln|e^x| + \frac{26}{3} \ln|e^x-3| + C \end{aligned}$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) Halla los puntos de intersección de f y g . Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

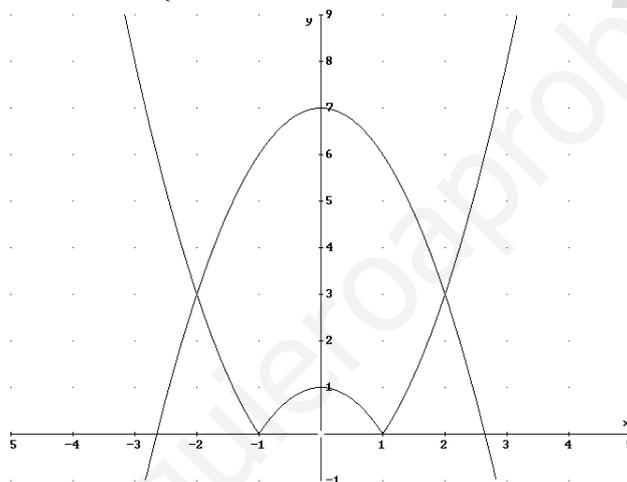
b) Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 3

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = -x^2 + 7$ que es una parábola, haciendo una tabla de valores.

Abrimos la función $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = x^2 - 1 \\ f(x) = -x^2 + 7 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, los puntos de corte son el $(-2, 3)$ y $(2, 3)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 [(-x^2 + 7) - (-x^2 + 1)] dx + 2 \int_1^2 [(-x^2 + 7) - (x^2 - 1)] dx = \\ &= 2 \int_0^1 6 dx + 2 \int_1^2 (-2x^2 + 8) dx = 2[6x]_0^1 + 2 \left[-\frac{2x^3}{3} + 8x \right]_1^2 = 2(6 - 0) + 2 \left(-\frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8 \right) = \\ &= 12 + \frac{20}{3} = \frac{56}{3} \text{ u}^2 \end{aligned}$$

Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x) dx$

MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $\int e^x \cdot \cos(x) dx$, que es una integral por partes cíclica

$$\begin{aligned} \int e^x \cdot \cos x dx &= e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cdot \operatorname{sen} x dx = \\ &= e^x \operatorname{sen} x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \right] = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \end{aligned}$$

$$2 \int e^x \cdot \cos x dx = e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x \Rightarrow \int e^x \cdot \cos x dx = \frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} + C$$

$$\begin{aligned} u &= e^x; \quad du = e^x dx \\ dv &= \cos x dx; \quad v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= e^x; \quad du = e^x dx \\ dv &= \operatorname{sen} x dx; \quad v = -\cos x \end{aligned}$$

Calculamos la integral que nos piden:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos(x) dx &= \left[\frac{e^x \operatorname{sen} x + e^x \cos x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} + e^{\frac{\pi}{2}} \cos \frac{\pi}{2}}{2} \right) - \left(\frac{e^0 \operatorname{sen} 0 + e^0 \cos 0}{2} \right) = \\ &= \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}} - 1}{2} \end{aligned}$$

Sabiendo que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = e^{x^2}$ es una primitiva de f

a) Comprueba que f es creciente.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función f , el eje de abscisas y la recta $x = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de f , entonces $f(x) = F'(x) = 2x \cdot e^{x^2}$

Calculamos la derivada y la igualamos a cero

$$f'(x) = 2 \cdot e^{x^2} + 2x \cdot 2x \cdot e^{x^2} = (2 + 4x^2) \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2 + 4x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{No tiene solución}$$

Luego, la función será siempre creciente o decreciente. Sustituimos un valor en la derivada para saber si es creciente o decreciente

$$f'(0) = (2 + 4 \cdot 0^2) \cdot e^{0^2} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Creciente}$$

b) Calculamos los puntos de corte con el eje de abscisas

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = 2x \cdot e^{x^2} \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x \cdot e^{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Calculamos el área

$$A = \int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx = \left[e^{x^2} \right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \text{ u}^2$$