EMESTRADA
EXÁMENES DE
SELECTIVIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2024

MATEMÁTICAS II

TEMA 2: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Junio, Ejercicio 6
- Reserva 1, Ejercicio 6
- Reserva 2, Ejercicio 5
- Reserva 3, Ejercicio 6
- Reserva 4, Ejercicio 6
- Julio, Ejercicio 6
- Modelo, Ejercicio 5

Considera el sistema $\left\{\begin{array}{r} y+z=1 \\ (k-1)x+\quad y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{array}\right.$

a) Discute el sistema según los valores de *k*.
b) Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$?. En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.
MATEMÁTICAS II. 2024. JUNIO. EJERCICIO 6

RESOLUCIÓN

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix}=1+(k-1)^2-1-(k-1)=k^2-3k+2=0 \Rightarrow k=1\,;\ k=2$$

Calculamos los rangos de la matriz de los coeficientes y de la matriz ampliada del sistema y hacemos la discusión:

Para $k=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$$

Para $k=2 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3 \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2+1-1=2\neq 0$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$k=1$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$k=2$	2	3	S. Incompatible
$k\neq 1$ y 2	3	3	S. Compatible Determinado

b) $k=1 \Rightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x\qquad +z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array}\right.$$

Si $y=0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow x=-1\,;\ y=0\,;\ z=1$

Determina un número natural de tres cifras sabiendo que la suma de sus dígitos es 9, que la diferencia de dicho número con el que se obtiene al intercambiar la cifra de las centenas por las de las unidades es 198, y que si consideramos la suma entre ambos números, es decir, entre el número a determinar y el que se obtiene al intercambiar sus cifras, el resultado es 828.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 1. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

Llamamos al número $x\,y\,z = 100x + 10y + z$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ (100x+10y+z)-(100z+10y+x)=198 \\ (100x+10y+z)+(100z+10y+x)=828 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ 99x-99z=198 \\ 101x+20y+101z=828 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=9 \\ x-z=2 \\ 101x+20y+101z=828 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2+z \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2+z+y+z=9 \\ 101(2+z)+20y+101z=828 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+2z=7 \\ 20y+202z=626 \end{array}\right\} \Rightarrow 20(7-2z)+202z=626 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 140-40z+202z=626 \Rightarrow 162z=486 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} z=\dfrac{486}{162}=3 \\ y=7-2z=1 \\ x=2+z=5 \end{array}\right.$$

Luego, el número es 513

Considera el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{l} ax+\quad y+\quad z=1+a \\ x+\quad 2y-\quad z=1-a \\ x+(1+a)y-az=\quad 0 \end{array}\right.$

a) Calcula *a* para que el sistema sea compatible indeterminado.
b) Resuelve el sistema, si es posible, para $a=0$.
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 2. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+a & -a \end{vmatrix} = -2a^2-1+1+a-2+a+a+a^2 = -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=2\ ;\ a=1$$

Calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y de la ampliada y hacemos la discusión del sistema.

Para $a=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$; Para $a=2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 8 \neq 0 \Rightarrow R(M)=3$

Para $a=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow R(A)=2$; Para $a=1 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow R(M)=2$

	R(A)	R(M)	
$a=2$	2	3	Sistema incompatible
$a=1$	2	2	Sistema compatible indeterminado
$a\neq 2$ y 1	3	3	Sistema compatible determinado

Luego, para $a=1$ el sistema es compatible indeterminado

b) Resolvemos el sistema para $a=0$, el sistema que tenemos que resolver es:

$$\left.\begin{array}{r} y+z=1 \\ x+2y-z=1 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+3y=2 \\ x+y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ 2y=2 \Rightarrow y=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y=\quad 1 \\ z=\quad 0 \end{array}\right.\right.$$

EMESTRADA
EXÁMENES DE SELECTIVIDAD

Considera el sistema $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

a) Determina los valores de *m* para los que el sistema es compatible indeterminado.
b) Para $m = 2$ resuelve el sistema, si es posible
MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 3. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos el sistema que nos dan

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5x-2y-3z \\ 2x-2z \\ 3x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mx \\ my \\ mz \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (5-m)x-2y-3z=0 \\ 2x-my-2z=0 \\ 3x-2y+(-1-m)z=0 \end{array}\right\}$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes y lo igualamos a cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 5-m & -2 & -3 \\ 2 & -m & -2 \\ 3 & -2 & -1-m \end{vmatrix} = -m^3+4m^2-4m=0 \Rightarrow m=0 \ ; \ m=2$$

Para $m=0$ y $m=2$ el rango de la matriz de los coeficientes es 2 y el sistema es compatible indeterminado.

b) Si $m=2$, entonces el sistema es:

$$\left.\begin{array}{r} 3x-2y-3z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \\ 3x-2y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x-2y-3z=0 \\ 2x-2y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=0 \\ z=t \end{array}\right.$$

Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & a\\ 5 & 3a-1 & 0\end{pmatrix}$.

a) Calcula el rango de A **según los valores de** a.

b) Si $B=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ **y** $a=2$ **resuelve, si es posible, el sistema** $AX=B$.

MATEMÁTICAS II. 2024. RESERVA 4. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de la matriz A

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & a\\ 5 & 3a-1 & 0\end{vmatrix}=6a-2-3a^2+a=-3a^2+7a-2=0\Rightarrow a=2\ ;\ \ a=\frac{1}{3}$$

Calculamos el rango de la matriz A.

Para $a=2\Rightarrow\begin{vmatrix}2 & 0\\ 5 & 5\end{vmatrix}=10\neq 0\Rightarrow R(A)=2$

Para $a=\frac{1}{3}\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=-\frac{4}{3}\neq 0\Rightarrow R(A)=2$

Para $a\neq 2\ \ y\ \ \frac{1}{3}\Rightarrow R(A)=3$

b) Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 5 & 5 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+z=1\\ 2x+2z=2\\ 5x+5y=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+z=1\\ 5x+5y=4\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x=1-t\\ y=\dfrac{-1+5t}{5}\\ z=t\end{array}\right.$$

Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1250 euros.
a) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?.
b) Si añadimos que el precio de un perfume de tipo C es $\frac{2}{5}$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?.
MATEMÁTICAS II. 2024. JULIO. EJERCICIO 6

R E S O L U C I Ó N

a) Leyendo el enunciado del problema podemos plantear un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 20A+30B+15C=2200 \\ 15A+10B+10C=1250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4A+6B+3C=440 \\ 3A+2B+2C=250 \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 4A+6B+3C=440 \\ 3A+2B+2C=250 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4A+6B+3C=440 \\ -9A-6B-6C=-750 \end{array}\right\} \Rightarrow -5A-3C=-310 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} A=\dfrac{310-3C}{5} \\ B=\dfrac{320-C}{10} \\ C=C \end{array}\right.$$

Calculamos lo que nos piden:

$$25A+10B+16C=25\cdot\left(\frac{310-3C}{5}\right)+10\cdot\left(\frac{320-C}{10}\right)+16C=1550-15C+320-C+16C=1870\ €$$

b) Si $C=\frac{2}{5}A$, entonces el precio de cada perfume será:

$$A=\frac{310-3C}{5} \Rightarrow 5A=310-3\cdot\frac{2}{5}A \Rightarrow \frac{31}{5}A=310 \Rightarrow A=50\ €$$

$$B=\frac{320-C}{10} \Rightarrow B=\frac{320-\frac{2}{5}A}{10} \Rightarrow 10B=320-\frac{2}{5}\cdot 50 \Rightarrow 10B=300 \Rightarrow B=30\ €$$

$$C=\frac{2}{5}A=\frac{2}{5}\cdot 50=20\ €$$

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$, se define la matriz $M=A+(\lambda-1)B$.

a) Halla los valores de λ para los que la matriz M tiene rango menor que 3.
b) Para $\lambda=-1$, resuelve el sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es M.
MATEMÁTICAS II. 2024. MODELO. EJERCICIO 5

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz M

$$M=A+(\lambda-1)B=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+(\lambda-1)\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&\lambda-1\\0&\lambda-1&0\\\lambda-1&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&\lambda-1\\1&\lambda-1&1\\\lambda-1&1&1\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante y lo igualamos a cero.

$$|M|=\begin{vmatrix}1&1&\lambda-1\\1&\lambda-1&1\\\lambda-1&1&1\end{vmatrix}=-\lambda^3+3\lambda^2-4=0\Rightarrow\lambda=-1\,;\,\lambda=2$$

Si $\lambda=-1$ y $\lambda=2\Rightarrow|M|=0\Rightarrow Rango\, M<3$

b) Para $\lambda=-1$ la matriz M es: $M=\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$

Luego, el sistema es: $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=0\\x-2y+z=0\\-2x+y+z=0\end{array}\right\}$

Resolvemos el sistema

$$\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\1&-2&1&0\\-2&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2-F_1}\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{F_3+F_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&0\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y-2z=0\\-3y+3z=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=y=z$$