8 La integral

Llegamos al otro pilar de lo que se conoce con los nombres de Cálculo Infinitesimal, Cálculo o Análisis matemático: la integración. Forma, junto con la derivación, una pareja que ha dotado a las Matemáticas y al resto de las Ciencias, tanto Sociales como Naturales, de las más potentes herramientas de que jamás hayan dispuesto para la resolución de infinidad de problemas. La noción actual de integral es obra de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 – 1866).

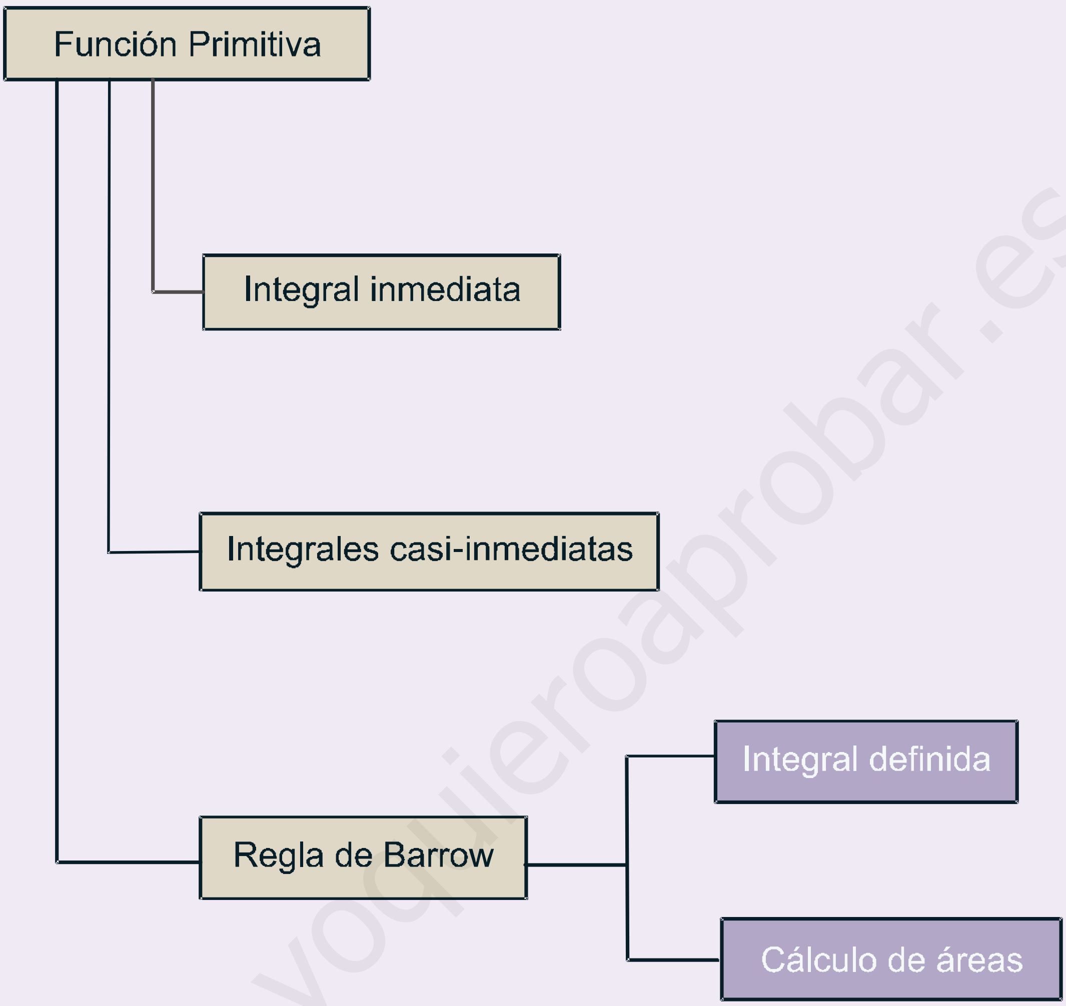
G. F. B. Riemann (Wikipedia org. Dominio público)

En lugar de seguir un orden cronológico, optamos por introducir primero el concepto de función primitiva, y usarlo para hacer aparecer la integral indefinida como operación inversa a la derivada. Nos interesa que aprendas los rudimentos de la integración y que seas capaz de resolver integrales inmediatas, a partir de la tabla de dichas integrales, y casi-inmediatas, bien por ajuste directo de constantes, bien usando el método de sustitución.

Después describimos brevemente de dónde surge la idea de la integral y la relacionamos con el área. Aparece la integral definida. Mencionamos el teorema fundamental del cálculo, y justificamos la Regla de Barrow, aunque sin usar un excesivo rigor matemático. En este punto, hemos de mostrar que, aunque la integral surja históricamente como herramienta para el cálculo de áreas, hay que distinguir entre dicho cálculo y la integral definida. La Unidad termina abordando el cálculo del área encerrada por una función y el eje *OX*, y también el cálculo del área encerrada por dos funciones.

A partir de lo antes dicho, esta Unidad tiene como **objetivos** los siguientes:

1. Calcular la función primitiva de una función.
2. Calcular integrales inmediatas.
3. Calcular integrales casi-inmediatas.
4. Calcular integrales definidas.
5. Calcular áreas encerradas por funciones.



ÍNDICE DE CONTENIDOS

1. Función primitiva

Decimos que F es una **función primitiva o primitiva de f si $F'(x) = f(x)$**. Por lo tanto, intentamos reconstruir una función F a partir del conocimiento de su derivada f.

Por ejemplo, como $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$ es una primitiva de $f(x) = x$. También $(senx)' = cos\,x \Rightarrow$ $\Rightarrow F(x) = senx$ es una primitiva de $f(x) = cos\,x$. Observa que ahora el procedimiento es más complejo que la derivación, pues hay que retroceder usando como guía las reglas de dicha operación.

Antes de sistematizar el cálculo de primitivas debemos hacer notar que la primitiva no es única, es decir, si sumamos una constante cualquiera a la primitiva, ésta sigue siendo primitiva de la misma función: $\left(\frac{x^2}{2}+1\right)' = x\,;\,(senx-7)' = cos\,x$. Por ello escribiremos siempre $F(x) + k$, $k \in \Re$. Obviamente, k designa a la constante. Esta constante tiene distintas interpretaciones, y toma diferentes valores, dependiendo del contexto en el que aparezca la primitiva.

Podemos escribir en una tabla aquellas primitivas que se obtienen directamente de la tabla de derivadas:

Función	Primitiva
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1},\ n \neq -1$
$\frac{1}{x}$	$ln\,\lvert x\rvert$
$cos\,x$	$sen\,x$
$sen\,x$	$-cos\,x$
e^x	e^x
$1+tg^2x = \frac{1}{cos^2 x}$	$tg\,x$

Observa que la primera primitiva no es más que el resultado de la regla $(x^n)' = nx^{n-1}$. Como la derivada baja el grado del exponente en una unidad, al ir hacia atrás tendremos que sumárselo, y como el exponente aparece multiplicando al derivar, habrá que dividir al retroceder:

$$(x^3)' = 3x^2 \Rightarrow x^2 = \left(\frac{x^3}{3}\right)'\,;\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow x^{-\frac{1}{3}} = \left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right)'$$

La fórmula sirve también para exponentes negativos y fraccionarios, salvo para el caso $n = -1$. Date cuenta de que si $n = -1$, la función es $f(x) = \frac{1}{x}$, que procede de derivar $F(x) = ln\lvert x\rvert$. Si intentas aplicar la fórmula en este caso, te quedaría como primitiva $\frac{x^0}{0}$, que no es válida.

2. Integral indefinida. Integrales inmediatas

A partir de la idea de función primitiva podemos definir la operación integración como inversa de la derivación, puesto que lo que una hace lo deshace la otra, tal como aparece en el gráfico; debemos tener en cuenta además que la primitiva no es única. Por eso no volvemos exactamente a la función de partida, sino a una familia de funciones que difieren en un valor constante.

Aunque en el gráfico representamos la **integral indefinida** con su inicial *I*, no se hace así en la práctica. Por razones que veremos más adelante, se usa el símbolo $\int$, que representa una *S* alargada. Escribiremos la relación entre la función y su primitiva como $\int f = F + k$ ó $\int f(x)dx = F(x) + k$.

$$\frac{x^2}{2} \underset{\text{Integral}}{\overset{\text{Derivada}}{\rightleftarrows}} x$$

El término *dx* (que se lee *diferencial de x*) indica únicamente cuál es la variable respecto de la que integramos. Te recordamos que procede de la notación de Leibniz para la derivada: $f'(x) = \frac{df}{dx}$. Nosotros usaremos la segunda notación, más antigua, pero que tiene ventajas a la hora de enfrentarse a integrales complicadas. Todo lo que aparece bajo el símbolo $\int$, salvo el diferencial, se denomina integrando. Lógicamente, no podemos quitar dicho símbolo hasta que no demos la primitiva del integrando. Repetimos la anterior tabla de primitivas usando la notación para las integrales. Ahora se llama **tabla de integrales inmediatas**. Hay que aprendérsela de memoria:

Integrales inmediatas
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = ln\lvert x\rvert + k$
$\int \cos x dx = senx + k$
$\int senxdx = -\cos x + k$
$\int e^x dx = e^x + k$
$\int \left(1 + tg^2 x\right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + k$

Ejemplos

1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + k = \frac{x^3}{3} + k.$

b) $\int x^9 dx = \frac{x^{9+1}}{9+1} + k = \frac{x^{10}}{10} + k.$

c) $\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5}dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + k = \frac{x^{-4}}{-4} + k = -\frac{1}{4x^4} + k.$

d) $\int \sqrt[7]{x^2}dx = \int x^{\frac{2}{7}}dx = \frac{x^{\frac{2}{7}+1}}{\frac{2}{7}+1} + k = \frac{7}{9}x^{\frac{9}{7}} + k = \frac{7}{9}\sqrt[7]{x^9} + k.$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}} = \int x^{-\frac{1}{6}}dx = \frac{x^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + k = \frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}} + k = \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} + k.$

f) $\int dx = x + k.$

Un procedimiento útil para saber que la integral está correctamente resuelta consiste en derivar la primitiva. Si se obtiene la función que aparece en el integrando, lo habremos hecho bien y, si no es así, nos hemos equivocado. Si te fijas en el ejemplo 6, el más fácil de todos, $(x)' = 1$ y 1 es el integrando, pues $1 \cdot dx = dx$.

Para calcular integrales más complicadas, necesitamos conocer algunas propiedades de la integral. Éstas se denominan **propiedades de linealidad** y son las siguientes:

- $\int (f + g) = \int f + \int g \equiv$ La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.
- $\int (\lambda f) = \lambda \int f \equiv$ La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

Estas propiedades suelen abreviarse escribiendo $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$. Es decir, sacamos las constantes multiplicativas e integramos las funciones.

Ejemplos

2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int (x^2 + x)dx = \int x^2dx + \int xdx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + k.$

b) $\int 5x^3dx = 5\int x^3dx = 5\frac{x^4}{4} + k = \frac{5x^4}{4} + k.$

c) $\int \frac{dx}{8x} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{8}ln|x| + k.$

d) $\int \frac{7}{x^3}dx = 7\int x^{-3}dx = 7\frac{x^{-2}}{-2} + k = -\frac{7}{2x^2} + k.$

e) $\int \frac{\sqrt[8]{x^3}}{11}dx = \frac{1}{11}\int x^{\frac{3}{8}}dx = \frac{1}{11}\frac{x^{\frac{11}{8}}}{\frac{11}{8}} + k = \frac{8}{121}\sqrt[8]{x^{11}} + k.$

f) $\int\left(6e^x+\frac{7}{x}\right)dx=\int 6e^x dx+\int\frac{7}{x}dx=6\int e^x dx+7\int\frac{dx}{x}=6e^x+7\ln|x|+k.$

g) $\int\left(x^7+1\right)dx=\int x^7 dx+\int dx=\frac{x^8}{8}+x+k.$

3. Podemos calcular las integrales directamente, sin tener que escribir detalladamente la propiedad:

a) $\int\left(3x^5-7x^2+9\right)dx=3\frac{x^6}{6}-7\frac{x^3}{3}+9x+k=\frac{x^6}{2}-\frac{7x^3}{3}+9x+k.$

b) $\int\left(8e^x-\frac{5}{3x}+\frac{2}{x^4}\right)dx=8e^x-\frac{5}{3}\ln|x|-\frac{2}{3x^3}+k.$

c) $\int\left(-2x^2+11x-5\right)dx=-\frac{2}{3}x^3+\frac{11}{2}x^2-5x+k.$

Actividades

1. Calcula: **a)** $\int\left(x^3+4x^2+7x\right)dx$; **b)** $\int\left(-x^2+9x+1\right)dx.$

2. Halla: **a)** $\int\left(3-\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}x^2-0{,}05x^3\right)dx$; **b)** $\int\left(5x^4-3x^2+2x\right)dx$.

3. Averigua: **a)** $\int\left(1-x^7\right)dx$; **b)** $\int\left(3x^3-7x^2+8x-4\right)dx$.

4. Calcula: **a)** $\int\left(9x^2+5x+3\right)dx$; **b)** $\int\left(8e^x-\frac{5}{x}+9x\right)dx.$

5. Halla: **a)** $\int\left(6x^3-5x^2+\sqrt{x}\right)dx$; **b)** $\int\left(\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{4}{x}\right)dx.$

3. Integrales casi-inmediatas. Método de sustitución

Se habla de **integrales casi-inmediatas** cuando la función que debemos integrar puede convertirse de forma sencilla en una integral inmediata. Podemos distinguir dos tipos:

- Un primer tipo en el que efectuando las operaciones indicadas (sumas, restas, productos, divisiones …) pasamos a tener integrales inmediatas.
- Un segundo tipo en el que habitualmente se reconoce la derivación siguiendo la regla de la cadena, es decir, aparece una función y su derivada, salvo constantes que multiplican.

Veámoslo con algunos ejemplos:

Ejemplos

4. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int(3x^2-5x)(x^3+2x)dx=\int(3x^5-5x^4+6x^3-10x^2)dx=3\frac{x^6}{6}-5\frac{x^5}{5}+6\frac{x^4}{4}-10\frac{x^3}{3}+k=\frac{x^6}{2}-x^5+\frac{3x^4}{2}-\frac{10x^3}{3}+k.$

b) $\int\frac{2x^4-5x^2+1}{x^2}dx=\int\left(2x^2-5+\frac{1}{x^2}\right)dx=2\frac{x^3}{3}-5x+\frac{x^{-1}}{-1}+k=\frac{2x^3}{3}-5x-\frac{1}{x}+k.$

c) $\int\frac{4x^2+3x-7}{2\sqrt{x}}dx=\int\left(2x^{3/2}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{7}{2}x^{-1/2}\right)dx=2\frac{x^{5/2}}{5/2}+\frac{3}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2}-\frac{7}{2}\frac{x^{1/2}}{1/2}+k=\frac{4\sqrt{x^5}}{5}+\sqrt{x^3}-7\sqrt{x}+k.$

En estos ejemplos no hemos hecho más que terminar las operaciones indicadas (producto y cocientes), obteniendo integrales inmediatas. Observa que hay que escribir los radicales como potencias fraccionarias y las *x* del denominador como potencias negativas.

d) $\int e^{7x}dx$. Como $(e^{7x})'=7e^{7x}\Rightarrow$ le falta multiplicar por 7 para ser inmediata. Para no cambiar el valor de la integral, si multiplicamos por 7 tenemos que dividir por 7: $\int e^{7x}dx=\frac{1}{7}\int 7e^{7x}dx=\frac{1}{7}e^{7x}+k.$

e) $\int 5\cos 4x\,dx$. Como $(sen 4x)'=4\cos 4x\Rightarrow$ falta multiplicar por 4. Como antes, si multiplicamos por un número hemos de dividir por ese mismo número: $\int 5\cos 4x\,dx=\frac{5}{4}\int 4\cos 4x\,dx=\frac{5}{4}sen 4x+k.$

f) $\int\frac{7x}{x^2+1}dx$. Como $(\ln(x^2+1))'=\frac{2x}{1+x^2}\Rightarrow$ falta multiplicar por 2. Tenemos que dividir también por 2:

$\int\frac{7x}{x^2+1}dx=\frac{7}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{7}{2}\ln(x^2+1)+k.$ No es necesario usar el valor absoluto, pues x^2+1 siempre es positivo.

Fíjate que hemos de tener cierta idea sobre la posible primitiva. También observa que conforme se complica el integrando, el hallar su primitiva, aunque sea ajustando las constantes multiplicativas, se vuelve más difícil.

g) $\int 3x\left(x^2-7\right)^5 dx$ como $\left(\left(x^2-7\right)^6\right)'=12x\left(x^2-7\right)^5 \Rightarrow$ Hay que multiplicar y dividir por 12:

$$\int 3x\left(x^2-7\right)^5 dx=\frac{3}{12}\int 12x\left(x^2-7\right)^5 dx=\frac{1}{4}\left(x^2-7\right)^6+k.$$

h) $\int tg^2x dx$. Este es un ejemplo de *idea feliz*: recuerda que $(tgx)'=1+tg^2x$. Así, para que fuera inmediata tendría que aparecer un 1 sumando en el integrando. Pues se lo sumamos y, para no cambiar el valor, se lo restamos:

$$\int tg^2x dx=\int\left(1+tg^2x-1\right)dx=\int\left(1+tg^2x\right)dx-\int dx=tgx-x+k.$$

Existe una técnica para resolver el segundo tipo de integrales, llamada método de sustitución o de cambio de variable. Consiste en cambiarle el nombre a la función de la que aparece su derivada, de modo que tras dicho cambio quede una integral inmediata. Al cambiarle el nombre a la variable, hay que cambiar también el diferencial. Recordando la notación de Leibniz: $u'=\frac{du}{dx}\Rightarrow du=u'dx\Rightarrow dx=\frac{du}{u'}$. Simbólicamente podemos escribir que el cambio de variable consiste en que: $\left\{\begin{array}{l} f\to u \\ dx\to\frac{du}{u'}\end{array}\right.$. Al hacerlo, debe desaparecer la variable x, quedando una integral en u, que se integra tal y como hemos hecho con las de x. Al final, se deshace el cambio, volviendo a la variable original.

Ejemplos

5. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int 8x\sqrt[3]{1-x^2}dx$.

Solución:

Observamos que $(1-x^2)'=-2x\propto x$ por lo que el cambio adecuado será $u=1-x^2$. Intentemos resolver la integral mediante este cambio:

$$\int 8x\sqrt[3]{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l} u=1-x^2\Rightarrow u'=-2x \\ dx=\frac{du}{-2x}\end{array}\right\}=\int 8x\cdot u^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{du}{-2x}=-4\int u^{\frac{1}{3}}du=-4\frac{u^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}+k=-3\sqrt[3]{\left(1-x^2\right)^4}+k.$$

El símbolo $\propto$ se usa para indicar la proporcionalidad. Fíjate en que al hacer el cambio, en u sólo va la función, no el exponente, que ya pondremos después.

b) $\int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2 dx$.

Solución :

Como $\left(3x^3+2\right)'=9x^2\propto x^2\Rightarrow u=3x^3+2\Rightarrow\int 6x^2\left(3x^3+2\right)^2dx=\left\{\begin{array}{l} u=3x^3+2\Rightarrow u'=9x^2 \\ dx=\frac{du}{9x^2}\end{array}\right\}=$

$$=\int 6x^2\cdot u^2\cdot\frac{du}{9x^2}=\frac{2}{3}\int u^2du=\frac{2u^3}{9}+k=\frac{2\left(3x^3+2\right)^3}{9}+k.$$

c) $\int \frac{\ln x}{x} dx.$

Solución :

$$\text{Como } (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow \int \frac{\ln x}{x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ dx = \frac{du}{\frac{1}{x}} = xdu \end{array} \right\} = \int \frac{u}{x} xdu = \int udu = \frac{u^2}{2} + k = \frac{(\ln x)^2}{2} + k.$$

No es necesario usar el valor absoluto pues ln x solo existe para los x positivos.

d) $\int 7xe^{3x^2-5} dx.$

Solución :

$$\text{Como } \left(e^{3x^2-5}\right)' = 6xe^{3x^2-5} \propto xe^{3x^2-5} \Rightarrow u = e^{3x^2-5} \Rightarrow \int 7xe^{3x^2-5} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = e^{3x^2-5} \Rightarrow u' = 6xe^{3x^2-5} \\ dx = \frac{du}{6xe^{3x^2-5}} = \frac{du}{6xu} \end{array} \right\} =$$

$$= \int 7xu \frac{du}{6xu} = \frac{7}{6} \int du = \frac{7}{6} u + k = \frac{7}{6} e^{3x^2-5} + k.$$

e) $\int \frac{4}{1+3x} dx.$

Solución :

$$\text{Como } (1+3x)' = 3 \propto k \Rightarrow u = 1+3x \Rightarrow \int \frac{4}{1+3x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1+3x \Rightarrow u' = 3 \\ dx = \frac{du}{3} \end{array} \right\} = \int \frac{4}{u} \frac{du}{3} = \frac{4}{3} \int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{4}{3} \ln|u| + k = \frac{4}{3} \ln|1+3x| + k.$$

Este ejercicio se podía haber hecho ajustando constantes como los primeros.

f) $\int \frac{-5x}{4+7x^2} dx.$

Solución :

$$\text{Como } \left(4+7x^2\right)' = 17x \propto x \Rightarrow u = 4+7x^2 \Rightarrow \int \frac{-5x}{4+7x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 4+7x^2 \Rightarrow u' = 14x \\ dx = \frac{du}{14x} \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-5x}{u} \frac{du}{14x} = -\frac{5}{14} \int \frac{du}{u} = -\frac{5}{14} \ln u + k = -\frac{5}{14} \ln\left(4+7x^2\right) + k.$$

No es necesario usar el valor absoluto pues $4 + 7x^2$ siempre es positivo.

A veces hay que operar en el integrando, aún después de haber hecho el cambio.

g) $\int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx.$

Solución :

$$\text{Como } (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln x \Rightarrow \int \frac{3+2\ln x}{5x\ln x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \\ dx = \frac{du}{1/x} = xdu \end{array} \right\} = \int \frac{3+2u}{5xu}xdu =$$

$$= \int \frac{3}{5u}du + \frac{2}{5}\int du = \frac{3}{5}\ln u + \frac{2}{5}u + k = = \frac{3}{5}\ln(\ln x) + \frac{2}{5}\ln x + k.$$

En este punto dejamos el cálculo de integrales. Existen otros métodos (integración por partes, integración de funciones racionales, …) que permiten integrar otra serie de funciones, pero que no tienen cabida en este libro. Hay que resaltar que, a pesar de la existencia de más métodos, no podemos integrar todas las funciones, aunque siempre podemos calcular la derivada (si son derivables).

Actividades

6. Calcula: **a)** $\int (x^3+1)(x^2-1)dx$; **b)** $\int 4x(7x^2-5)^3 dx.$

7. Halla: **a)** $\int 5x\sqrt[3]{1-9x^2}dx$; **b)** $\int \frac{7x}{4+3x^2}dx.$

8. Averigua: **a)** $\int 3x\cos x^2 dx$; **b)** $\int \frac{4}{5+8x}dx.$

9. Calcula: **a)** $\int \frac{2x}{\sqrt[3]{8x^2+1}}dx$; **b)** $\int 3xe^{-x^2}dx.$

10. Halla: **a)** $\int 7e^{3x+4}dx$; **b)** $\int 3e^{-x}dx.$

11. Averigua: **a)** $\int \frac{3\cos x}{5\operatorname{sen}x-8}dx$; **b)** $\int \frac{7}{3-5x}dx.$

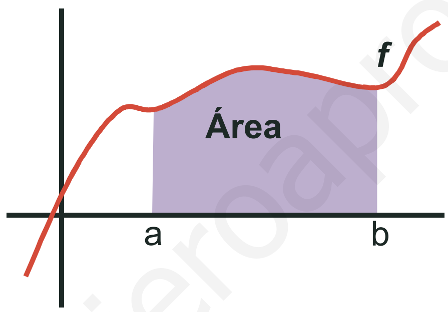
12. Calcula las siguientes integrales: **a)** $\int \frac{5x+15}{x^2+6x-4}dx$; **b)** $\int 8xe^{7-3x^2}dx.$

4. El área y la integral definida. Teorema fundamental del cálculo

Históricamente, la integral surge como herramienta para el cálculo de áreas de figuras planas y es anterior a la derivación. Afortunadamente, existe una relación entre la derivación y la integración, que ya hemos usado, y que nos permite integrar, y por tanto calcular áreas, de forma sencilla. Vamos a explicarlo sucintamente:

Llamamos $\int_a^b f(x)dx$ al área encerrada por la función *f*, el eje *OX*, y las rectas $x = a$, $x = b$ (zona coloreada).

Los puntos *a*, *b* que aparecen en la integral son sus extremos o límites de integración e indican desde y hasta donde queremos calcular el área. Por comodidad, suponemos *f* positiva en el intervalo [*a*,*b*]. Más adelante veremos qué hay que hacer cuando no sea así.

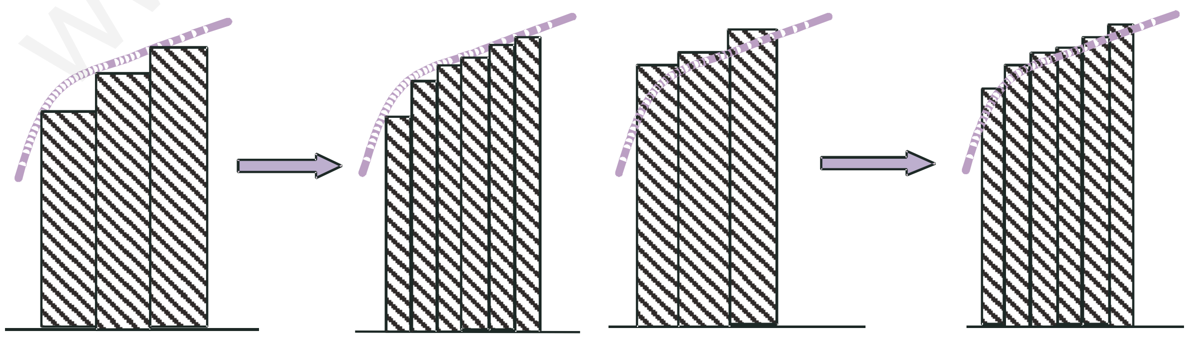


Para calcular el área de la figura, podríamos descomponerla en rectángulos y sumar el área de todos ellos. Los rectángulos pueden ser:

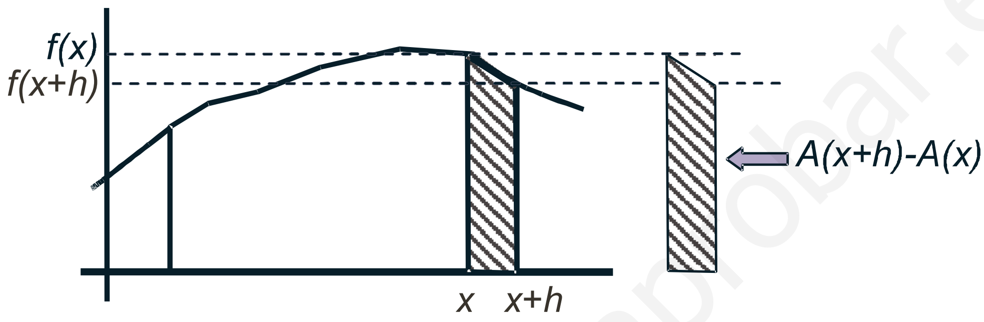
- de menor altura que la función, con lo que obtendríamos un área por defecto;
- de mayor altura que la función, con lo que obtendríamos un área por exceso.

Como con toda aproximación, podemos intentar mejorarla. Para ello hacemos cada vez más pequeña la base y observamos qué le ocurre a las áreas por defecto y por exceso.

El área por defecto aumenta **El área por exceso disminuye**



Si el área por defecto aumenta y disminuye el área por exceso, y, parece claro que el área existe, tendrán que coincidir. En ese momento tendremos calculada el área de la figura, definida también como $\int_a^b f(x)dx$. Este procedimiento que hemos descrito tan brevemente en realidad es bastante complicado: tenemos que sumar una gran cantidad de áreas (la de cada rectángulo), pues hay que dividir y dividir cada vez más las bases para que ambas áreas (por defecto y por exceso) converjan, es decir, que coincidan. Se trata de un proceso tedioso incluso para funciones muy sencillas, por lo que hay que encontrar una alternativa a la descomposición en rectángulos.



Para ello intentemos averiguar el valor de la derivada del área $A(x)=\int_a^x f(t)dt$. Observa que al ser A función de x tenemos que escribir otra variable en la integral. Del gráfico anterior vemos que:

$$f(x+h)\cdot h \;\leq\; A(x+h)-A(x) \;\leq\; f(x)\cdot h \Rightarrow f(x+h) \leq \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(x+h) \leq \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h)-A(x)}{h} \leq \lim_{h\to 0} f(x) \Rightarrow f(x) \leq A'(x) \leq f(x) \Rightarrow A'(x) = f\left(x\right) \Rightarrow$$

El área encerrada por la función es su primitiva, luego calcular áreas es calcular primitivas.

Algunas apreciaciones:

- La función dibujada es decreciente en [x, $x+h$], pero el que fuese creciente en dicho intervalo no cambia el resultado.
- Para poder tomar el límite, y obtener el resultado obtenido, la función f ha de ser continua y la función A derivable.

Gracias al resultado anterior, conocido como el **Teorema fundamental del cálculo**, podemos escribir que $\int_a^x f(t)dt = F(x)+k$. Evidentemente, no podemos dejar el área en función de una constante arbitraria k. Nos hace falta otro resultado, conocido como Regla de Barrow y que veremos en el siguiente apartado.

5. Integral definida: regla de Barrow

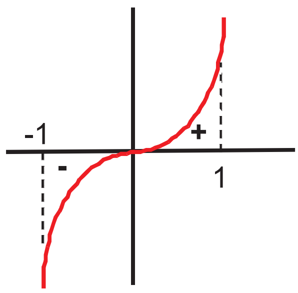
En el apartado anterior vimos que la integral nos proporciona un método para el cálculo de áreas. Sin embargo, dicho cálculo quedaba en función de una constante arbitraria k, algo improcedente. Afortunada, y lógicamente, existe un resultado que elimina dicha constante y permite calcular áreas con los datos del problema. Este resultado se llama **Regla de Barrow**, y no es difícil de justificar:

$\int_a^x f(t)dt = F(x)+k \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = F(x)+k = 0$ pues el área encerrada por la función en un punto (de anchura cero) será cero. Luego, $k=-F(a) \Rightarrow$ si $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$ entonces $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ (Regla de Barrow).

El segundo igual no es más que otra forma de escribir dicha regla usando la barra de las particularizaciones.

Hay que hacer una observación muy importante. Intentaremos calcular el área encerrada por la función $f(x) = x^3$, el eje OX y las rectas $x=-1$, $x=1$. Si aplicamos los resultados anteriores tal cual tendríamos que:

$A = \int_{-1}^{1} x^3dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{4}-\frac{1}{4} = 0\,u^2$ ¡Pero un área no puede ser nula! Encontramos la explicación al representar gráficamente $f(x) = x^3$ en el intervalo [-- 1, 1] : la función tiene una parte negativa, con su área, y otra positiva, también con su correspondiente área. Da la casualidad (nada casual, pues no lo habríamos puesto como ejemplo) de que ambas son iguales, pero tienen signos distintos, al estar una en la parte negativa y otra en la positiva del eje OY. Por lo tanto, la integral por sí sola no es capaz de calcular correctamente el área, de ahí que se distinga entre **integral definida**, que puede tomar cualquier valor (positivo, negativo o nulo), y el área, que sólo puede ser positiva. En el siguiente apartado veremos cómo se calculan las áreas. Por ello, si escribimos $\int_a^b f(x)dx$ entendemos que se trata de una integral definida, por lo que usaremos directamente la Regla de Barrow y no nos preocuparemos por el signo del resultado.



Si resolvemos la integral mediante el método de sustitución tenemos dos posibles formas de aplicar la Regla de Barrow:

1.- La usamos después de haber deshecho el cambio.

2.- Cambiamos los límites de integración, escribiendo $u_1 = u(a)$, $u_2 = u(b)$, con lo que tendríamos que

$$\int_a^b f(x)dx = |F(u_2) - F(u_1)|.$$

Ejemplos

6. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{-3}^{1}\left(4x^2-5x+1\right)dx = \left.\frac{4x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}+x\right|_{-3}^{1} = -\frac{1}{6}-\left(-\frac{123}{2}\right) = \frac{368}{6} = \frac{184}{3}.$

b) $\int_{-1}^{1}\left(6x^5-9x^2+2\right)dx = \left.x^6-3x^3+2x\right|_{-1}^{1} = 0-2 = -2.$

c) $\int_1^e \frac{3}{x}dx = 3\ln|x|\Big|_1^e = 3\ln e - 3\ln 1 = 3 - 0 = 3.$

d) $\int_{-2}^{2}\left(x^4 - 5x^2 + 4\right)dx = \frac{x^5}{5} - \frac{5x^3}{3} + 4x\Big|_{-2}^{2} = \frac{16}{15} - \left(-\frac{16}{15}\right) = \frac{32}{15}.$

e) $\int_{-5}^{5}\left(x^3 - 25x\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{25x^2}{2}\Big|_{-5}^{5} = -\frac{625}{4} - \left(-\frac{625}{4}\right) = 0.$

f) Halla la primitiva de $f(x) = \frac{6}{x+4} - 6x$ que en $x = -3$ vale 7.

Solución: Hay que calcular la integral indefinida y sustituir la condición para averiguar el valor de la constante k.

$$\int\left(\frac{6}{x+4} - 6x\right)dx = 6\ln|x+4| - 3x^2 + k \Rightarrow F(-3) = 6\ln 1 - 27 + k = 7 \Rightarrow k = 34.$$

La primitiva buscada es $F(x) = 6\ln|x+4| - 3x^2 + 34.$

g) Encuentra la primitiva de $f(x) = \sqrt{x+5}$ que vale 3 en $x = -1$.

Solución: $$\int\sqrt{x+5}dx = \left\{\begin{array}{l} u = x+5 \Rightarrow u' = 1 \\ dx = \frac{du}{u'} = du \end{array}\right\} = \int u^{1/2}du = \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + k = \frac{2}{3}u^{3/2} + k = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} + k.$$

$$F(-1) = \frac{2}{3}4^{3/2} + k = 3 \Rightarrow \frac{2}{3}\cdot 8 + k = 3 \Rightarrow k = -\frac{7}{3} \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2} - \frac{7}{3}.$$

h) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 6x\left(x^2-1\right)^4 dx.$

Solución: Vamos a hacerla por los dos métodos que mencionamos:

1º. $$\int 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 - 1 \Rightarrow u' = 2x \\ dx = \frac{du}{2x} \end{array}\right\} = \int 6x\cdot u^4\cdot\frac{du}{2x} = \frac{3u^5}{5} = \frac{3\left(x^2-1\right)^5}{5} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{3}{5} \\ F\left(\sqrt{3}\right) = \frac{96}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = F\left(\sqrt{3}\right) - F\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{96}{5} - \frac{3}{5} = \frac{93}{5}.$$

2º. $$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 6x\left(x^2-1\right)^4 dx = \left\{\begin{array}{l} u = x^2 - 1 \Rightarrow u' = 2x \Rightarrow dx = \frac{du}{2x} \\ u_1 = u\left(-\sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^2 - 1 = 1 \\ u_2 = u\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1 = 2 \end{array}\right\} = \int_1^2 6x\cdot u^4\cdot\frac{du}{2x} = \int_1^2 3u^4 du \Rightarrow F(u) = \frac{3u^5}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(1) = \frac{3}{5} \\ F(2) = \frac{96}{5} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_1^2 3u^4 du = F(2) - F(1) = \frac{93}{5}.$$ Fíjate que si cambiamos los límites, lo escribimos en el cambio.

i) Halla $\int_7^{10} \frac{4}{x-5}dx$

Solución: $\int_7^{10} \frac{4}{x-5}dx = 4\ln|x-5|\Big|_{x=7}^{x=10} = 4\ln 5 - 4\ln 2 = 4(\ln 5 - \ln 2) = 4\ln\frac{5}{2}.$

j) Averigua $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{6 senx}{1-\cos x}dx$

Solución: Usamos el método de sustitución

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{6senx}{1-\cos x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 1-\cos x \Rightarrow u' = senx \Rightarrow dx = \dfrac{du}{senx} \\ u_1 = u\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1-\cos\dfrac{\pi}{2} = 1-0 = 1 \\ u_2 = u(\pi) = 1-\cos\pi = 1-(-1) = 2 \end{array} \right\} = \int_1^2 \frac{6senx}{u}\frac{du}{senx} = \int_1^2 \frac{6du}{u} =$$

$$= 6\ln|u|\Big|_{u=1}^{u=2} = 6\ln 2 - 6\ln 1 = 6\ln 2.$$

Este ejercicio también puede resolverse sin necesidad de cambiar los límites. Lo único que hay que hacer es cambiar 6 *ln* |*u*| por 6 *ln* |1–*cos x*| *y* aplicar la Regla de Barrow.

k) Determina la función *f* definida para $\Re - \{0\}$ que verifica $f'(x) - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3} = 0$ y $f(-1) = 0.$

Solución:

Hay que calcular la integral indefinida y sustituir la condición para averiguar el valor de la constante *k*:

$$f'(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3} \Rightarrow f(x) = \int\left(\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x^3}\right)dx = -\frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} + k \Rightarrow f(-1) = 3+1+k = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = -4 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 4.$$

l) Calcula la primitiva de la función $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + \frac{5}{x-3}$ que pasa por el punto (4,7).

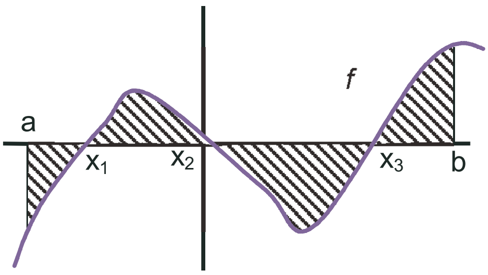
Solución:

$$F(x) = \int\left(\frac{3}{2\sqrt{x}} - \frac{x}{2} + \frac{5}{x-3}\right)dx = 3\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + 5\ln|x-3| + k \Rightarrow F(4) = 6-4+k = 7 \Rightarrow k = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = 3\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + 5\ln|x-3| + 5.$$

6. Cálculo de áreas

Como vimos en el apartado anterior, no basta la integral definida para el cálculo del área encerrada por una función, el eje OX y las rectas $x = a$ y $x = b$. Podemos pensar que, al igual que ocurre para averiguar la distancia entre dos puntos de la recta real, podemos usar el valor absoluto. Sin embargo, no podemos usarlo directamente sin hacer ninguna otra modificación. Pensemos en la situación del gráfico:



Si calculamos el área directamente como $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$, a las partes positivas (de x_1 a x_2 y de x_3 a b) le restaremos las negativas (de a a x_1 y de x_2 a x_3), por lo que no obtendremos el área. Lo que debemos hacer es calcular el área de cada trozo y sumarlas. Ahora sí que usamos el valor absoluto, para despreocuparnos de si el trozo está en la parte positiva o negativa del eje OY:

$$Área = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|$$

¿Qué son x_1, x_2 y x_3? Si observas el gráfico, te darás cuenta de que son los puntos de corte de la función con el eje OX, esto es, los puntos en los que la función se anula. Para que dichos puntos influyan en el cálculo deben pertenecer al intervalo de integración. Si no es así, no hay que partir el intervalo de integración. Por cierto, podemos partir el intervalo de integración en tantas partes como queramos porque, si recuerdas, la integral es una suma.

También has de darte cuenta de que, a pesar de lo complicado que pueda parecer, sólo calculamos una primitiva, pues en todos los integrandos está la misma función, que evaluamos en 5 puntos en el caso del gráfico. Sólo hay que efectuar las operaciones con orden para simplificarnos considerablemente el trabajo.

Ejemplos

7. Halla el área encerrada por la curva $y = x^2 + x - 6$, el eje OX y las rectas $x = -4$ y $x = 1$.

Solución:

En primer lugar hallamos los puntos de corte de la función con el eje OX resolviendo la ecuación $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = -3, 2 \Rightarrow$ y a la vista de las soluciones, descomponemos el intervalo de integración $[-4, 1]$en tantos trozos como ceros tenga la función en su interior: $[-4, 1] \rightarrow [-4, -3] \cup [-3, 1]$, con lo que el área será:

$$Área = \left|\int_{-4}^{-3}\left(x^2 + x - 6\right)dx\right| + \left|\int_{-3}^{1}\left(x^2 + x - 6\right)dx\right| = \left|F(-3) - F(-4)\right| + \left|F(1) - F(-3)\right|.$$

Hallamos la primitiva, la evaluamos y hacemos los cálculos:

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(-4) = \frac{32}{3} \\ F(-3) = \frac{27}{2} \\ F(1) = -\frac{31}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow A = \left|\frac{27}{2} - \frac{32}{3}\right| + \left|-\frac{31}{6} - \frac{27}{2}\right| = \frac{129}{6}u^2 = \frac{43}{2}u^2.$$

8. Halla el área encerrada por la función $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$.

Solución:

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

2º) $[-2, 2] \rightarrow [-2, 0] \cup [0, 2]$

3º) $A = \left|\int_{-2}^{0} x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{2} x^3 dx\right| = |F(0) - F(-2)| + |F(2) - F(0)|$

4º) $F(x) = \dfrac{x^4}{4} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(-2) = 4 \\ F(0) = 0 \\ F(2) = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |0-4| + |4-0| = 4 + 4 = 8\,u^2.$

9. Halla el área encerrada por $y = \dfrac{3}{x+7}$, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = -6$.

Solución:

1º) $f(x) \neq 0$ *pues* $3 \neq 0 \Rightarrow A = \left|\int_{-6}^{1} \dfrac{3}{x+7} dx\right|$

2º) $F(x) = 3\ln|x+7| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(1) = 3\ln 8 \\ F(-6) = 3\ln 1 = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |F(1) - F(-6)| = 3\ln 8\, u^2.$

10. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $y = -x^2 + 5x - 6$ y el eje de las x.

Solución:

Al pedirnos el área sin darnos límites, éstos son los puntos de corte de la función con el eje OX.

1º) $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $x = 3$.

2º) $A = \left|\int_{2}^{3} \left(-x^2 + 5x - 6\right) dx\right|$

3º) $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5x^2}{2} - 6x \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(3) = -\dfrac{9}{2} \\ F(2) = -\dfrac{14}{3} \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |F(3) - F(2)| = \left|-\dfrac{9}{2} + \dfrac{14}{3}\right| = \dfrac{1}{6}\,u^2.$

11. Halla el área limitada por la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ si } x < -\frac{1}{2} \\ -x^2 + 3x, \text{ si } -\frac{1}{2} \le x \le 3 \\ |x+3|, \text{ si } x > 3 \end{cases}$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 3$.

Solución:

Al ser una función definida a trozos, debemos integrar la función o funciones que estén en el intervalo de integración. En este caso, dicho intervalo es [0,3], con lo cual $f(x) = -x^2 + 3x$. Ahora seguimos el procedimiento habitual:

$$f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x = 0, 3 \Rightarrow A = \left|\int_{0}^{3} \left(-x^2 + 3x\right) dx\right| \Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F(3) = \frac{9}{2} \\ F(0) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow A = |F(3) - F(0)| = \frac{9}{2}\,u^2.$$

12. Una fábrica arroja diariamente material contaminante a una balsa según un ritmo dado por la función $m(t) = 0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1$, siendo $m(t)$ la cantidad de material en kg y t la hora del día. ¿Cuánto material arroja cada día?

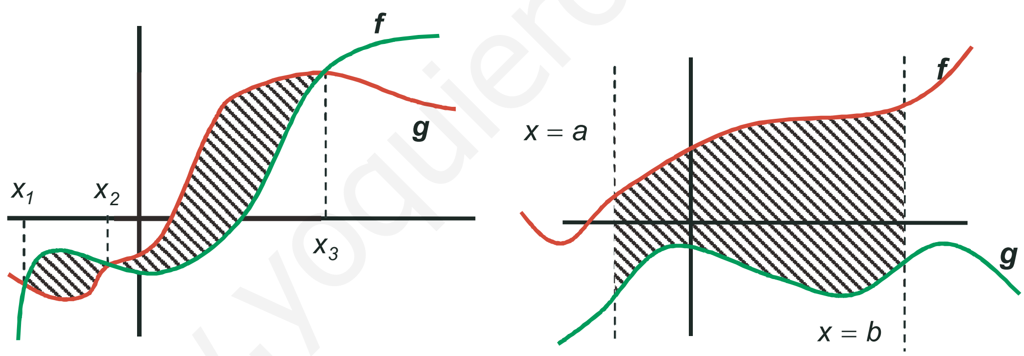
Solución:

Está claro que para calcular la cantidad de material, deberíamos calcular el valor de m para todo valor de t entre 0 y 24 h, y después sumar todos esos valores. Recordemos que la suma de una gran cantidad de valores se hace a través de la integral. Por lo tanto:

$$C = \int_0^{24} m(t)dt = \int_0^{24} \left(0{,}01t^3 - 0{,}2t^2 + t + 1\right)dt \Rightarrow F(t) = \frac{0{,}01t^4}{4} - \frac{0{,}2t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F(24) = 219{,}84 \\ F(0) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \left|F(24) - F(0)\right| = 219{,}84\ kg.$$

¿Cómo podemos calcular el área encerrada por dos funciones? Si las dos funciones se cortan en más de un punto, determinan una o varias regiones que tienen un área, sin necesidad de rectas verticales que la delimiten. Si no se cortan, necesitaremos de rectas verticales para poder averiguar el área encerrada por las dos funciones. Observa ambas situaciones en los gráficos:



En cualquier caso, parece claro que el área encerrada por f y g se puede calcular averiguando primero la de f y después restándole la de g. Teniendo en cuenta las propiedades de linealidad de la integral, podemos calcular la integral de la diferencia de f y g, lo que nos dará el mismo resultado. Por ello, se usa una función auxiliar definida como $h(x) = f(x) - g(x)$, con lo que pasaríamos a calcular el área encerrada por una función $h(x)$ y el eje OX, pues en aquellos puntos en los que $f(x) = g(x)$ tendríamos que $h(x) = 0$, que son los puntos de corte de h con el eje OX. De este modo, al usar h, no tenemos más que seguir los pasos ya vistos. Evidentemente, nuestra función auxiliar h puede definirse también como $h(x) = g(x) - f(x)$. Se usa una u otra forma según cuál sea la más cómoda.

Ejemplos

13. Halla el área encerrada por las funciones $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ e $y = -3x^2 + 6x$.

Solución:

Como en el cálculo del área usamos un valor absoluto, es indiferente a quién llamemos f y a quién g. Por ejemplo, si $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$ y $g(x) = -3x^2 + 6x$, entonces $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - x^2 - 2x$. Por lo tanto:

$$h(x)=0\Rightarrow x\left(x^2-x-2\right)=0\Rightarrow x=-1,0,2.\Rightarrow A=\left|\int_{-1}^{0}h(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{2}h(x)dx\right|\Rightarrow$$

$$H(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-x^2\Rightarrow\begin{cases}H(-1)=-\frac{5}{12}\\H(0)=0\\H(2)=-\frac{8}{3}\end{cases}\Rightarrow A=\left|H(0)-H(-1)\right|+\left|H(2)-H(0)\right|=\frac{37}{12}u^2.$$

14. Halla el área encerrada por las funciones $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$.

Solución:

Haciendo $f(x) = x^2$, $g(x) = -x^2 + 4x \Rightarrow h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 - 4x$;

$$h(x)=0\Rightarrow 2x^2-4x=0\Rightarrow x=0,2\Rightarrow A=\left|\int_{0}^{2}\left(2x^2-4x\right)dx\right|\Rightarrow H(x)=\frac{2x^3}{3}-2x^2\Rightarrow\begin{cases}H(2)=-\frac{8}{3}\\H(0)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\left|H(2)-H(0)\right|=\frac{8}{3}u^2.$$

15. Calcula el área determinada por la curva $y = 4x^3$ y la recta $y = x$.

Solución:

$$h(x)=4x^3-x\Rightarrow h(x)=0\Rightarrow x\left(4x^2-1\right)=0\Rightarrow x=0,\pm\frac{1}{2}\Rightarrow A=\left|\int_{-1/2}^{0}h(x)dx\right|+\left|\int_{0}^{1/2}h(x)dx\right|\Rightarrow H(x)=x^4-\frac{x^2}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}H\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}\\H(0)=0\\H\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{16}\end{cases}\Rightarrow A=\left|H(0)-H\left(-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|H\left(\frac{1}{2}\right)-H(0)\right|=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8}u^2.$$

16. Halla el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = 4 - x^2$, $y = x + 2$.

Solución:

$$f(x)=x+2;g(x)=4-x^2\Rightarrow h(x)=x^2+x-2\Rightarrow h(x)=0\Rightarrow x=-2,1\Rightarrow A=\left|\int_{-2}^{1}h(x)dx\right|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\Rightarrow\begin{cases}H(1)=-\frac{7}{6}\\H(-2)=\frac{10}{3}\end{cases}\Rightarrow A=\left|H(1)-H(-2)\right|=\left|-\frac{7}{6}-\frac{10}{3}\right|=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}u^2.$$

17. Halla el área comprendida entre la recta $y = x$ y la curva $y = x^3 - 3x$.

Solución:

$$f(x) = x^3 - 3x \,;\, g(x) = x \Rightarrow h(x) = x^3 - 4x \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x\left(x^2 - 4\right) = 0 \Rightarrow x = -2\,,0\,,2 \Rightarrow A = \left|\int_{-2}^{0} h(x)dx\right| + \left|\int_{0}^{2} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 \Rightarrow \left.\begin{cases} H(-2) = -4 \\ H(0) = 0 \\ H(2) = -4 \end{cases}\right\} \Rightarrow A = |H(0) - H(-2)| + |H(2) - H(0)| = 4 + 4 = 8\,u^2.$$

18. Halla el área de la región comprendida entre las curvas determinadas por $f(x) = 4 - x^2$, $g(x) = 3x^2$.

Solución:

$$h(x) = g(x) - f(x) = 4x^2 - 4 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A = \left|\int_{-1}^{1} h(x)dx\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{4x^3}{3} - 4x \Rightarrow \left.\begin{cases} H(-1) = \dfrac{8}{3} \\ H(1) = -\dfrac{8}{3} \end{cases}\right\} \Rightarrow A = |H(1) - H(-1)| = \frac{16}{3}\,u^2.$$

19. Calcula el área limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 9$, $g(x) = x^2 - x - 9$ y las rectas $x = -2$, $x = 6$.

Solución:

$h(x) = f(x) - g(x) = x - 3 \Rightarrow h(x) = 0 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow$ Hay que dividir el intervalo $[-2,6]$ en 2 trozos $[-2,3] \cup [3,6]$,

con lo que el área queda: $A = \left|\int_{-2}^{3} (x-3)\,dx\right| + \left|\int_{3}^{6} [x-3]\,dx\right| \Rightarrow H(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x \Rightarrow \left.\begin{cases} H(-2) = 8 \\ H(3) = -\dfrac{9}{2} \\ H(6) = 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A = |H(3) - H(-2)| + |H(6) - H(3)| = \left|-\frac{9}{2} - 8\right| + \left|0 - \left(-\frac{9}{2}\right)\right| = \frac{25}{2} + \frac{9}{2} = 17\,u^2.$$

Actividades

13. Calcula $\int_{-1}^{1} \left(|x| + x + 1\right) dx$, donde $|x|$ indica el valor absoluto de x.

14. Halla el área de la región plana acotada por la gráfica $y = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas.

15. Calcula $\int_{0}^{1} \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1} dx$.

16. Halla el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de la función $f(x)=\begin{cases}-2x, \, si \; x\le 0\\ x-1, \, si \; 0<x\le 2\\ 3x-5, \, si \; x>2\end{cases}$, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$, $x = 3$.

17. Calcula el valor de $a > 0$ en los siguientes casos: **a)** $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx=a$; **b)** $\int_0^a \frac{1}{x+1}dx=3$; **c)** $\int_0^3 \frac{1}{x+a}dx=5$.

18. Calcula el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x) = xe^{x^2}$ para $x \ge 0$, el eje OX y la recta $x = 2$.

19. En una pared azul de 8 m de altura se quiere pintar de blanco la figura que encierran las funciones $y = -x^2 + 3x + 4$ e $y = 2x^2 - 3x + 4$, ambas definidas en metros.

a) ¿Cuántos metros cuadrados hay que pintar de blanco?

b) Si la pared tiene 23 m de longitud y se quiere repetir la figura dejando 5 m entre cada una de ellas, ¿cuánto costaría pintar dichas figuras, si cada metro cuadrado de blanco cuesta 2 €?

20. Halla el área encerrada por $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$, la recta $x=5$ y la función $g(x)=\frac{1}{x}$.

21. Calcula el área del recinto limitado por las curvas $y=\sqrt{2x}$ e $y=\frac{x^2}{2}$.

22. Determina el valor de $a > 0$ para que el área de la región plana acotada limitada por las gráficas de las curvas $y = x^3$ e $y = ax$ sea igual a $4u^2$.

23. Averigua el área del recinto limitado por la gráfica de $y = x^3 + 5x^2 + 2x - 8$ y el eje OX.

24. Halla una primitiva de la función $f(x)=27-x^3+3e^{2x-1}$ que valga 26,75 en $x = 1$.

25. La parte superior de una pared de 2 m de base tiene una forma parabólica determinada por la expresión $-0{,}5x^2 + x + 1$, donde x mide la longitud en metros desde la parte izquierda de la pared. Calcula la superficie de dicha pared utilizando una integral.

26. Halla el área de la región limitada por las gráficas $f(x) = x^3 - x$ y $g(x) = x^2 + x$.

27. Calcula las siguientes integrales: **a)** $\int_0^{\pi}\left(x^3+senx\right)dx$; **b)** $\int_0^1 xe^{5x^2+1}dx$.

28. Halla el área del recinto plano delimitado por $y = x^2 + 1$, $y = 3$.

29. Calcula las siguientes integrales: **a)** $\int_{\pi/4}^{\pi/3}\frac{\cos x}{senx}dx$; **b)** $\int_0^1 \frac{e^{2x}+e^x}{\left(e^x+1\right)^2}dx$.

30. Determina el valor de a para que el área comprendida entre la parábola $y = x^2 + ax$ y la recta $y + x = 0$ sea $36u^2$.

31. Calcula las siguientes integrales: **a)** $\int_0^{\pi}\left(3\cos x-\frac{4}{x+1}\right)dx$; **b)** $\int_{-1}^1 \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$.

32. Sea la función $f(x) = x^3 - 9x$.

a) Calcular sus extremos relativos y los puntos de inflexión.

b) Calcular el área del recinto plano acotado limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x = -1$, $x = 1$.

33. Sean las funciones $y = x^3 - 4x^2 + 4x$, $y = -3x^2 + 6x$. Represéntalas y determina el área encerrada por ambas.

34. Dada la función, definida en los reales salvo en $x = 0$, $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x}$, calcúlense:

a) las coordenadas de sus máximos y mínimos relativos;

b) el área de la región plana acotada limitada por la gráfica de $f(x)$ y el semieje positivo OX.

35. Sean las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$, $\quad g(x) = -x^2 + c$.

a) Determínense a, b y c sabiendo que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (–2,–3) y (1,0).

b) Hállese la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x)$ en el punto (–2,–3).

c) Calcúlese el área de la región limitada por las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$.

RECUERDA

- *F* es una **función primitiva o primitiva** de *f* si $F'(x) = f(x)$.
- **Integral indefinida:** $\int f = F + k$ ó $\int f(x)dx = F(x) + k$.
- **Tabla de integrales inmediatas:**

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k,\ n \neq -1$	$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + k$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + k$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + k$	$\int e^x dx = e^x + k$	$\int (1 + tg^2 x) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg x + k$

- **Propiedades de linealidad:**
  - $\int (f+g) = \int f + \int g \equiv$ La integral de una suma es igual a la suma de las integrales.
  - $\int (\lambda f) = \lambda \int f \equiv$ La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.
- Las dos propiedades anteriormente enunciadas se pueden expresar abreviadamente como: $\int (\lambda f + \mu g) = \lambda \int f + \mu \int g$.
- **Teorema fundamental del cálculo:** $\int_a^x f(t)dt = F(x) + k$.
- **Regla de Barrow:** $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$.
- **Área encerrada por una función y la parte positiva del eje OX:**

$$Área = \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_2}^{x_3} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_3}^{b} f(x)dx\right|.$$

- **Área encerrada por dos funciones *f* y *g*:** se define la función auxiliar $h(x) = f(x) - g(x)$ y se calcula el área encerrada por *h* y la parte positiva del eje *OX*.