PROBLEMAS DE FÍSICA MODERNA RESUELTOS

La masa en reposo de un electrón es $9{,}1\cdot10^{-31}$ *kg*. ¿Cuál es su masa relativista si su velocidad es $0{,}8c$?

Solución

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}}{\sqrt{1-\left(0{,}8\cancel{c}/\cancel{c}\right)^2}}=\frac{9{,}1\cdot10^{-31}}{0{,}6}=\mathbf{15{,}2\times10^{-31}\ kg}$$

* *

La energía de un protón es tres veces su energía en reposo.

a) ¿Cuál es la energía en reposo del protón?
b) ¿Cuál es la velocidad del protón?
c) ¿Cuál es la energía cinética del protón?

Datos: $m_0(protón)=1{,}67\cdot10^{-27}\ kg;\ 1\ eV=1{,}6\cdot10^{19}\ J.$

Solución

Apartado a)

$$E_0=m_0c^2=1{,}67\cdot10^{-27}\times\left(3.10^8\right)^2=1{,}5\cdot10^{-10}\ J$$

Lo habitual es expresar estas energías tan pequeñas en *eV* (electrón voltios). Recuerda que, $1eV=1{,}6\cdot10^{-19}\ J\ \Rightarrow\ 1\ J=\frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ eV$

Así que, $$E_0=1{,}5\cdot10^{-10}\ J=1{,}5\cdot10^{-10}\ \frac{1}{1{,}6\cdot10^{-19}}\ eV=9{,}39\cdot10^{6}\ eV=939\ MeV$$

Apartado b)

$$\left.\begin{aligned}E&=3E_0=3m_0c^2\\ E&=mc^2=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ \frac{\cancel{m_0c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=3\cancel{m_0c^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=3\ \Rightarrow\ \sqrt{1-v^2/c^2}=1/3\ \Rightarrow\ 1-v^2/c^2=1/9\ \Rightarrow\ v=\sqrt{\frac{8}{9}}\ c=0{,}943c$$

Apartado c)

$$\left.\begin{aligned}E=E_0+E_c\ \Rightarrow\ E_c&=E-E_0\\ E&=3E_0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ E_c=3E_0-E_0=2E_0=2\times939=1{,}88\cdot10^{3}\ MeV$$

La energía en reposo de un electrón es 0,511 *MeV*. Si el electrón se mueve con una velocidad 0,8*c*, siendo *c* la velocidad de la luz en el vacío.

a) ¿Cuál es la masa relativista del electrón para esta velocidad?

b) ¿Cuál es la energía relativista total?

Datos: $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

Solución

Apartado a)

$$E_0 = m_0 c^2 \ \Rightarrow\ m_0 = \frac{E_0}{c^2} = \frac{0,511 \cdot 10^6\ eV}{(3 \cdot 10^8\ m/s)^2} = \frac{0,511 \cdot 10^6 \times 1,6 \cdot 10^{-19}\ J}{(3 \cdot 10^8\ m/s)^2} = 9,08 \cdot 10^{-31}\ kg$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0,8c/c)^2}} = \frac{9,08 \cdot 10^{-31}}{0,6} = \mathbf{1,51 \times 10^{-30}}\ kg$$

Apartado b)

$$E = mc^2 = 1,51 \cdot 10^{-30} \times \left(3 \cdot 10^8\right)^2 = 1,36 \cdot 10^{-13}\ J = \frac{1,36 \cdot 10^{-13}}{1,6 \cdot 10^{-19}} eV = 8,52 \cdot 10^5\ eV = \mathbf{0,852}\ MeV$$

* *

Una partícula de 1 *mg* es acelerada desde el reposo hasta que alcanza una velocidad $v = 0,6c$, siendo *c* la velocidad de la luz en el vacío. Se pide:

a) La masa de la partícula cuando se mueve a la velocidad *v*.

b) La energía que ha sido necesario suministrar a la partícula para que alcance la velocidad *v*.

Dato: velocidad de la luz en el vacío, $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$.

Solución

Apartado a)

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1\ mg}{\sqrt{1 - (0,6c/c)^2}} = \frac{1\ mg}{0,8} = \mathbf{1,25}\ mg$$

Apartado b)

$$\Delta E = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2 = (m - m_0)c^2 = (1,25 - 1) \cdot 10^{-6}\ kg \times (3 \cdot 10^8\ m/s^2) = \mathbf{2,25 \times 10^{10}}\ \boldsymbol{J}$$

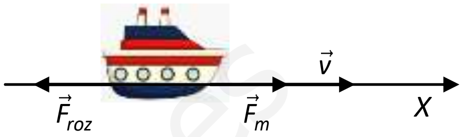
Un pequeño barco navega un día en el que el mar está en calma. Su velocidad se mantiene constante porque el motor ejerce una fuerza igual y opuesta a la del rozamiento del agua. Se pone a llover copiosamente, de modo que el agua recogida en la cubierta hace que la masa del barco vaya aumentando. ¿Se mantendrá constante la velocidad del buque? Justifica la respuesta.
<u>Nota</u>: La fuerza de rozamiento del agua no depende de la masa del barco.

Solución

Hagamos que el barco se mueva a lo largo del eje OX positivo. De este modo, como las fuerzas y la velocidad tienen la dirección de OX, podemos expresar la 2ª ley de Newton en su forma escalar.

Como la velocidad del barco es constante,

$$\vec{v} = cte \;\Rightarrow\; \vec{F}_R = \vec{F}_m + \vec{F}_{roz} = 0$$



donde $\vec{F}_R$ es la fuerza resultante que actúa sobre el barco. Por otro lado la 2ª ley de Newton establece que,

$$\vec{F}_R = d\vec{p}/dt$$

Expresando la ecuación en su forma escalar y teniendo en cuenta que la masa no es constante y que la fuerza resultante es cero, tenemos que,

$$F_R = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt} = \frac{dm}{dt}v + ma = 0$$

Pero $(dm/dt)v > 0$ porque la masa aumenta y $v > 0$; por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{dm}{dt}v + ma = 0 \\ (dm/dt)v > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow ma < 0 \Rightarrow a < 0$$

y como a y v tienen distinto signo, el movimiento es decelerado; es decir, la velocidad del barco disminuye.

Un neutrón cuya masa en reposo es 1,675·10^{-27} *kg* se acelera hasta que su masa relativista sea cuatro veces la masa en reposo.

a) ¿Cuál será entonces la energía cinética del electrón.

b) Tenemos ahora 10^{14} neutrones que se frenan desde la situación citada hasta el reposo. ¿Cuántas bombillas de 100 *W* podrán lucir durante un segundo con la energía de esos neutrones?

Solución

Apartado a): de acuerdo con la ecuación que expresa la energía cinética relativista de una partícula y sabiendo que $m=4m_0$, donde *m* y m_0 son, respectivamente, las masas en movimiento y en reposo, tenemos que,

$$E_c=\Delta mc^2=(m-m_0)c^2=(4m_0-m_0)c^2=3m_0c^2=3\times 1,675\cdot 10^{-27}\times(3\cdot 10^8)^2=\mathbf{4,523\times 10^{-10}\ J}$$

Apartado b): como la potencia de las bombillas (energía absorbida por unidad de tiempo) es constante, se cumple que,

$$P=E/t\ \Rightarrow\ E=Pt$$

entonces, la energía que hace falta para que **una** lámpara de 100 *W* luzca durante 1 *s* es,

$$E=Pt=100W\times 1s=100J/\cancel{s}\times 1\cancel{s}=100J/bombilla$$

y la energía que poseen los 10^{14} neutrones es,

$$E=10^{14}\ \cancel{neutrón}\times 4,52\cdot 10^{-10}\ J/\cancel{neutrón}=4,52\cdot 10^4\ J$$

Entonces, el número de bombillas que pueden lucir durante 1 segundo son,

$$Nº\ bombillas=\frac{4,52\cdot 10^4\ \cancel{J}}{100\cancel{J}/bombilla}=\mathbf{452\ bombillas}$$

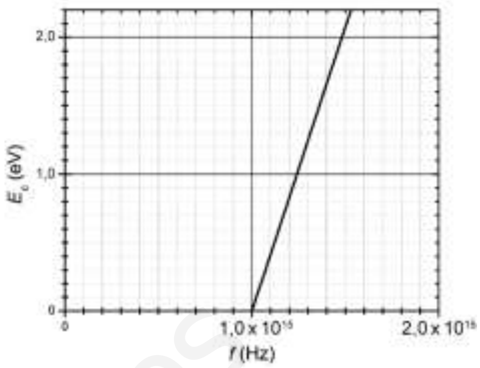
Observación: la masa atómica de un neutrón es, aproximadamente, 1,00 *u*, por lo que 1 *mol* de neutrones tiene una masa (masa molar, *M*) de 1 *g* y un número $N_A=6,02\cdot 10^{23}\ neutrones/mol$. Como disponemos de 10^{14} neutrones, el número de moles es,

$$n=N/N_A=10^{14}/6,02\cdot 10^{23}=1,66\cdot 10^{-10}\ mol$$

como,

$$n=m/M\ \Rightarrow\ m=n\cdot M=1,66\cdot 10^{-10}\ mol\times 1g/mol=1,66\cdot 10^{-10}\ g\ \text{(pesan los } 10^{14}\ neutrones\text{)}$$

En el laboratorio se mide la energía cinética máxima de los electrones emitidos cuando se hace incidir luz de frecuencias diferentes sobre una superficie metálica. Los resultados obtenidos se muestran en la gráfica adjunta.



a) Determine el valor de la constante de Planck a partir de la gráfica.

b) Calcule la energía mínima de extracción de los electrones (en eV).

<u>Datos</u>: 1 eV = 1,60 · 10^{-19} J.

Solución

<u>Apartado a)</u>

$$\left.\begin{aligned} hf &= W_{ext} + E_{c,max} \\ W_{ext} &= hf_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow hf = hf_0 + E_{c,max} \Rightarrow E_{c,max} = -hf_0 + hf \Rightarrow h = \frac{E_{c,max}}{f - f_0}$$

De la gráfica adjunta al problema se obtiene que,

$$f_0 = 1\cdot 10^{15}\ Hz \quad \Rightarrow \quad E_{c,max} = 0$$

$$f = 1,5\cdot 10^{15}\ Hz \ \Rightarrow \ E_{c,\,max} = 2,0\ eV$$

por lo que, $$h = \frac{E_{c,max}}{f - f_0} = \frac{2\times 1,6\cdot 10^{-19}\ J}{(1,5-1)\cdot 10^{15}\ Hz} = \mathbf{6,4\times 10^{-34}}\ J\cdot s$$

<u>Apartado b)</u>

$$W_{ext} = hf_0 = 6,4\cdot 10^{-34}\times 10^{15} = 6,4\cdot 10^{-19}\ J = \frac{6,4\cdot 10^{-19}}{1,6\cdot 10^{-19}} eV = \mathbf{4}\ eV$$

* *

Se ilumina una superficie metálica con luz cuya longitud de onda es de 300 *nm*, siendo el trabajo de extracción del metal de 2,46 *eV*. Calcule:

a) La energía cinética máxima de los electrones emitidos por el metal.

b) La longitud de onda umbral para el metal.

<u>Datos</u>: Constante de Planck: *h* = 6,63.10^{-34} *J·s*; velocidad de la luz en el vacío, $c = 3\cdot 10^8\ m/s$; **valor absoluto de la carga del electrón: e = 1,6·10^{-19} *C*.**

Solución

<u>Apartado a)</u>: Recuerda que $1\ nm = 10^{-9}\ m \ \Rightarrow \ \lambda = 300\ nm = 300\times 10^{-9}\ m = 3\cdot 10^{-7}\ m$

$$c = \lambda f \ \Rightarrow \ f = c/\lambda = 3\cdot 10^8 / 3\cdot 10^{-7} = 10^{15}\ Hz$$

$$W_{extr} = 2,46\ eV = 2,46\times 1,6\cdot 10^{-19}\ J = 3,94\cdot 10^{-19}\ J$$

$$hf = W_{ext} + E_{c,max} \ \Rightarrow \ E_{c,max} = hf - W_{ext} = 6,63\cdot 10^{-34}\times 10^{15} - 3,94\cdot 10^{-19} = 2,7\cdot 10^{-19}\ J$$

$$E_{c,max} = hf - W_{ext} = 2,7\cdot 10^{-19}\,J = \frac{2,7\cdot 10^{-19}}{1,6\cdot 10^{-19}} eV = \mathbf{1,69}\ eV$$

<u>Apartado b)</u> $$W_{ext} = hf_0 \ \Rightarrow \ f_0 = \frac{W_{ext}}{h} = \frac{3,94\cdot 10^{-19}}{6,63\cdot 10^{-34}} = 5,94\cdot 10^{14}\ Hz$$

$$c = \lambda_0 f_0 \ \Rightarrow \ \lambda_0 = c/f_0 = 3\cdot 10^8 / 5,94\cdot 10^{14} = 5,05\cdot 10^{-7}\ m = 5,05\cdot 10^{-7}\times 10^9\, nm = \mathbf{505}\ nm$$

En un experimento se comprueba que si iluminamos cierto metal con luz de 600 *nm* de longitud de onda, la velocidad máxima de los electrones emitidos por el metal es de $1{,}48 \cdot 10^5$ *m/s*.

a) ¿Cuál es la energía de los fotones? ¿Cuál es la energía cinética máxima de los electrones emitidos? ¿Cuál es el trabajo de extracción del metal? Expresar todos los resultados en electronvoltios.

b) Determina cual es la longitud de onda umbral para este metal.

c) Representa en un gráfico la energía cinética máxima observada para los electrones en función de la frecuencia de los fotones incidentes. ¿Cuál es el significado de la pendiente de la gráfica.

Datos: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ J·s; $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ kg$

Solución

Apartado a)

$$\lambda = 600\ nm = 600 \times 10^{-9}\ m = 6 \cdot 10^{-7}\ m$$

$$c = \lambda f \ \Rightarrow\ f = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 6 \cdot 10^{-7} = 5 \cdot 10^{14}\ Hz$$

$$E = hf = 6{,}63 \cdot 10^{-34} \times 5 \cdot 10^{14} = 3{,}32 \cdot 10^{-19}\ J = \frac{3{,}32 \cdot 10^{-19}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} eV = \mathbf{2{,}08}\ eV$$

$$E_{c,max} = \tfrac{1}{2} m_e v_e^2 = \tfrac{1}{2} \times 9{,}11 \cdot 10^{-31} \times (1{,}48 \cdot 10^5)^2 = 9{,}98 \cdot 10^{-21}\ J = \frac{9{,}98 \cdot 10^{-21}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} eV = \mathbf{6{,}24 \times 10^{-2}}\ eV$$

> Nota que $v_e \ll c$, lo que significa que la masa del electrón es prácticamente la misma que la que tiene en reposo y que no hay que usar la corrección relativista de la masa.

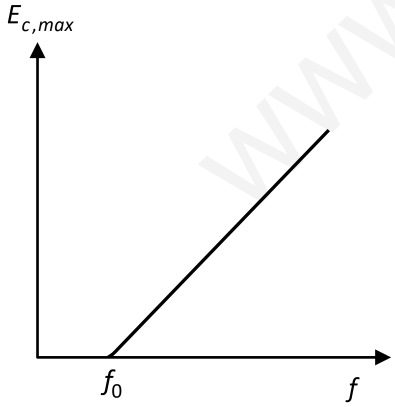
$$hf = W_{ext} + E_{c,max} \ \Rightarrow\ W_{ext} = hf - E_{c,max} = 2{,}08 - 6{,}24 \cdot 10^{-2} = \mathbf{2{,}01}\ eV$$

Apartado b)

$$W_{ext} = hf_0 \ \Rightarrow\ f_0 = \frac{W_{ext}}{h} = \frac{3{,}21 \cdot 10^{-19}}{6{,}63 \cdot 10^{-34}} = 4{,}84 \cdot 10^{14}\ Hz$$

$$c = \lambda_0 f_0 \ \Rightarrow\ \lambda_0 = \frac{c}{f_0} = \frac{3 \cdot 10^8}{4{,}84 \cdot 10^{14}} = 6{,}2 \cdot 10^{-7}\ m = \mathbf{620}\ nm$$

Apartado c)



$$\left. \begin{aligned} hf &= W_{ext} + E_{c,max} \\ W_{ext} &= hf_0 \end{aligned} \right\} \ \Rightarrow\ hf = hf_0 + E_{c,max} \ \Rightarrow\ E_{c,max} = hf - hf_0 \quad (\text{donde } hf_0 = cte)$$

Si comparas la ecuación de la derecha con $y = mx + y_0$, que es la ecuación de la recta, se ve que $E_{c,max}$ juega el papel de *y*, *f* el de *x* y hf_0 el de y_0. Así que la pendiente de la recta es $m = h$ (constante de Plank).

Observa que para $E_{c,max} = 0 \ \Rightarrow\ f = f_0$, como se refleja en la gráfica.

Dos partículas poseen la misma energía cinética.

a) **Determinar la relación entre las longitudes de onda de De Broglie correspondientes a las dos partículas sabiendo que la relación entre sus masas es m_1 = 50 m_2.**

b) **La relación que existe entre sus velocidades si la relación de sus longitudes de onda de De Broglie es λ_1 = 500 λ_2**

Solución

Apartado a): como tienen la misma energía cinética y $m_1 = 50\, m_2$,

$$\left.\begin{array}{r} E_c(1)=E_c(2)\ \Rightarrow\ \cancel{½}m_1v_1^2=\cancel{½}m_2v_2^2 \\ m_1=50m_2 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ 50\cancel{m_2}v_1^2=\cancel{m_2}v_2^2\ \Rightarrow\ v_1^2=\frac{v_2^2}{50}\ \Rightarrow\ v_1=\frac{v_2}{\sqrt{50}}$$

Entonces como $\lambda = h/mv$,

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2}=\frac{\cancel{h}/m_1v_1}{\cancel{h}/m_2v_2}=\frac{m_2v_2}{m_1v_1}=\frac{\cancel{m_2}\cancel{v_2}}{50\cancel{m_2}\ \cancel{v_2}/\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{50}}{50}=\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{50}}}$$

Apartado b): como tienen la misma energía cinética, $\lambda = h/mv$ y $\lambda_1 = 500\, \lambda_2$,

$$\left.\begin{array}{l} ½m_1v_1^2=½m_2v_2^2\ \Rightarrow\ m_1v_1v_1=m_2v_2v_2\ \Rightarrow\ \dfrac{m_2v_2}{m_1v_1}=\dfrac{v_1}{v_2} \\ \lambda_1=500\lambda_2\ \Rightarrow\ \dfrac{\cancel{h}}{m_1v_1}=500\dfrac{\cancel{h}}{m_2v_2}\ \Rightarrow\ \dfrac{m_2v_2}{m_1v_1}=500 \end{array}\right\}\ \Rightarrow\ \frac{v_1}{v_2}=\mathbf{500}$$

* *

Determina la longitud de onda y la frecuencia de las ondas de materia de De Broglie asociadas a un electrón, cuya masa en reposo es $m_e=9{,}11\cdot 10^{-11}\ kg$ **y que se mueve a** $2{,}50\cdot 10^{7}\ m/s$.

Solución

A la velocidad de $2{,}50\cdot 10^{7}\ m/s$ la masa relativista m del electrón es mayor que la del reposo,

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{9{,}11\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1-\left(2{,}5\cdot 10^7/3\cdot 10^8\right)^2}}=\frac{9{,}11\cdot 10^{-31}}{0{,}997}=9{,}14\cdot 10^{-31}\ kg$$

entonces la longitud de onda de De Broglie es,

$$\lambda=\frac{h}{mv}=\frac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}14\cdot 10^{-31}\times 2{,}5\cdot 10^{7}}=2{,}90\cdot 10^{-11}\ m$$

Para hallar la frecuencia de la onda de materia,

$$v=\lambda f\ \Rightarrow\ f=v/\lambda=2{,}5\cdot 10^{7}/2{,}90\cdot 10^{-11}=8{,}62\cdot 10^{17}\ Hz$$

Observa que la velocidad es la del electrón.

La longitud de onda de los rayos X es del orden de 10 A. Se pide:

a) Indica el valor de la correspondiente frecuencia.

b) Halla la energía (expresada en eV) de un fotón.

Solución

Recuerda que $1\ \overset{\circ}{A} = 10^{-10}\ m$.

Apartado a)

$$\lambda = 10\ \overset{\circ}{A} = 10 \times 10^{-10}\ m = 10^{-9}\ m$$

$$c = \lambda f \ \Rightarrow\ f = c/\lambda = 3\cdot 10^{8}/10^{-9} = \mathbf{3\times 10^{17}}\ Hz$$

Apartado b)

$$E = hf = 6{,}63\cdot 10^{-34} \times 3\cdot 10^{17} = 1{,}99\cdot 10^{-16}\ J = 1{,}99\cdot 10^{-16}/1{,}6\cdot 10^{-19}\ eV = \mathbf{1{,}24\times 10^{3}}\ eV$$

* *

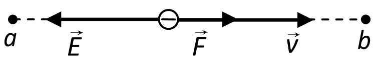
Un microscopio electrónico utiliza electrones acelerados a través de una diferencia de potencial de $4{,}0\cdot 10^{3}\ V$.

a) Determina su poder de resolución suponiendo que es igual a la longitud de onda de De Broglie de los electrones.

b) Calcula la frecuencia de las ondas de materia asociadas.

Solución

Apartado a): Lo primero que tenemos que hallar es la velocidad que adquieren los electrones al ser acelerados por el campo eléctrico.



Como $\vec{E}$ apunta en el sentido de los potenciales decrecientes, $V_b > V_a \Rightarrow V_a - V_b = -4\cdot 10^{3}\ V$. Entonces, aplicando la conservación de la energía,

$$E_m(a) = E_m(b) \ \Rightarrow\ \cancel{E_c(a)} + E_p(a) = E_c(b) + E_p(b)$$

y como se cumple que $E_p = qV$, tenemos que,

$$q_e V_a = \tfrac{1}{2} m_e v^2 + q_e V_b \ \Rightarrow\ v = \sqrt{\frac{2q_e(V_a - V_b)}{m_e}} = \sqrt{\frac{2\times 1{,}6\cdot 10^{-19} \times (-4\cdot 10^{3})}{9{,}11\cdot 10^{-31}}} = 3{,}75\cdot 10^{7}\ m/s$$

Observa que a la velocidad v la masa relativista del electrón es,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{9{,}11\cdot 10^{-31}}{\sqrt{1 - \left(3{,}75\cdot 10^{7}/3\cdot 10^{8}\right)^2}} = 9{,}18\cdot 10^{-31}\ kg$$

que es solo un 0,77% mayor que la que tiene en reposo, por lo que podemos despreciar el efecto relativista de la masa.

Entonces, $\lambda = \dfrac{h}{mv} = \dfrac{6{,}63\cdot 10^{-34}}{9{,}11\cdot 10^{-31} \times 3{,}75\cdot 10^{7}} = 1{,}94\cdot 10^{-11}\ m = 1{,}94\cdot 10^{-11} \times 10^{9}\ nm = \mathbf{1{,}94\times 10^{-2}}\ nm$

Apartado b): La frecuencia de las ondas de materia es,

$$v = \lambda f \ \Rightarrow\ f = v/\lambda = 3{,}75\cdot 10^{7}/1{,}94\cdot 10^{-11} = \mathbf{1{,}94\times 10^{18}}\ Hz$$

Entre los elementos radiactivos emitidos en la fuga de la central nuclear de Fukushima en Japón está el Pu-238, cuyo periodo de semidesintegración (o semivida) es de 88 años.

a) Calcula la vida media de los núcleos.

b) Halla el tiempo que tiene que transcurrir hasta que quede la octava parte del plutonio original.

c) Si la cantidad de plutonio hubiera sido de 100 kg ¿qué masa quedaría dentro de 100 años?

d) Partiendo de 100 kg, ¿cuál sería la actividad del material al cabo de 100 años?

Solución

Apartado a): la vida media (τ) es el tiempo promedio de vida de los núcleos y viene dada por la inversa de la constante de desintegración (λ), $\tau = 1/\lambda$.

Este apartado se puede resolver de dos formas:

1ª) Conociendo la relación entre λ y el periodo de semidesintegración ($t_{1/2}$, que es un dato del problema). En este caso,

$$\left.\begin{array}{r} t_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda} \\ \tau = 1/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = \frac{88\ \text{años}}{\ln 2} = \mathbf{127}\ \text{años}$$

2ª) Sin conocer la relación entre λ y el periodo de semidesintegración. En este caso tenemos que recordar que el $t_{1/2}$ es el intervalo de tiempo que tiene que transcurrir para que el número de núcleos presentes (N_0) se reduzca a la mitad; es decir, $t_{1/2} \Rightarrow N = N_0/2$. Entonces,

$$\left.\begin{array}{r} N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \dfrac{\cancel{N_0}}{2} = \cancel{N_0} e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow 2 = e^{\lambda t_{1/2}} \Rightarrow \ln 2 = \lambda t_{1/2} \\ \tau = 1/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 \Rightarrow \tau = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} = 127\ \text{años}$$

Apartado b): tenemos que hallar el tiempo que ha de transcurrir ($t_{1/8}$) para que quede una octava parte del material original; entonces se ha de cumplir que,

$$\left.\begin{array}{r} N = N_0/8 \Rightarrow \dfrac{\cancel{N_0}}{8} = \cancel{N_0} e^{-\lambda t_{1/8}} \Rightarrow 8 = e^{\lambda t_{1/8}} \Rightarrow \ln 8 = \lambda t_{1/8} \Rightarrow t_{1/8} = \dfrac{\ln 8}{\lambda} \\ \tau = 1/\lambda \Rightarrow \lambda = 1/\tau = 1/127 = 7{,}87 \cdot 10^{-3}\ \text{año}^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1/8} = \frac{\ln 8}{7{,}87 \cdot 10^{-3}} = \mathbf{264\ años}$$

Apartado c): Como la ecuación $N = N_0 e^{-\lambda t}$ también se puede expresar en función de la masa,

$$m = m_0 e^{-\lambda t} = 100 \times e^{(-7{,}83 \cdot 10^{-3} \times 100)} = \mathbf{45{,}7\ kg}$$

Apartado d): La actividad es el valor absoluto de la velocidad; esto es,

$$A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(N_0 e^{-\lambda t}\right)\right| = \left|-\lambda N_0 e^{-\lambda t}\right| = \lambda N$$

Para expresar la actividad en *Bq* tenemos que hallar el número de núcleos que hay en 45,7 *kg* de Pu. Designando por *n*, *M* y N_A, respectivamente, al nº de moles, masa molar y nº de Avogadro tenemos,

$$\left.\begin{array}{r} n = m/M \\ n = N/N_A \end{array}\right\} \Rightarrow N = N_A \frac{m}{M_A} = 6{,}02 \cdot 10^{23}\ \frac{\text{núcleos}}{\text{mol}}\ \frac{45{,}7\ kg}{0{,}238\ kg/mol} = 1{,}16 \cdot 10^{26}\ \text{núcleos}$$

Como 1 *Bq* es 1 desintegración/*s*, hay que expresar λ en s^{-1}; así pues,

$$\lambda = 7{,}87 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{\text{año}} = 7{,}87 \cdot 10^{-3}\ \frac{1}{365 \times 24 \times 3600\, s} = 2{,}50 \cdot 10^{-10}\ s^{-1}$$

$$A = \lambda N = 2{,}50 \cdot 10^{-10}\ s^{-1} \times 1{,}16 \cdot 10^{26}\ \text{núcleos} = \mathbf{2{,}88 \times 10^{16}\ Bq}$$

Una partícula subatómica ha sido acelerada hasta conseguir una energía cinética de 62 *MeV* y un momento lineal de 1,75·10^{-19} *kgms*$^{-1}$. Determina su masa en reposo y la velocidad que lleva.

Solución

Para una partícula subatómica que se mueve a gran velocidad (no despreciable frente a la velocidad de la luz) se cumple que,

$$\left.\begin{array}{l} E_c = \Delta mc^2 = (m-m_0)c^2 \\ m = m_0 \Big/ \sqrt{1-v^2/c^2} \end{array}\right\}$$

donde E_c, m, m_0, c y v representan, respectivamente, la energía cinética, la masa, la masa en reposo, la velocidad de la luz y la velocidad que lleva.

Por otro lado, el momento lineal de una partícula viene expresado por $p = mv$. Observa que podemos eliminar m_0 en las dos primeras ecuaciones y obtener una ecuación con dos incógnitas (m y v). La ecuación obtenida y la del momento lineal nos permiten resolver el problema.

De las dos primeras ecuaciones se deduce que,

$$\left.\begin{array}{r} E_c = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow m_0c^2 = mc^2 - E_c \Rightarrow m_0 = m - E_c/c^2 \\ m_0 = m\sqrt{1-v^2/c^2} \end{array}\right\} \Rightarrow m - E_c/c^2 = m\sqrt{1-v^2/c^2}$$

elevando la última ecuación al cuadrado,

$$m - E_c/c^2 = m\sqrt{1-v^2/c^2} \;\Rightarrow\; \left(m - E_c/c^2\right)^2 = m^2\left(1-v^2/c^2\right)$$

desarrollando el cuadrado de una diferencia, metiendo a m^2 dentro del paréntesis y teniendo en cuenta la ecuación del momento lineal, tenemos,

$$\left.\begin{array}{r} \cancel{m^2} + E_c^2/c^4 - 2mE_c/c^2 = \cancel{m^2} - m^2v^2/c^2 \\ p = mv \end{array}\right\} \Rightarrow E_c^2/c^4 - 2mE_c/c^2 = -p^2/c^2 \;\Rightarrow\; \frac{E_c^2}{c^2} - 2mE_c = -p^2$$

de donde, al despejar m, se obtiene,

$$m = \frac{E_c}{2c^2} + \frac{p^2}{2E_c}$$

Recordando que $62\,MeV = 62\times10^6\ eV = 62\times10^6 \times 1{,}6\cdot10^{-19}\ J = 9{,}92\cdot10^{-12}\ J$, llegamos a,

$$m = \frac{E_c}{2c^2} + \frac{p^2}{2E_c} = \frac{9{,}92\cdot10^{-12}}{2\times\left(3\cdot10^8\right)^2} + \frac{\left(1{,}75\cdot10^{-19}\right)^2}{2\times9{,}92\cdot10^{-12}} = 5{,}51\cdot10^{-29} + 1{,}544\cdot10^{-27} = 1{,}599\cdot10^{-27}\ kg$$

y de la ecuación del momento lineal obtenemos v,

$$p = mv \;\Rightarrow\; v = \frac{p}{m} = \frac{1{,}75\cdot10^{-19}}{1{,}60\cdot10^{-27}} = 1{,}094\cdot10^8\,\frac{c}{c} = \frac{1{,}094\cdot10^8}{3\cdot10^8}c = \mathbf{0{,}365c\ m/s}$$

Para hallar la masa en reposo,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \;\Rightarrow\; m_0 = m\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = 1{,}599\cdot10^{-27}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}365\cancel{c}}{\cancel{c}}\right)^2} = \mathbf{1{,}49\times10^{-27}\ kg}$$

Otra forma de resolverlo sería,

$$\left.\begin{array}{r} E_c = mc^2 - m_0c^2 \Rightarrow E_c \big/ c^2 = m - m_0 \\ p = mv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_c}{pc^2} = \frac{m - m_0}{mv} \quad \text{(al dividir ambas ecuaciones)}$$

Recordando la ecuación de la masa relativista y combinándola con la anterior,

$$\left.\begin{array}{r} m = m_0 \Big/ \sqrt{1 - v^2/c^2} \;\Rightarrow\; m_0/m = \sqrt{1 - v^2/c^2} \\ \dfrac{E_c}{pc^2} = \dfrac{m - m_0}{mv} \;\Rightarrow\; \dfrac{E_c}{pc^2} = \dfrac{1 - m_0/m}{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{E_c}{pc^2} = \frac{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}}{v}$$

multiplicando los dos términos de la ecuación por *cv*,

$$\frac{\cancel{c}vE_c}{pc^{\cancel{2}}} = \frac{c\cancel{v}\left(1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\right)}{\cancel{v}} \Rightarrow \frac{vE_c}{pc} = c - \sqrt{c^2 - v^2} \Rightarrow \sqrt{c^2 - v^2} = c - \frac{vE_c}{pc}$$

elevando al cuadrado la última expresión,

$$\cancel{c^2} - v^2 = \cancel{c^2} + \left(\frac{vE_c}{pc}\right)^2 - \frac{2cvE_c}{pc} \Rightarrow \left(\frac{E_c^2}{p^2c^2} + 1\right)v^2 - \frac{2\cancel{c}E_c}{p\cancel{c}}v = 0$$

y como $v \neq 0,$ tenemos al sacar factor común a *v*, que,

$$\left(\frac{E_c^2}{p^2c^2} + 1\right)v - \frac{2E_c}{p} = 0 \Rightarrow v = \frac{2E_c}{p\left(\dfrac{E_c^2}{p^2c^2} + 1\right)} = \frac{2E_cpc^2}{p^2c^2\left(\dfrac{E_c^2}{p^2c^2} + 1\right)} \Rightarrow v = \frac{2E_cpc^2}{E_c^2 + p^2c^2}$$

Una roca contiene dos isótopos radiactivos, *A* y *B*, de periodos de semidesintegración de 1,60·10^3^ años y 1,00·10^3^ años, respectivamente. Cuando la roca se formó, el contenido de núcleos de *A* y *B* era el mismo.

a) Si actualmente la roca contiene el doble de núcleos de *A* que de *B*, ¿qué edad tiene la roca?

b) ¿Qué isótopo tendrá mayor actividad 2500 años después de su formación?

Solución

Apartado a): Como nos dan el periodo de semidesintegración, podemos hallar las constantes de desintegración de ambas rocas,

$$t_{½} = \ln 2/\lambda \Rightarrow \lambda = \ln 2/t_{½} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_A = \ln 2/t_{½A} = \ln 2/1{,}60\cdot 10^3 = 4{,}33\cdot 10^{-4}\ años^{-1} \\ \lambda_B = \ln 2/t_{½B} = \ln 2/1{,}00\cdot 10^3 = 6{,}93\cdot 10^{-4}\ años^{-1} \end{cases}$$

Para hallar la edad de la roca *t* aplicamos la ecuación general de la desintegración radiactiva a *A* y *B*, teniendo en cuenta que $N_{0A} = N_{0B} = N_0$ y que actualmente $N_A = 2N_B$. Entonces,

$$N = N_0 e^{-\lambda t} \Rightarrow \begin{cases} 2N_B = N_0 e^{-\lambda_A t} \\ N_B = N_0 e^{-\lambda_B t} \end{cases}$$

al dividir la 1ª ecuación entre la 2ª se cancelan N_B y N_0 y llegamos a,

$$2 = \frac{e^{-\lambda_A t}}{e^{-\lambda_B t}} \Rightarrow 2 = e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} \Rightarrow \ln 2 = (\lambda_B - \lambda_A)t \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{\lambda_B - \lambda_A} = \frac{\ln 2}{(6{,}93 - 4{,}33)\cdot 10^{-4}} = \mathbf{2{,}67\times 10^3\ años}$$

Apartado b): El número de núcleos de los isótopos *A* y *B* dentro de 2.500 años serán,

$$\left.\begin{array}{l} N_A = N_0 e^{-\lambda_A t} \\ N_B = N_0 e^{-\lambda_B t} \end{array}\right\} \text{ donde } t = 2500\ años$$

Recuerda que la actividad *A* (valor absoluto de la velocidad de desintegración) viene dada por,

$$A = \lambda N \Rightarrow \begin{cases} A_A = \lambda_A N_A = \lambda_A N_0 e^{-\lambda_A t} \\ A_B = \lambda_B N_B = \lambda_B N_0 e^{-\lambda_B t} \end{cases}$$

al dividir la 1ª ecuación entre la 2ª se cancela N_0 y queda que,

$$\frac{A_A}{A_B} = \frac{\lambda_A e^{-\lambda_A t}}{\lambda_B e^{-\lambda_B t}} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} e^{(\lambda_B - \lambda_A)t} = \frac{4{,}33\cdot \cancel{10^{-4}}}{6{,}93\cdot \cancel{10^{-4}}} e^{(6{,}93-4{,}33)\cdot 10^{-4}\times 2500} = 1{,}20 \Rightarrow \mathbf{A_A = 1{,}20 A_B}$$

****

¿Qué masa relativista tendrá un cuerpo cuando viaja con una velocidad de 0,5*c* si su masa en reposo es de 40,0 *kg*?

Solución

La ecuación que relaciona la masa en movimiento con la del reposo es,

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - (0.5\cancel{c}/\cancel{c})^2}} = \frac{40}{\sqrt{1 - 0{,}5^2}} = \frac{40}{\sqrt{1 - 0{,}25}} = \frac{40}{\sqrt{0{,}75}} = \mathbf{46{,}2\ kg}$$

Los electrones emitidos por una superficie metálica tienen una energía cinética máxima de 2,5 *eV* cuando la superficie es iluminada con una radiación de 350 *nm* de longitud de onda.

a) Calcula el trabajo de extracción de un mol de electrones para ese metal. Expresa el resultado en julios.

b) Determina la diferencia de potencial mínima (potencial de frenado) requerida para frenar los electrones emitidos en estas condiciones.

<u>Datos</u>: ***e (valor absoluto)* = 1,6·10^{-19} *C*; *h* = 6,63.10^{-34} *J·s*; N_A = 6,02·10^{-23} *mol*$^{-1}$.**

Solución

<u>Apartado a)</u>: Para hallar el trabajo de extracción aplicamos la ecuación que lo relaciona con la energía del fotón y con la energía cinética máxima de los electrones emitidos,

$$hf = W_{ext} + E_{c,max} \;\Rightarrow\; W_{ext} = hf - E_{c,max}$$

Antes de utilizar la ecuación tenemos que tener en cuenta que *h* viene en unidades del S.I., por lo que las demás magnitudes hay que expresarlas también en el S.I.,

$$E_{c,max} = 2,5\ eV \times 1,6\cdot 10^{-19}\ J/eV = 4\cdot 10^{-19}\ J$$

$$c = \lambda f \;\Rightarrow\; f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\cdot 10^8\ m/s}{350\,nm} = \frac{3\cdot 10^8\ m/s}{350\ \cancel{nm}\times 10^{-9}\ m/\cancel{nm}} = \frac{3\cdot 10^8\ \cancel{m}/s}{350\times 10^{-9}\ \cancel{m}} = 8,57\cdot 10^{14}\ Hz\,(s^{-1})$$

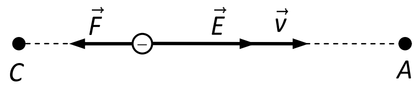
Entonces el trabajo de extracción para un electrón es,

$$W_{ext} = hf - E_{c,max} = 6,63\cdot 10^{-34}\times 8,57\cdot 10^{14} - 4\cdot 10^{-19} = 5,68\cdot 10^{-19} - 4\cdot 10^{-19} = 1,68\times 10^{-19}\ J$$

y como un mol de electrones son N_A electrones, tenemos que,

$$W_{ext}(mol) = W_{ext}(1e^-)\cdot N_A = 1,68\times 10^{-19}\ J/\cancel{e^-}\times 6,02\cdot 10^{23}\ \cancel{e^-}/mol = \mathbf{1,01\times 10^5\ J/mol}$$

<u>Apartado b)</u>: Para hallar el potencial de frenado hay que ser muy cuidadosos con los signos. Utilizo las letras *C* y *A* porque son las que aparecen en el cuaderno de teoría.



Los electrones son extraídos del metal en el punto *C* y se dirigen a A. La energía cinética de los más energéticos es $E_{c,max} = 4\cdot 10^{-19}\ J,$ de modo que para se detengan al llegar a *A* es necesario un campo eléctrico $\vec{E}$ que los frene.

Como $\vec{F} = q_e\vec{E}$ y $q_e < 0,$ $\vec{E}$ tiene que estar orientado hacia la derecha (ver figura). Y puesto que siempre apunta en el sentido de los potenciales decrecientes, se tiene que $V_C > V_A \Rightarrow V_A - V_C < 0.$ La diferencia de potencial mínima $V_A - V_C < 0$ necesaria para detener a los electrones al llegar a *A* recibe el nombre de potencia de frenado y se designa por V_0; es decir, $V_0 = V_A - V_C < 0.$

Como el campo eléctrico es conservativo, se cumple que,

$$\left.\begin{array}{r} E_m(C) = E_m(A) \;\Rightarrow\; E_c(C) + E_p(C) = \cancel{E_c(A)} + E_p(A) \\ E_p = q_e V \end{array}\right\} \Rightarrow\; E_c(C) + q_e V_C = q_e V_A \;\Rightarrow$$

$$q_e(V_A - V_C) = E_c(C) \;\Rightarrow\; V_0 = V_A - V_C = \frac{E_c(C)}{q_e} = \frac{4\cdot 10^{-19}}{-1,6\cdot 10^{-19}\ C} = \mathbf{-2,5\ V}$$

¿A qué velocidad debe moverse un electrón para que su masa sea igual a la del protón en reposo?

Solución

Sabemos que,

$$\left.\begin{aligned} m &= m_0 \Big/ \sqrt{1-(v/c)^2} \\ m_e &= m_{0,p} \end{aligned}\right\} \Rightarrow m_{0,p} = \frac{m_{0,e}}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \Rightarrow \sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2} = \frac{m_{0,e}}{m_{0,p}} \Rightarrow 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = \left(\frac{m_{0,e}}{m_{0,p}}\right)^2$$

$$\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-\left(\frac{m_{0,e}}{m_{0,p}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{1-(m_{0,e}/m_{0,p})^2}\,c = \sqrt{1-(9{,}1\cdot 10^{-31}/1{,}7\cdot 10^{-27})^2}\,c = \sqrt{1-2{,}87\cdot 10^{-7}}\,c = \mathbf{0{,}9999997c}$$

****

La actividad inicial de una muestra radiactiva en estudio es de 7,00·10^2 *Bq* y, al cabo de 5 horas, su actividad pasa a 1,20·10^2 *Bq*. ¿Cuál es el periodo de semidesintegración de la sustancia y su constante radiactiva?

Solución

Aplicando la ecuación de la actividad de una muestra podemos obtener la relación entre el número de núcleos actual (N_0) y el que habrá al cabo de 5 horas (N),

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \lambda N_0 \\ A &= \lambda N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{\cancel{\lambda} N_0}{\cancel{\lambda} N} = \frac{N_0}{N} \Rightarrow \frac{N_0}{N} = \frac{7{,}00\cdot \cancel{10^2}}{1{,}20\cdot \cancel{10^2}} = \frac{70}{12} \Rightarrow N_0 = \frac{70}{12}N$$

Ahora con la ecuación general de la desintegración radiactiva, hallamos la constante radiactiva,

$$\left.\begin{aligned} N &= N_0 e^{-\lambda t} \\ N_0 &= (70/12)N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{N} = \frac{70}{12}\cancel{N} e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{12}{70} = e^{-\lambda t} \Rightarrow \ln(12/70) = -\lambda t \Rightarrow \lambda = -\frac{\ln(12/70)}{t} = \frac{1{,}76}{5h} = 0{,}353\ h^{-1}$$

y recordando la relación entre el periodo de semidesintegración y la constante radiactiva,

$$t_{½} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2}{0{,}353} = \mathbf{1{,}97h}$$

es el tiempo que tardan los núcleos en reducirse a la mitad.

Se ha constatado que la actividad del ^{14}C de una muestra de materia orgánica en la superficie terrestre es 1,5 veces mayor que la de otra muestra, del mismo contenido en carbón, encontrada en una tumba egipcia. Sabiendo que el periodo de semidesintegración del ^{14}C es de 5730 años, halla la antigüedad de la tumba.

Solución

Partimos de la base de que el ^{14}C de la superficie terrestre se repone continuamente, por lo que su cantidad (a pesar de la desintegración) permanece prácticamente constante. No sucede lo mismo en una tumba egipcia enterrada en el interior de una pirámide, donde el ^{14}C se va desintegrando y no se renueva.

Una forma fácil y equivalente de abordar este problema es la siguiente. Supongamos que alguien muere hoy y se entierra en una cámara de una pirámide, de modo que mucho tiempo después se descubre el sarcófago. Si se constata que la actividad del ^{14}C de la superficie de la Tierra es 1,5 veces mayor que la de una cantidad igual de carbón de la tumba, ¿Cuánto tiempo ha pasado desde la muerte hasta que se encuentra la momia?

Sean N_0 y N, respectivamente y para una misma cantidad de carbón, el número de núcleos de ^{14}C en la superficie de la Tierra y en la tumba. Entonces las actividades respectivas son,

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \lambda N_0 \\ A &= \lambda N \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{A_0}{A} = \frac{N_0}{N}$$

ya que la constante radiactiva, que es la misma en ambos casos porque se trata del mismo elemento, se cancela al dividir las ecuaciones. Por otro lado,

$$\left.\begin{aligned} A_0/A &= N_0/N \\ A_0 &= 1,5A \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1,5\cancel{A}}{\cancel{A}} = \frac{N_0}{N} \Rightarrow N_0 = 1,5N$$

y aplicando la ecuación general de la desintegración,

$$\left.\begin{aligned} N &= N_0 e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} \\ N_0 &= 1,5N \text{ y } \lambda = \ln 2/t_{1/2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \cancel{N} = 1,5\cancel{N} e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}}t} \Rightarrow \frac{\ln 2}{t_{1/2}}t = 1,5 \Rightarrow \frac{\ln 2}{t_{1/2}}t = \ln 1,5$$

por lo que, al despejar t, queda,

$$t = \frac{\ln 1,5}{\ln 2}t_{1/2} = \frac{0,405}{0,693} \times 5730 = \mathbf{3,35 \times 10^3} \textbf{ años}$$

PROBLEMAS SELECTIVIDAD (UPNA)

¿A qué velocidad debe moverse una partícula relativista para que su energía total sea 1,10 veces su energía en reposo? Expresa el resultado en función de la velocidad de la luz en el vacío, *c*. Sabiendo que la energía en reposo es $9,4\cdot 10^{8}\ eV$, ¿cuál es su energía cinética expresada en el S.I.?

Solución

Apartado 1º)

$$\left.\begin{array}{r} E_0 = m_0c^2 \ y \ E = mc^2 \\ E = 1{,}10E_0 \end{array}\right\} \Rightarrow mc^2 = 1{,}1m_0c^2 \Rightarrow m = 1{,}1m_0$$

Como $m = m_0 \Big/ \sqrt{1-v^2/c^2}$, tenemos, al combinarla con la ecuación anterior, que,

$$\frac{\cancel{m_0}}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 1{,}1\cancel{m_0} \Rightarrow \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{1{,}1} = 0{,}909 \Rightarrow 1-\left(\frac{v}{c}\right)^2 = 0{,}909^2 \Rightarrow \left(\frac{v}{c}\right)^2 = 1-0{,}909^2 = 0{,}174$$

$$\frac{v}{c} = 0{,}417 \Rightarrow v = \mathbf{0{,}417c}$$

Apartado 2º)

$$E_c = \Delta mc^2 = (m-m_0)c^2 = mc^2 - m_0c^2 = E - E_0 = 1{,}1E_0 - E_0 = (1{,}1-1)E_0 = 0{,}1E_0$$

$$E_c = 0{,}1\times 9{,}4\cdot 10^8\ eV = 9{,}4\cdot 10^7\ eV = 9{,}4\cdot 10^7 \times 1{,}6\cdot 10^{-19}\ J \Rightarrow E_c = \mathbf{1{,}50\times 10^{-11}}\ J$$

Si no recuerdas la equivalencia *eV* ↔ *J*, utiliza la definición de *eV* (energía que adquiere un electrón sometido a la diferencia de potencial de 1 *V*). Entonces, como $q_e = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C$, se tiene que,

$$E = q_e\Delta V = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ C\times 1\ V = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \cancel{C}\times 1\ J/\cancel{C} = 1{,}6\cdot 10^{-19}\ J$$

Si iluminamos una lámina de sodio con una radiación de 40 *nm* de longitud de onda, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es 0,74 *eV*. Se pide:

a) Calcular el trabajo de extracción y la frecuencia umbral.

b) Representar en un gráfico la energía cinética máxima en función de la frecuencia de los fotones incidentes.

Datos: $|q_e| = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ C$; $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-19}\ C$; $c = 3 \cdot 10^8\ m/s$ y $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$

Solución

Apartado a): Para hallar el trabajo de extracción tenemos que conocer la energía del fotón incidente,

$$40\ nm = 40 \times 10^{-9}\ m = 4 \cdot 10^{-8}\ m \ \Rightarrow\ c = \lambda f \ \Rightarrow\ f = c/\lambda = 3 \cdot 10^8 / 4 \cdot 10^{-8} = 7{,}5.10^{15}\ Hz$$

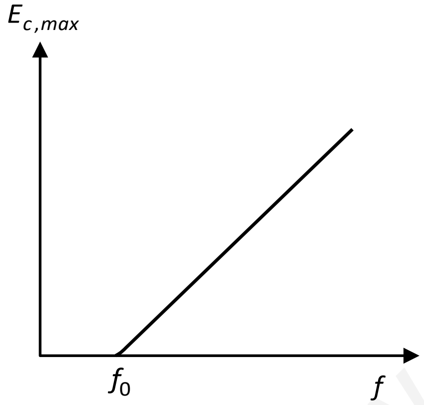
$$E = hf = 6.63 \cdot 10^{-34} \times 7{,}5 \cdot 10^{15} = 4{,}97 \cdot 10^{-18}\ J \quad \text{y} \quad E_{c,max} = 0{,}74\,eV = 0{,}74 \times 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ J = 1{,}18 \cdot 10^{-19}\ J$$

$$E = W_{ext} + E_{c,max} \ \Rightarrow\ W_{ext} = E - E_{c,max} = 4{,}97 \cdot 10^{-18} - 1{,}18 \cdot 10^{-19} = 4{,}85 \cdot 10^{-18}\ J = \frac{4{,}85 \cdot 10^{-18}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = \mathbf{30{,}3}\,eV$$

Para hallar la frecuencia umbral,

$$W_{ext} = hf_0 \ \Rightarrow\ f_0 = W_{ext}/h = 4{,}85 \cdot 10^{-18} / 6{,}63 \cdot 10^{-34} = \mathbf{7{,}32 \times 10^{15}}\ Hz$$

Apartado b)



$$\left.\begin{aligned} E &= W_{ext} + E_{c,max} \\ W_{ext} &= hf_0 \\ E &= hf \end{aligned}\right\} \ \Rightarrow\ E_{c,max} = hf - hf_0$$

Si comparas la ecuación de la derecha con $y = y_0 + mx$ que es la ecuación de la recta, se ve que $E_{c,max}$ juega el papel de *y*, *f* el de *x* y $-hf_0$ el de y_0. Como $-hf_0 < 0$, la representación gráfica es la indicada en la gráfica. Observa que para $E_{c,max} = 0 \ \Rightarrow\ f = f_0$, como se refleja en la figura.

Hallar la masa de un protón cuando se mueve con una velocidad de 2.5·10⁸ *m/s*. ¿Cuánto varía la energía si su velocidad cambia de 2.5·10⁸ a 2.8·10⁸ *m/s*.

Datos: $m_{protón\ reposo} = 1{,}67\cdot 10^{-27}\ kg$; $c = 3\cdot 10^{8}\ m/s$.

Solución

Apartado 1º) $$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{\sqrt{1-\left(2{,}5\cdot 10^{8}/3\cdot 10^{8}\right)^2}} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{\sqrt{1-0{,}694}} = \mathbf{3{,}02\times 10^{-27}}\ kg$$

Apartado 2º): la energía total del protón viene dada por $E = mc^2$, donde m es la masa en movimiento. Como cambia la velocidad, también cambia la masa; la masa a la nueva velocidad es,

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{\sqrt{1-\left(2{,}8\cdot 10^{8}/3\cdot 10^{8}\right)^2}} = \frac{1{,}67\cdot 10^{-27}}{\sqrt{1-0{,}871}} = \mathbf{4{,}65\times 10^{-27}}\ kg$$

La variación de su energía es,

$$\Delta E = E' - E = m'c^2 - mc^2 = (m'-m)c^2 = \Delta mc^2 = (4{,}65\cdot 10^{-27} - 3{,}02\cdot 10^{-27})\times(3\cdot 10^{8})^2 = \mathbf{1{,}47\times 10^{-10}}\ J$$

* *

Un haz de luz de longitud de onda 546 *nm* incide en una superficie metálica en la que el trabajo de extracción es de 2 *eV*.

a) Calcular la energía de los fotones incidentes.

b) Calcular la velocidad máxima de los electrones emitidos por el metal.

c) ¿Qué ocurriría si iluminámos la superficie del metal con una radiación de 700 *nm*. Razonar la respuesta.

Solución

Apartado a): primero expresamos las magnitudes en unidades del SI,

$$\lambda = 546\,nm = 546\times 10^{-9}\ m = 5{,}46\cdot 10^{-7}\ m \text{ y } W_{ext} = 2\,eV = 2\times 1{,}6\cdot 10^{-19}\ J = 3{,}2\cdot 10^{-19}\ J$$

Ahora hallamos la energía de los fotones incidentes,

$$\left.\begin{array}{r} E = hf \\ c = \lambda f \Rightarrow f = c/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow E = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ \frac{3\cdot 10^{8}}{5{,}46\cdot 10^{-7}} = \mathbf{3{,}64\times 10^{-19}}\ J$$

Apartado b)

$$E = W_{ext} + E_{c,max} \Rightarrow E_{c,max} = E - W_{ext} = 3{,}64\cdot 10^{-19} - 3{,}2\cdot 10^{-19} = 3{,}64\cdot 10^{-19} = \mathbf{4{,}4\times 10^{-20}}\ J$$

Apartado c): la energía de los fotones incidentes es ahora,

$$\left.\begin{array}{r} E = hf \\ c = \lambda f \Rightarrow f = c/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow E = h\frac{c}{\lambda} = 6{,}63\cdot 10^{-34}\ \frac{3\cdot 10^{8}}{7\cdot 10^{-7}} = 2{,}84\cdot 10^{-19}\ J = \frac{2{,}84\cdot 10^{-19}}{1{,}6\cdot 10^{-19}}\ J = 1{,}78\,eV$$

Como $E = 1{,}78\,eV < W_{ext} = 2\,eV$, los fotones no tienen suficiente energía para arrancar electrones del metal. Recuerda que la energía mínima que han de tener los fotones para sacar electrones del metal es igual al trabajo de extracción; por lo tanto no habrá efecto fotoeléctrico.

El ^{14}C es un isótopo del carbono con una vida media de 5.700 años y se suele utilizar en la datación arqueológica. (J19)

a) Indicar el tipo de desintegración si: ${}^{14}_{6}C \to {}^{14}_{7}N + 1e^{-}$.

b) Hallar el periodo de semidesintegración.

c) Calcula la actividad radiactiva de una muestra que tiene 10^{22} átomos.

d) Se observa que una muestra a estudio tiene una actividad radiactiva 10 veces inferior a una muestra actual de igual masa. Hallar la antigüedad de la muestra a estudio.

Solución

Apartado a): Se trata de una emisión beta porque se libera un electrón.

Apartado b): Lo más fácil es obtener la fórmula a partir de la ecuación general de la desintegración radiactiva y de la definición de periodo de semidesintegración (tiempo que le lleva a una muestra reducir sus núcleos a la mitad). Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 e^{-\lambda t} \\ t = t_{1/2} \Rightarrow N = N_0/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{N_0}}{2} = \cancel{N_0} e^{-\lambda t_{1/2}} \Rightarrow e^{\lambda t_{1/2}} = 2 \Rightarrow \lambda t_{1/2} = \ln 2 \Rightarrow t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Por otro lado sabemos la relación entre τ (vida media) y λ (constante de desintegración) que es $\tau = 1/\lambda$, por lo tanto tenemos que,

$$\left.\begin{array}{r} t_{1/2} = \ln 2/\lambda \\ \tau = 1/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow t_{1/2} = \tau \ln 2 = 5700 \times \ln 2 = \mathbf{3951\ años}$$

Apartado c): Como la actividad es el valor absoluto de la velocidad de desintegración, tenemos que,

$$\left.\begin{array}{r} A = \left|\frac{dN}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\left(N_0 e^{-\lambda t}\right)\right| = \left|-\lambda N_0 e^{-\lambda t}\right| = \lambda N \\ \tau = 1/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{N}{\tau} = \frac{10^{22}\ átomos}{5700\ años} = \mathbf{1{,}75\times10^{19}\ átomos/año}$$

Apartado d): Observa que es indiferente que hablen de átomos o de masa porque ambos son directamente proporcionales. En efecto, como vimos en un problema anterior, para una muestra de una sustancia cualquiera se cumple que,

$$\left.\begin{array}{l} n = m/M \\ n = N/N_A \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A} \Rightarrow \frac{m}{N} = \frac{M}{N_A} = cte$$

ya que la masa molar (M) y el número de Avogadro (N_A) son constantes. Si designamos por A' y N', respectivamente, a la nueva actividad y al nuevo número de átomos, tenemos que,

$$\left.\begin{array}{l} A = N_0/\tau \\ A' = N/\tau \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} A/N_0 = A'/N' \\ A' = A/10 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{A}}{N_0} = \frac{\cancel{A}/10}{N} \Rightarrow N = \frac{N_0}{10}$$

que es el número de átomos que quedan sin desintegrar cuando la actividad se ha reducido a 1/10. Aplicando ahora la ecuación general de la desintegración,

$$\left.\begin{array}{l} N = N_0 e^{-\lambda t} \\ N = N_0/10 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\cancel{N_0}}{10} = \cancel{N_0} e^{-\lambda t} \Rightarrow e^{\lambda t} = 10 \Rightarrow \lambda t = \ln 10 \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} t = \ln 10/\lambda \\ \tau = 1/\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$t = \tau \ln 10 = 5700 \times \ln 10 = \mathbf{1{,}31\times10^{4}\ años}$$

es el tiempo que tiene que transcurrir para que la actividad de la muestra sea 1/10 de la inicial.

La pregunta de este apartado es muy razonable porque los dispositivos medidores de radiactividad lo que miden es la velocidad de desintegración; esto es, la actividad.