Trigonometría

1) Resolver un triángulo del que se conocen: $a = 4$, $c = 10$ y $A = 20º$. *(2,5 puntos)*
2) Demostrar que $2 \text{ tg } x \cos^2 \frac{x}{2} - \text{sen } x = \text{tg } x$ *(2 puntos)*
3) Resolver la ecuación: $3 \text{ sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ *(2,5 puntos)*
4) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α, sabiendo que tg $\alpha = -5/3$, $90º \leq \alpha \leq 180º$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*
5) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º). *(1 punto)*

SOLUCIONES

1) Resolver un triángulo del que se conocen: $a = 4$, $c = 10$ y $A = 20^o$. *(2,5 puntos)*

Por el T. de los senos:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \Rightarrow \quad \text{sen } C = \frac{c \text{ sen } A}{a} = \frac{10 \text{ sen } 20}{4} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad C = 58{,}76^o$ ó $C = 180^o – 58{,}76^o = 121{,}23^o$.

- Si $C = 58{,}76^o \quad \Rightarrow \quad B = 180^o – A – C = 101{,}23^o$. Y además:
  $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 101{,}23^o} = 11{,}47$
- Si $C = 121{,}23^o \quad \Rightarrow \quad B = 180^o – A – C = 38{,}76^o$. De modo que:
  $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac\cos B} = \sqrt{16 + 100 - 2 \cdot 4 \cdot 10 \cos 38{,}76^o} = 7{,}32$

Demostrar que $2 \text{ tg } x \cos^2 \frac{x}{2} – \text{sen } x = \text{tg } x$ *(2 puntos)*

$$2 \text{ tg } x \cos^2 \frac{x}{2} – \text{sen } x = 2 \text{ tg } x \frac{1 + \cos x}{2} – \text{sen } x = \text{tg } x\,(1 + \cos x) – \text{sen } x =$$

$$= \text{tg } x + \text{tg } x \cos x – \text{sen } x = \text{tg } x + \frac{\text{sen } x}{\cos x}\cos x – \text{sen } x = \text{tg } x + \text{sen } x – \text{sen } x = \text{tg } x$$

2) Resolver la ecuación: $3 \text{ sen}^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0$ *(2,5 puntos)*

$3(1 – \cos^2 x) + \cos^2 x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 – 3\cos^2 x + \cos^2 x + \cos x = 0 \quad \Rightarrow$

$–2\cos^2 x + \cos x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\cos^2 x – \cos x – 3 = 0$ que es una ecuación de segundo grado cuya incógnita es $\cos x$:

$$\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} = \dfrac{1-5}{4} = -1 \Rightarrow x = 180^o + 360^o k,\ \forall k \in Z \\ = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2} = 1{,}5 \text{ que no es posible} \end{cases}$$

3) Empleando las fórmulas que relacionan las distintas razones trigonométricas entre si, y sin usar calculadora, hallar las restantes razones de α, sabiendo que $\text{tg } \alpha = –5/3$, $90^o \le \alpha \le 180^o$. Después, decir el valor de α con ayuda de la calculadora. *(2 puntos)*

α es del segundo cuadrante. $1 + \text{tg}^2 \alpha = \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \dfrac{25}{9} = \dfrac{34}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos \alpha = -\dfrac{3}{\sqrt{34}}}$. Por otra parte: $tg\,\alpha = \dfrac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{sen } \alpha} = \text{tg } \alpha \cos \alpha = -\dfrac{5}{3}\dfrac{-3}{\sqrt{34}} = \boxed{\dfrac{5}{\sqrt{34}}}$.

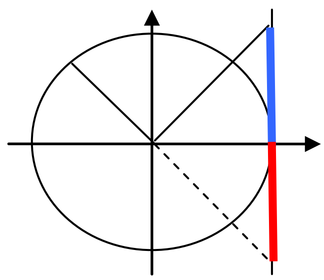
Por tanto: $\boxed{\text{cotg } \alpha = -\dfrac{3}{5},\ \sec \alpha = -\dfrac{\sqrt{34}}{3},\ \text{cosec } \alpha = \dfrac{\sqrt{34}}{5}}$.

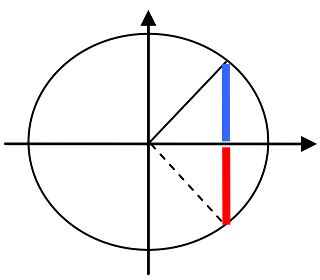
Con la calculadora, usando que $\text{tg } \alpha = –5/3$, obtenemos que $\alpha = –59{,}03^o$. Pero tratándose de un ángulo del segundo cuadrante, el verdadero valor es $180^o – 59{,}03^o$: $\boxed{\alpha = 120{,}97^o}$.

4) Sin usar la calculadora, decir el valor de: a) tg 1920º; b) sen (–765º). *(1 punto)*

Dividiendo 1920 entre 360 se obtiene 5 de cociente y 120 de resto. Es decir: $1920^o = 360^o \cdot 5 + 120^o$. Luego 1920º coincide, sobre la circunferencia, con 120º, después de dar 5 vueltas. Por tanto, tg 1920º = tg 120º.

Además $\text{tg } 1920^o = \text{tg } 120^o = \text{tg } (180 – 60^o) = – \text{tg } 60^o = -\sqrt{3}$





De la misma forma, $765 = 360 \cdot 2 + 45^o \quad \Rightarrow \quad –765^o$ coincide con –45º, después de dos vueltas en sentido negativo. Y además, por tratarse de un ángulo del 4º cuadrante: $\text{sen}(–765^o) = \text{sen}(–45^o) = –\text{sen}(45^o) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.