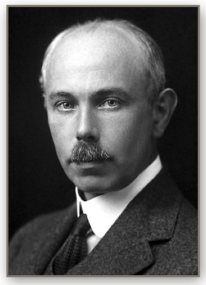
1. Se lanza un **protón** en la dirección del eje X a través de un selector de velocidad dentro de un **espectrómetro de masas**. El selector está formado por un campo eléctrico $\vec{E} = 2\cdot 10^4\ \vec{j}\ \dfrac{V}{m}$ y un campo magnético $B = 1{,}50\ T$. El campo magnético para desviar la trayectoria de las cargas a la salida (en la **cámara de desviación**) es $B_0 = 5\ T$ en la dirección del eje Z. Datos: $m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ kg\ ,\ q_p = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C$

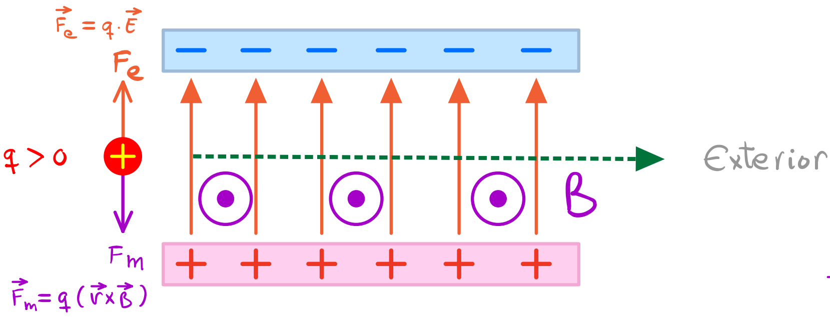


Francis Aston

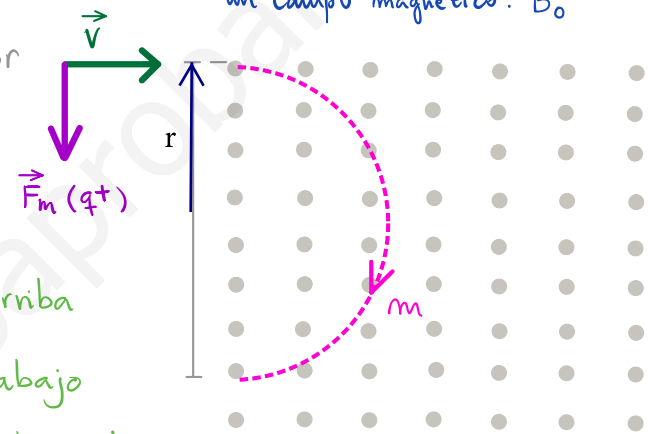
a) Dibuja un **esquema**. Calcula la **dirección** que debería tener el **vector campo magnético** del **selector** para que pueda pasar **sin desviarse**. (0,75 pt.)

b) Calcula la **velocidad seleccionada** cuando se equilibran las fuerzas eléctrica y magnética. (**Demuestra la fórmula**) (1 pt.)

c) Calcula el **radio** de la **trayectoria** del **protón** dentro de la **cámara de desviación**. **(Demuestra la fórmula)** (1,25 pt.)



En la zona de desviación sólo hay un campo magnético: $\vec{B}_0$



Campo magnético hacia fuera

La fuerza eléctrica $\vec{F}_e = +q\cdot E\,(\vec{j})$ hacia arriba

La fuerza magnética $\vec{F}_m = +q\cdot v\cdot B\,(-\vec{j})$ hacia abajo

La fuerza de Lorentz $\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$ para contrarrestar

Como $\vec{F}_m = q\cdot\vec{v}\times\vec{B} \Rightarrow \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j} \Rightarrow \vec{B} = B\cdot\vec{k} \Rightarrow \vec{B} = 1{,}5\,\vec{k}\ T$ para que $\vec{F}_m$ sea vertical.

b) La velocidad seleccionada se adquiere cuando $|\vec{F}_m| = |\vec{F}_e|$; trabajamos con los módulos:

$$|q|\cdot v\cdot B = |q|\cdot E \Rightarrow v\cdot B = E \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}} = \frac{2\cdot 10^4\ \vec{j}\ N/C}{1{,}5\ T} \simeq 1{,}33\cdot 10^4\ m/s$$

Vectorialmente: $\vec{F} = q\cdot(E - vB)\,\vec{j} \Rightarrow$ Si $E - v\cdot B = 0 \Rightarrow \boxed{v = \frac{E}{B}} \Rightarrow \vec{F}_e + \vec{F}_m = 0$

c) Fuera del selector $\vec{v}\perp\vec{B}_0 \Rightarrow \boxed{F_m = F_c} \Rightarrow |q|\cdot \cancel{v}\cdot B_0 = m\cdot\dfrac{v^{\cancel{2}}}{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{r = \frac{m\cdot v}{|q|\cdot B_0}}$$ Radio de curvatura $$\Rightarrow r = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}\ kg\cdot 1{,}33\cdot 10^4\ m/s}{1{,}6\cdot 10^{-19}\ C\cdot 5\ T} = 2{,}8\cdot 10^{-5}\ m$$

en la cámara de desviación

2. Dos **conductores rectilíneos** A y B, **paralelos** y largos, están situados en el plano YZ en la dirección del eje Z (podemos dibujar la dirección Z hacia arriba e Y hacia la derecha). Conducen corrientes **en sentidos contrarios** de la misma intensidad $I = 12\ A$. La **distancia** entre ambos conductores es de $80\ cm$. Dato: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ TmA^{-1}$

a) Haz un **dibujo** de la situación. Calcula el **vector campo magnético en el punto medio** de la distancia que separa los conductores. (1,5 pt.)

b) Calcula la **fuerza magnética** (módulo) **por unidad de longitud** entre los conductores. (1 pt.)

c) **Justifica** vectorialmente si los conductores se **atraen** o se **repelen**. (0,5 pt.)

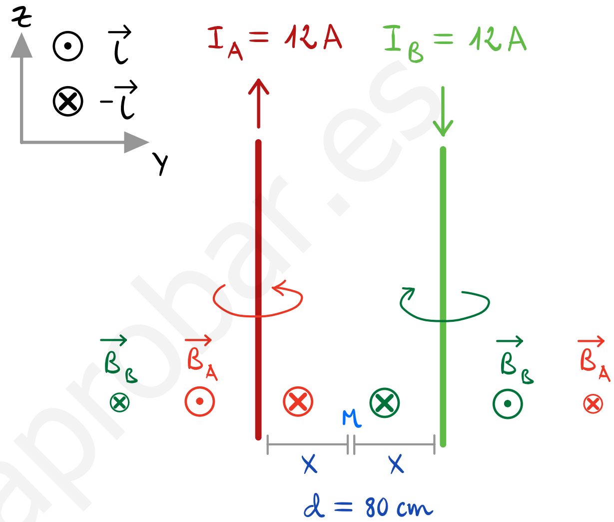
a) $d = 80\ cm \Rightarrow x = 40\ cm$ (distancia al punto medio)

$$\vec{B}_M = \vec{B}_A + \vec{B}_B = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi x}(-\vec{i}) + \frac{\mu_0 I_B}{2\pi x}(-\vec{i})$$

$$\vec{B}_M = \cancel{2}\cdot\frac{\mu_0 I}{\cancel{2}\pi x}(-\vec{i})$$; hemos sacado el factor común.

$$\vec{B}_M = -\frac{4\cancel{\pi}\cdot 10^{-7}\cdot 12A}{\cancel{\pi}\cdot 40\cdot 10^{-2}m} = -1,2\cdot 10^{-5}\ \vec{i}$$

Campo total en el punto medio



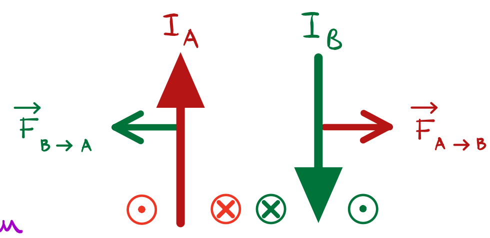
b) $\boxed{\vec{F}_m = I\cdot(\vec{l}\times\vec{B})}$ Ley de Laplace

$$F_{A\to B} = I_B\cdot l_B\cdot B_A\ ,\quad B_A = \frac{\mu_0 I_A}{2\pi d} \Rightarrow \frac{F_{A\to B}}{l_B} = I_B\cdot\frac{\mu_0 I_A}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}$$ dado que $I_A = I_B$

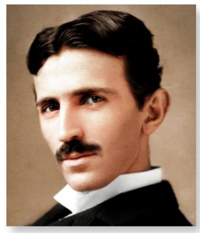
Del mismo modo: $$\boxed{\frac{F_{B\to A}}{l_A} = \frac{F_{A\to B}}{l_B} = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d}} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot(12A)^2}{2\pi\cdot 0,8m} = 3,6\cdot 10^{-5}\ \frac{N}{m}$$

c) $\boxed{\vec{F}_m = I\cdot(\vec{l}\times\vec{B})}$ 1ª ley de Laplace

$$\left.\begin{aligned}\vec{F}_{A\to B} &\Rightarrow \vec{l}_B\times\vec{B}_A \Rightarrow (-\vec{k})\times(-\vec{i}) = \vec{j}\\ \vec{F}_{B\to A} &\Rightarrow \vec{l}_A\times\vec{B}_B \Rightarrow (+\vec{k})\times(-\vec{i}) = -\vec{j}\end{aligned}\right\}$$ Los hilos se repelen



3. Un **alternador** formado por un conductor compuesto de 500 **espiras circulares** de $2\ cm$ de **radio** se halla en el seno de un **campo magnético uniforme** de $0{,}25\ T$. En $t = 0$, la espira comienza a **rotar uniformemente** con respecto a uno de sus diámetros, de manera que el **período** de la **rotación** es de $0{,}3\ s$.



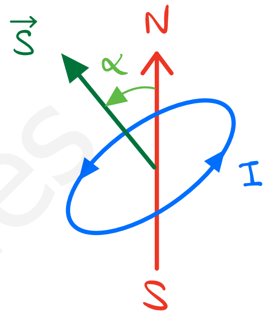
Nikola Tesla

a) Calcula la expresión general del **flujo magnético en función del tiempo**. (1 pt.)

b) Calcula la $f.e.m.$ **inducida** en el conductor en el instante $t = 1\ s$. (1 pt.)

a) $\boxed{\phi_m = B \cdot S \cdot \cos\alpha} = B \cdot N \cdot \pi r^2 \cdot \cos \omega t$, flujo magnético

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}3s} = \frac{20\pi}{3}\ \frac{rad}{s}$, $\alpha = \omega t = \frac{20\pi}{3} t$



$B = 0{,}25\ T$, $S = 500 \cdot \pi r^2 = 500 \cdot \pi \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2\ m^2 = 0{,}628\ m^2$

$\phi_m = 0{,}25\ T \cdot 0{,}628\ m^2 \cdot \cos\left(\frac{20\pi}{3} \cdot t\right) =$

$\phi_m = 0{,}157 \cdot \cos\left(\frac{20\pi}{3} \cdot t\right)$ $[T \cdot m^2 = Wb]$ No hay fase inicial.

b) $\boxed{\varepsilon = -\frac{d\phi_m}{dt}} = \cancel{-} B \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot (\cancel{-} \text{sen}\ \omega t) = B \cdot N \cdot S \cdot \omega \cdot \text{sen}\ \omega t$ Ley de Faraday-Henry

$\varepsilon = -\frac{d}{dt}\ 0{,}157 \cdot \cos\left(\frac{20\pi}{3} \cdot t\right) = 0{,}157 \cdot \frac{20\pi}{3} \cdot \text{sen}\left(\frac{20\pi}{3} \cdot t\right)$ $[V]$

El pico máximo $\varepsilon_0 = 0{,}157 \cdot \frac{20\pi}{3} = 3{,}29\ V$

$\varepsilon(t = 1s) = 3{,}29 \cdot \text{sen}\left(\frac{20\pi}{3} \cdot 1\right) \simeq 2{,}83\ V$

4. 💡 **CUESTIÓN (Justifica la respuesta):** Cuando una partícula cargada se mueve dentro de un campo magnético, la **fuerza magnética** que actúa sobre ella realiza un **trabajo** que siempre es:

a) **Positivo**, si la **carga** es **positiva**.

b) **Positivo, sea como sea la carga**.

c) **Cero**. (1 pt.)

El trabajo realizado $W = \vec{F}_m \cdot \vec{r} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{r}$

Como $\left.\begin{matrix} \vec{v} \perp \vec{v} \times \vec{B} \\ \vec{v} \parallel \vec{r} \end{matrix}\right\}$ tenemos el producto escalar de dos vectores perpendiculares, es decir, nulo: $\boxed{W = 0}$

El trabajo es nulo independientemente del signo de la carga.

La fuerza magnética es siempre perpendicular al desplazamiento $\vec{F}_m \perp \vec{r}$.

La fuerza magnética no realiza trabajo sobre una carga, luego no varía su energía cinética.

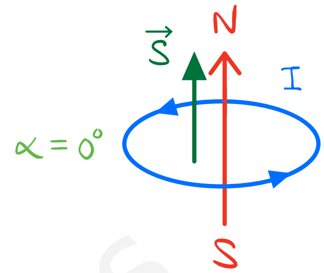
El campo magnético no puede variar el módulo de la velocidad, pero sí su dirección (desvía la trayectoria)

La respuesta correcta es la c

5. 💡 **CUESTIÓN (Justifica la respuesta):** Calcula **teóricamente** la **autoinducción** de un circuito de N **espiras** de radio r .

a) $L = \dfrac{\mu_0 N \pi r}{2}$ b) $L = \dfrac{\mu_0 N \pi r^2}{2}$ c) $L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi r}{2}$ (1 pt.)

Autoinducción de N espiras circulares. Vamos a calcular la f.e.m.



Es un conductor circular de campo magnético $\boxed{B = \dfrac{\mu_0 I N}{2r}}$

$\phi_m = B \cdot S \cdot \cos\alpha$ donde $\vec{B}$ es el propio campo magnético.

$\phi_m = \dfrac{\mu_0 I N}{2 \cancel{r}} \cdot N \pi r^{\cancel{2}} \cdot \cos 0° = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi r}{2} \cdot I = L \cdot I \Rightarrow \boxed{L = \dfrac{\mu_0 N^2 \pi r}{2}}$ Autoinducción de N espiras

La respuesta correcta es la c

COMPLEMENTARIO 2: 💡 **CUESTIÓN (Justifica la respuesta):**
Demuestra teóricamente el **incremento de energía cinética** de las cargas que parten del reposo dentro de un **ciclotrón** después de describir **una vuelta** completa:

a) $q \cdot \Delta V$ b) $2 \cdot q \cdot \Delta V$ c) $4 \cdot q \cdot \Delta V$ (1 pt.)


Ernest Lawrence

Una carga que parte del reposo se acelera en la franja con campo eléctrico:

$W = -q \cdot \Delta V = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_1^2 - 0 \Rightarrow \Delta E_c = -q \cdot \Delta V$

La ΔV alterna (cambia de signo) y la carga se vuelve a acelerar:

$-q \cdot \Delta V = \Delta E_c = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$

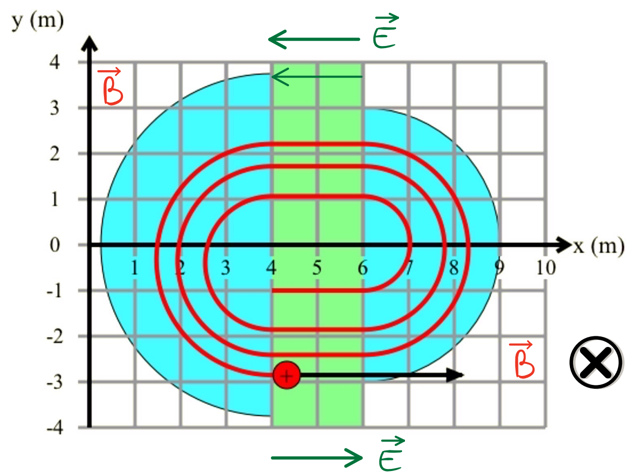
$-q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow -q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2 + q \cdot \Delta V$

$-2q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} m v_2^2$ y así sucesivamente.

La Energía cinética (tras dos pasos) es:

$E_c = \frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = \frac{1}{2} \cancel{m} \cdot \dfrac{4 \cdot q \cdot \Delta V}{\cancel{m}} = -2 q \cdot \Delta V$

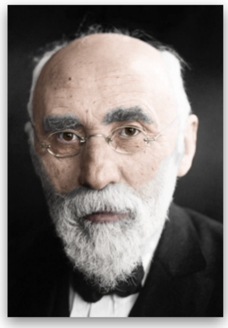
que representa el ΔE_c desde el inicio.



$\Delta V = -E \cdot d$

La opción correcta es la b (en valor absoluto).

COMPLEMENTARIO 1: Un **electrón** se mueve en el eje X a una velocidad de $3 \cdot 10^5\ m/s$, y otro se mueve en el eje Y a $5 \cdot 10^5\ m/s$. En cierto instante, el primer electrón se encuentra en $A(2{,}0{,}0)$ y el segundo en $B(0,-3{,}0)$, con las distancias expresadas en **metros**.



Hendrik Lorentz

a) Calcula el **vector campo magnético total** creado por los dos electrones en el punto $P(0{,}0{,}1)$. (1 pt.)

b) ¿Qué **fuerza magnética** ejerce el **primer electrón** sobre el **segundo**? (0,5 pt.)

Datos: $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}\ C,\ \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ TmA^{-1}$

a) Calculamos primero los vectores unitarios que van de A y B hasta P.

$$\vec{u}_{AP} = \frac{P-A}{|\vec{AP}|} = \frac{(0,0,1)-(2,0,0)}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{(-2,0,1)}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$$; la distancia es $\sqrt{5}$ m.

$$\vec{u}_{BP} = \frac{P-B}{|\vec{BP}|} = \frac{(0,0,1)-(0,-3,0)}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{(0,3,1)}{\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{10}}\vec{k}$$; la distancia es $\sqrt{10}$ m.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r}$$ Campo magnético creado por una carga puntual ; Las velocidades $\begin{cases} \vec{v}_A = 3 \cdot 10^5\ \vec{i}\ m/s \\ \vec{v}_B = 5 \cdot 10^5\ \vec{j}\ m/s \end{cases}$

$$\vec{B}_{AP} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (-1{,}6) \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot \sqrt{5}^{\,2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 \cdot 10^5 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = \frac{10^{-26}}{5} \cdot (-1{,}6) \cdot \left(-\vec{j} \cdot \frac{3 \cdot 10^5}{\sqrt{5}} \right) T$$

$$\vec{B}_{AP} = 4{,}3 \cdot 10^{-22}\ \vec{j}\ T$$

$$\vec{B}_{BP} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (-1{,}6) \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot \sqrt{10}^{\,2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{vmatrix} = \frac{10^{-26}}{10} \cdot (-1{,}6) \cdot \left(\vec{i} \cdot \frac{5 \cdot 10^5}{\sqrt{10}} \right) T$$

$$\vec{B}_{BP} = -2{,}53 \cdot 10^{-22}\ \vec{i}$$

El campo total: $\vec{B}_P = -2{,}53 \cdot 10^{-22}\ \vec{i} + 4{,}3 \cdot 10^{-22}\ \vec{j}\ T$

b) La fuerza de Lorentz $\boxed{\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})}$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{B-A}{|\vec{AB}|} = \frac{(0,-3,0)-(2,0,0)}{\sqrt{2^2+3^2}} = \frac{(-2,-3,0)}{\sqrt{13}} = -\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{13}}\vec{j}$$; la distancia es $\sqrt{13}$ m.

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi r^2} \cdot \vec{v} \times \vec{u}_r}$$

Campo magnético creado por una carga puntual

$$\vec{B}_{AB} = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot (-1{,}6) \cdot 10^{-19}}{4\pi \cdot \sqrt{13}^{\,2}} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 \cdot 10^5 & 0 \\ -\frac{2}{\sqrt{13}} & \frac{1}{\sqrt{13}} & 0 \end{vmatrix} = \frac{10^{-26}}{13} \cdot (-1{,}6) \cdot \left(\vec{k} \cdot \frac{2 \cdot 5 \cdot 10^5}{\sqrt{13}} \right) \text{ T}$$

$$\vec{B}_{BP} = -3{,}41 \cdot 10^{-22}\, \vec{k} \text{ T}$$

$$\vec{F}_{AB} = q_B \cdot (\vec{v}_B \times \vec{B}_{AB}) = -1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}41 \cdot 10^{-22} \end{vmatrix} = 2{,}73 \cdot 10^{-35}\, \vec{i} \text{ N}$$