1.- Un objeto luminoso, de 3 cm de altura, está situado a 20 cm de una lente divergente de potencia −10 dioptrías. Determina:

a) La distancia focal de la lente.

b) La posición de la imagen.

c) La naturaleza y el tamaño de la imagen.

d) La construcción geométrica de la imagen.

a) La distancia focal es la inversa de la potencia de la lente. Por tanto:

$$P = \frac{1}{f'} \rightarrow f' = \frac{1}{P} = \frac{1}{-10} = -0{,}1 \text{ m}$$

b) La posición de la imagen se calcula a partir de la ecuación fundamental de las lentes delgadas:

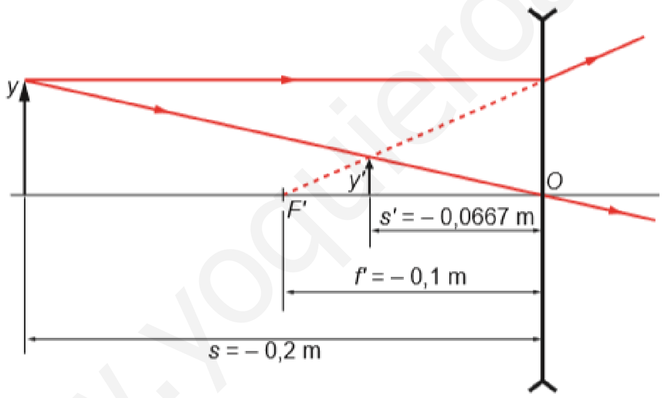
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \rightarrow s' = \frac{1}{\frac{1}{f'} + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{-0{,}1} + \frac{1}{-0{,}2}} = -0{,}0667 \text{ m}$$

La imagen es, por tanto, derecha y de menor tamaño que el objeto.

c) El tamaño de la imagen es:

$$\beta = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \rightarrow y' = \frac{s' \cdot y}{s} = \frac{-0{,}0667 \cdot 3 \cdot 10^{-2}}{-0{,}2} = 0{,}01 \text{ m} = 1 \text{ cm}$$

d) La imagen es, además, virtual, como se muestra en la siguiente figura:



2.- Un objeto está situado 1 cm a la izquierda de una lente convergente de 2 cm de distancia focal.
a) Determine la posición de la imagen y el aumento lateral.
b) Realice el diagrama de rayos correspondientes.

a) Utilizando el convenio de signos DIN 1335, s=-1 cm, f'=2 cm positivo al ser convergente. Si la distancia focal es mayor que la posición de la imagen con una imagen convergente se obtiene una imagen virtual, sabemos s' es negativo.

Usamos la ecuación de lentes delgadas y manejamos distancias en metros

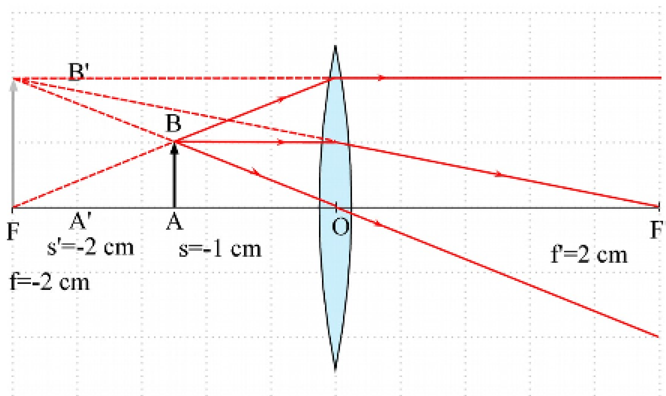
$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'}$$

$$s' = \frac{1}{\frac{1}{f}' + \frac{1}{s}} = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{-1}} = -2cm$$

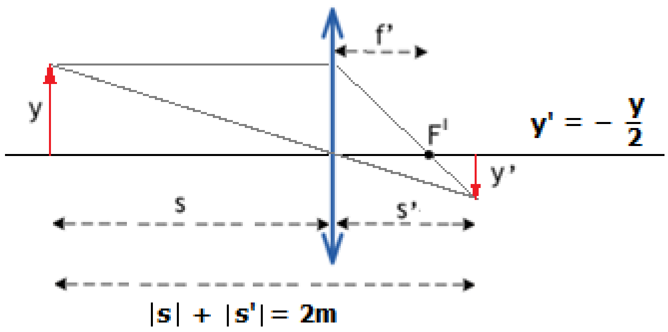
Calculamos el aumento lateral

$$A = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} = \frac{-2}{1} = -2$$

b) Realizamos el trazado de rayos



3.- Un objeto luminoso está situado 2 m delante de una pantalla. Mediante una lente situada entre el objeto y la pantalla pretendemos obtener una imagen en la pantalla que sea real, invertida y de un tamaño dos veces menor que el del objeto. Determina:
a) A qué distancia del objeto y de la pantalla debe colocarse la lente y qué tipo de lente es (convergente o divergente)
b) La distancia focal y la potencia de la lente.
c) Realiza el diagrama de rayos.



a) La imagen ha de ser real puesto que tiene que recogerse sobre una pantalla. Sólo las lentes convergentes producen imágenes reales, por lo que la lente es convergente.

Sabemos que y tiene que tener valor positivo. Si la imagen aparece invertida, significa que y' es negativo. Por otro lado el tamaño de y' debe ser dos veces menor que el objeto y, por lo que se cumple que:

$$y' = -\frac{y}{2}$$

Utilizando la fórmula del aumento lateral:

$$M_L = \frac{y'}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow \frac{-y/2}{y} = \frac{s'}{s} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \frac{s'}{s} \Rightarrow s' = -\frac{s}{2}$$

En la figura observamos que:

$$|s| + |s'| = 2m$$

Por tanto:

$$|s| + \left|-\frac{s}{2}\right| = 2m \Rightarrow |s| + \left|\frac{s}{2}\right| = 2m \Rightarrow \left|\frac{2s}{2}\right| + \left|\frac{s}{2}\right| = 2m \Rightarrow \left|\frac{3s}{2}\right| = 2m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |3s| = 4m \Rightarrow |s| = \frac{4}{3}m \Rightarrow |s| = 1,33m$$

Como:

$$|s| + |s'| = 2m \Rightarrow |s'| = 2m - |s| \Rightarrow 2m - 1,33m = 0,67m$$

Como por el convenio de signos la distancia s es negativa y la distancia s' es positiva:

$$s = -1,33m$$
$$s' = 0,67m$$

b) Para obtener f' utilizamos la ecuación fundamental de las lentes:

$$\frac{1}{s'} - \frac{1}{s} = \frac{1}{f'} \Rightarrow \frac{1}{0,67m} - \frac{1}{-1,33m} = \frac{1}{f'} \Rightarrow f' = 0,45m$$

La potencia de una lente es:

$$P = \frac{1}{f'}$$

Para expresar la potencia en dioptrías, el valor de f' tiene que estar dado en metros. Por tanto:

$$P = \frac{1}{0,45m} = 2,22\ D$$

4.- Una lente convergente forma de un objeto real una imagen real aumentada dos veces. Al desplazar el objeto 20 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual y con el mismo aumento en valor absoluto. a) Determine la potencia y la distancia focal de la lente. b) Realice el diagrama de rayos correspondiente.

a)

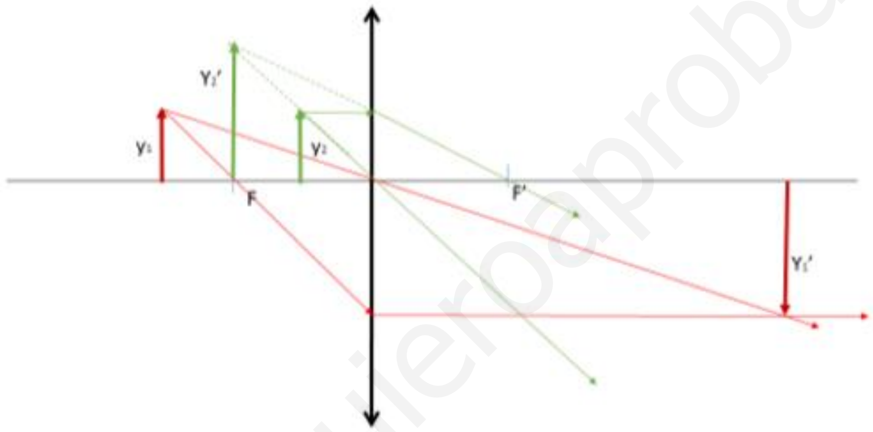
$$m_1 = \frac{s_1'}{s_1} = -2 \;\rightarrow s_1' = -2s_1 \quad \text{(al ser una imagen real es invertida respecto del objeto)}$$

$$m_2 = \frac{s_2'}{s_2} = 2 \;\rightarrow s_2' = 2s_2 \quad \text{(al ser virtual es derecha)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{s_1'} - \dfrac{1}{s_1} = \dfrac{1}{f'} \\ \dfrac{1}{s_2'} - \dfrac{1}{s_2} = \dfrac{1}{f'} \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{1}{2s_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{2s_2} - \frac{1}{s_2} \rightarrow \left.\begin{array}{r} 3s_2 = s_1 \\ \text{al desplazar el objeto hacia la lente } s_2 = s_1 + 20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} s_2 = -10\text{cm} \\ s_1 = -30\text{cm} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} s_2' = -20cm \\ s_1' = 60cm \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\frac{1}{60} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{f'} \rightarrow \text{Distancia focal } f' = 20cm} \qquad \boxed{\text{Potencia } P = \frac{1}{0,20m} = 5 \text{ dioptrías}}$$

b)



5.- Una lente convergente forma, de un objeto real, una imagen también real, invertida y aumentada 4 veces. Al desplazar el objeto 3 cm hacia la lente, la imagen que se obtiene es virtual, derecha y con el mismo aumento en valor absoluto. Determine:

a) La distancia focal imagen y la potencia de la lente.

b) Las distancias del objeto a la lente en los dos casos citados.

c) Las respectivas distancias imagen.

d) Las construcciones geométricas correspondientes.

a) En la posición inicial, s_1, el objeto de tamaño y forma una imagen invertida y cuatro veces mayor: si y_1' es el tamaño de la imagen, entonces nos están diciendo que $y_1' = -4y$ (el signo – es preciso por ser imagen invertida). Apelando a la fórmula para el aumento lateral,

$$\frac{y_1'}{y} = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad -4 = \frac{s_1'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4\,s_1 \qquad (1)$$

tenemos la relación entre las distancias objeto s_1 e imagen s_1': observamos que son de signo contrario, así que, siendo $s_1 < 0$, parece claro que $s_1' > 0$ y, por tanto, la imagen aparece a la derecha de la lente, donde debe ser real.

Si desplazamos el objeto 3 cm hacia la lente, pasa a tener una distancia objeto

$$s_2 = s_1 + 3 \qquad (2)$$

igualdad en la que debe tenerse presente que s_1 y s_2 son cantidades negativas, y que s_2 debe ser menor en valor absoluto, pues el objeto está ahora más cerca de la lente. Como nos dicen que ahora la imagen es derecha y cuatro veces mayor que el objeto, entendemos que deber ser $y_2' = 4y$, donde y_2' es el tamaño de la nueva imagen. De nuevo la fórmula del aumento lateral para comprobar que

$$\frac{y_2'}{y} = \frac{s_2'}{s_1} \quad \Rightarrow \quad 4 = \frac{s_2'}{s_2} \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4s_2 \qquad (3)$$

Vemos que ahora s_2' es negativa, igual que s_2, de modo que la nueva imagen se forma a la izquierda de la lente, donde debe hacerlo con las prolongaciones de los rayos difractados por la lente; por eso la imagen es ahora virtual.

A continuación podemos emplear la ecuación de las lentes delgadas en ambos casos, teniendo en consideración los resultados de (1), (2) y (3):

Para la 1ª imagen

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{-4s_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{4s_1} = \frac{1}{f'} \qquad (4)$$

Para la 2ª imagen

$$\frac{1}{s_2'} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4s_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{3}{4s_2} = -\frac{3}{4(s_1+3)} = \frac{1}{f'} \qquad (5)$$

De estas dos igualdades, ya que el segundo miembro es el mismo, podemos obtener:

$$-\frac{5}{4s_1} = -\frac{3}{4(s_1+3)} \quad \Rightarrow \quad 5(s_1+3) = 3s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1 = -7{,}5 \text{ cm}$$

y, llevando este valor a (4), la distancia focal:

$$-\frac{5}{4s_1} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad -\frac{5}{-30} = \frac{1}{f'} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{f' = 6\ cm}$$

e inmediatamente la potencia de la lente:

$$P = \frac{1}{f'} = \frac{1}{0{,}06 \text{ m}} = \mathbf{+16{,}67\ dioptrías}$$

b) Ya conocemos la primera de las distancias objeto, $s_1 = -7{,}5$ cm

y la otra se obtiene de inmediato de (2): $s_2 = s_1 + 3 = -7{,}5+3 = -4{,}5$ cm

c) Conocidas las distancias objeto, las distancias imagen se obtienen de (1) y de (3):

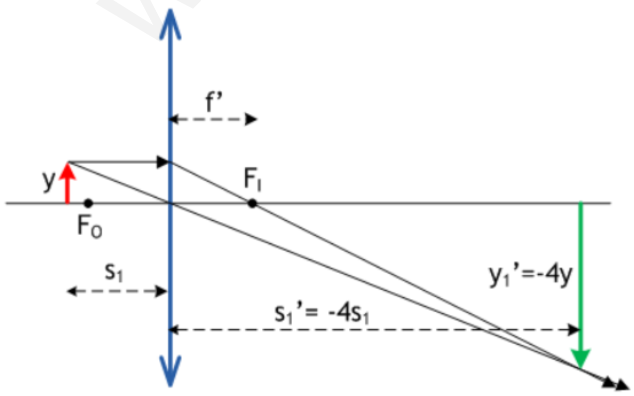
de (1)

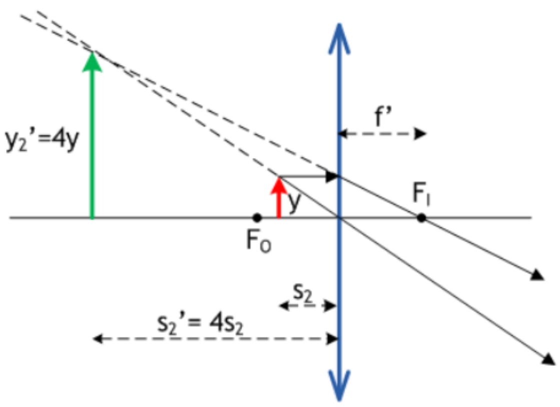
$$s_1' = -4s_1 \quad \Rightarrow \quad s_1' = -4(-7{,}5) = \mathbf{30\ cm}$$

de (3)

$$s_2' = 4s_2 = 4(s_1+3) \quad \Rightarrow \quad s_2' = 4(-4{,}5) = \mathbf{-18\ cm}$$

d) y quedan finalmente las construcciones geométricas correspondientes a ambos casos:





6.- Un sistema está formado por dos lentes convergentes iguales separadas 70 cm, con 20 cm de distancia focal. Un objeto se coloca a 40 cm de la primera lente.

a) Calcula la posición de la imagen que da el sistema. Elabora también el diagrama de rayos e indica las características de la imagen.

b) Determina el aumento lateral total de la imagen.

a) Para calcular la imagen del objeto que da la lente 1 usamos la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{s_1}=\frac{1}{f'_1}\rightarrow\frac{1}{s'_1}-\frac{1}{-40\text{ cm}}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'_1}=\frac{1}{20\text{ cm}}-\frac{1}{40\text{ cm}}\rightarrow s'_1=40\text{ cm}$$

Por tanto, como la distancia entre lentes es de 70 cm, tenemos:

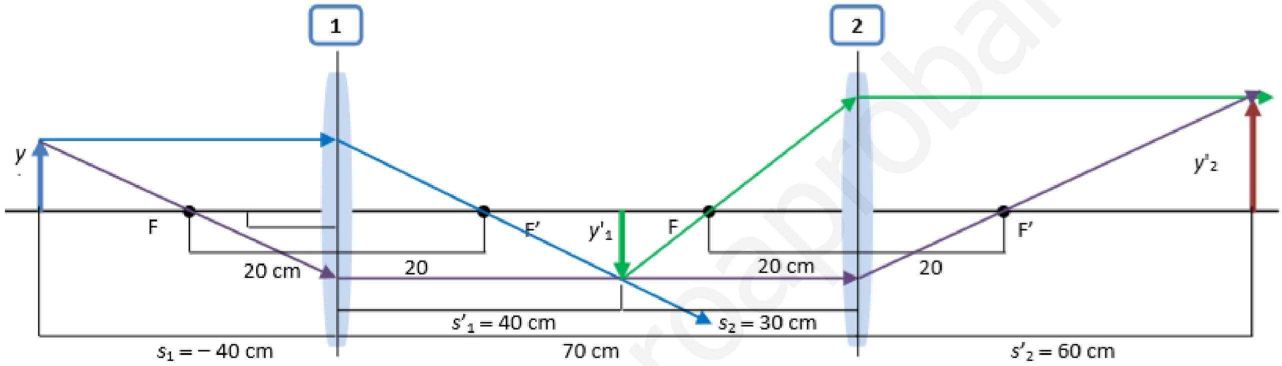
$$|s_2|=70\text{ cm}-s'_1=70\text{ cm}-40\text{ cm}\rightarrow s_2=-30\text{ cm}$$

Y ahora aplicamos de nuevo la ecuación de las lentes delgadas tomando la imagen 1 como objeto 2:

$$\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{s_2}=\frac{1}{f'_2}\rightarrow\frac{1}{s'_2}-\frac{1}{-30\text{ cm}}=\frac{1}{20\text{ cm}}\rightarrow\frac{1}{s'_2}=\frac{1}{20\text{ cm}}-\frac{1}{30\text{ cm}}\rightarrow s'_2=60\text{ cm}$$

Es decir, la imagen se forma 60 cm detrás de la segunda lente.

El trazado de rayos correspondiente sería el siguiente:



La imagen es real, derecha y de mayor tamaño que el objeto.

b) El aumento lateral total se calcula a partir del aumento que da cada lente:

Calculemos ahora el tamaño de las imágenes formadas.

$$\frac{y'_1}{y_1}=\frac{s'_1}{s_1}=\frac{40\text{ cm}}{-40\text{ cm}}=-1$$

Es decir, la imagen que forma la lente 1 es del mismo tamaño que el objeto. Calculemos ahora el tamaño de la imagen que da el sistema:

$$\frac{y'_2}{y_2}=\frac{s'_2}{s_2}=\frac{60\text{ cm}}{-30\text{ cm}}=-2$$

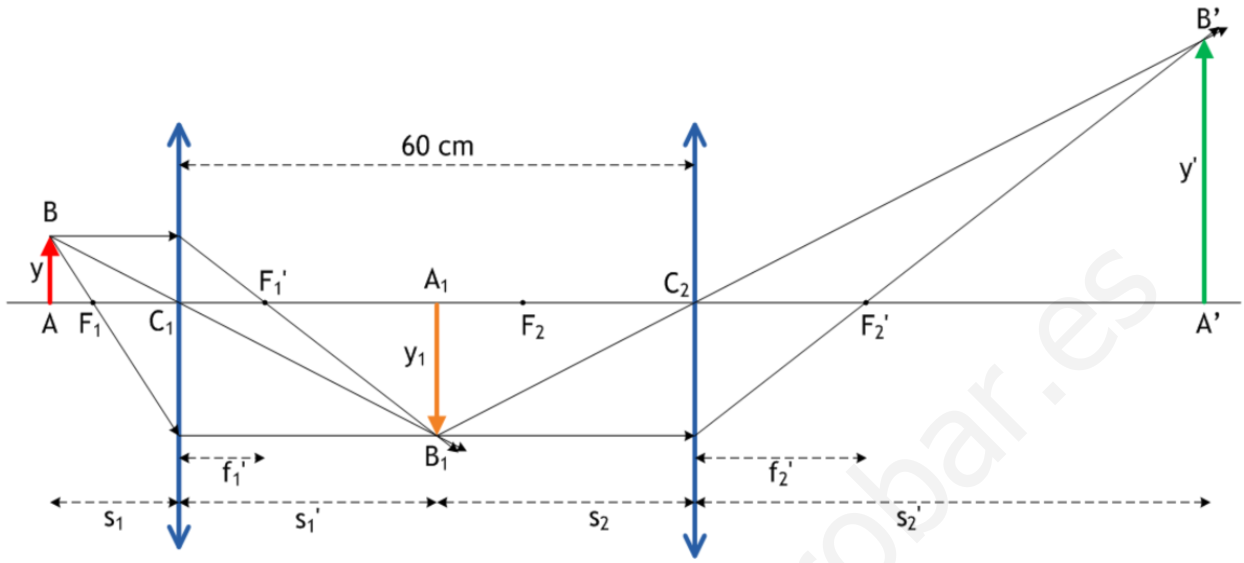
Es decir, la imagen final tiene el doble de tamaño que el objeto y es derecha respecto al objeto.

7.- Un sistema óptico está formado por dos lentes delgadas convergentes, de distancias focales 10 cm la primera y 20 cm la segunda, separadas por una distancia de 60 cm.

Un objeto luminoso de 2 mm de altura está situado 15 cm delante de la primera lente.

a) Calcule la posición y el tamaño de la imagen final del sistema.

b) Efectúe la construcción geométrica de la imagen mediante el trazado de rayos correspondiente.



a) Un sistema formado por dos lentes delgadas tiene, en general, el mismo tratamiento que una lente sencilla: se construye la imagen del objeto en la primera lente, y esta imagen actúa como objeto en la segunda lente, para producir la imagen final del objeto en el sistema.

Resulta muy útil trabajar con una construcción geométrica ante nosotros, ya que facilita la comprensión de las sucesivas distancias objeto e imagen con que debemos manejarnos. Así, en el caso que nos ocupa, podemos comenzar por el apartado b), recogido en la figura.

Vamos a estudiar con atención la marcha de los rayos. El objeto AB está entre F_1 y $2F_1$, ante la primera lente: su imagen A_1B_1 es real, invertida y de mayor tamaño. La imagen A_1B_1 actúa como objeto para la segunda lente, hallándose de nuevo entre F_2 y $2F_2$, de modo que la imagen de A_1B_1 en esta segunda lente acaba siendo A’B’, real, invertida y de mayor tamaño que A_1B_1.

Como puede verse, en realidad no se trata más que hacer el mismo trabajo dos veces seguidas. Aplicamos ahora las leyes de construcción de imágenes en una lente, paso por paso:

<u>En la primera lente:</u>

distancia focal imagen, $f1' = 10$ cm; distancia objeto, $s1 = -15$ cm; tamaño objeto, $y = 2$ mm

así que podemos poner:

$$\frac{1}{s_1'} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{f_1'} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s_1'} - \frac{1}{-15} = \frac{1}{10} \quad \Rightarrow \quad s_1' = 30 \text{ cm}$$

y además:

$$\frac{y_1}{y} = \frac{s_1'}{s_1} = \frac{30}{-15} = -2 \quad \Rightarrow \quad y_1 = -2y = -4 \text{ mm}$$

de modo que la imagen A_1B_1 se forma 30 cm a la derecha de la primera lente; es invertida y de doble tamaño que el objeto inicial.

En la segunda lente:

Podemos comprender inmediatamente, mirando la figura, cuál es la distancia objeto en la segunda lente, s_2, ya que conocemos la distancia entre las lentes:

distancia focal imagen, $f_2' = 20$ cm; distancia objeto, $s_2 = -30$ cm; tamaño objeto, $y_1 = -4$ mm

así que podemos poner:

$$\frac{1}{s'_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{f'_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{s'_2} - \frac{1}{-30} = \frac{1}{20} \quad \Rightarrow \quad s_2' = \mathbf{60\ cm}$$

y además

$$\frac{y'}{y_1} = \frac{s'_2}{s_2} = \frac{60}{-30} = -2 \quad \Rightarrow \quad y' = -2y_1 = \mathbf{8\ mm}$$

así que la imagen final acaba formándose a 60 cm de la segunda lente, es real y derecha con respecto al objeto inicial, y su tamaño es 4 veces mayor.