PROBLEMAS DE ONDAS RESUELTOS

Una cuerda de 1 m de longitud se mantiene fija por sus dos extremos. Un pulso engendrado en un extremo se refleja y regresa al punto de partida en 0,1 s. ¿Cuáles son las frecuencias de oscilación permitidas en esta cuerda?

Solución

Como el pulso recorre dos veces la cuerda en 0,1 s, podemos calcular la velocidad (constante) de propagación de cualquier onda en esta cuerda así,

$$v = \frac{2l}{t} = \frac{2 \cdot 1}{0{,}1} = 20\ m/s$$

Si generamos en la cuerda, que tiene sus dos extremos fijos, una onda estacionaria, las frecuencias permitidas para la misma vienen dadas por la ecuación

$$f = n\frac{v}{2L}$$

donde n = 1, 2, 3 ..., v es la velocidad de propagación de cualquier onda en la cuerda y L es la longitud de la cuerda, por lo tanto

$$\boldsymbol{f} = n\frac{20}{2 \cdot 0{,}1} = \mathbf{100n}\ \boldsymbol{Hz}$$

dando valores a k obtenemos

$n = 1 \Rightarrow f = 100\ Hz$ (*frecuencia fundamental*)

$n = 2 \Rightarrow f = 200\ Hz$ (*segundo armónico*)

....

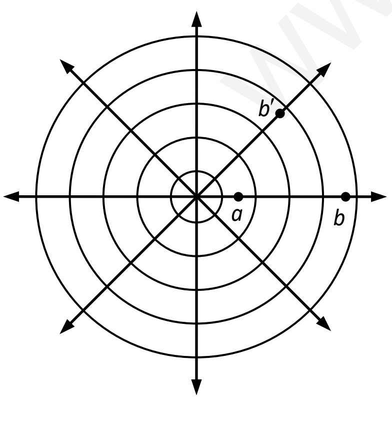
* * * * * * * * * *

Una onda de 1000 *Hz* de frecuencia se propaga con una velocidad de 300 *m/s*.

a) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos puntos distantes entre sí 45 *cm* en la dirección de propagación?

b) ¿Cuál es la mínima distancia, medida en la dirección de propagación, entre dos puntos consecutivos cuya diferencia de fase es de 3π/2 *rad*.

Solución



Observa que en los dos apartados aparece la frase "en la dirección de propagación". Si la onda es unidimensional, la frase sobra porque la onda se propaga en una sola dirección. Sin embargo, si la onda es bi o tridimensional, es necesario especificar la dirección en la que se mide la distancia.

Imagina, por ejemplo, que se trata de una onda plana circular, como se ve en la figura. Los puntos b y b' están a la misma distancia del punto a, pero solo b se encuentra en la dirección de propagación de la onda en a. En efecto, la dirección de propagación de la onda en el punto a es la del rayo que pasa por el punto; y puesto que b está en el mismo rayo, lo puntos *a y b* se encuentran en la dirección de propagación de la onda.

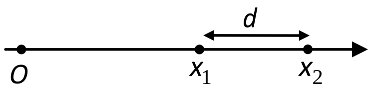
Apartado a)

La ecuación general de ondas que se propaga en el sentido positivo del eje *OX* de un SC, para una fase inicial igual a cero, es,

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

donde $\Phi = \omega t - kx$ es la fase de la onda. La diferencia de fase entre dos puntos x_1 y x_2 en el mismo instante *t* es pues,

$$\Delta\Phi = (\omega t - kx_1) - (\omega t - kx_2) = kx_2 - kx_2 = k(x_2 - x_1)$$



Pero, como se ve en la figura, $d = x_2 - x_1 = 45\ cm = 0{,}45\ m$; por lo tanto queda que,

$$\Delta\Phi = k(x_2 - x_1) = kd \quad (1)$$

Por lo tanto, para hallar la diferencia de fase solo tenemos que calcular el número de ondas *k*. Como,

$$\left.\begin{array}{l} k = 2\pi/\lambda \\ v = \lambda f \Rightarrow \lambda = v/f \end{array}\right\} \Rightarrow k = \frac{2\pi}{v/f} = \frac{2\pi f}{v} = \frac{2\pi \times 1000}{300} = \frac{20\pi}{3}\ \frac{rad}{m}$$

De la ecuación (1) obtenemos que,

$$\Delta\Phi = kd = \frac{20\pi}{3}\ \frac{rad}{\cancel{m}} \times 0{,}45\ \cancel{m} = 3\pi = (\pi + 2\pi) = \boldsymbol{\pi\ rad}$$

Apartado b)

Aplicando la ecuación (1) tenemos que,

$$\Delta\Phi = k(x_2 - x_1) = kd \Rightarrow d = \frac{\Delta\Phi}{k} = \frac{3\cancel{\pi}/2}{20\cancel{\pi}/3} = \frac{3 \times 3}{20 \times 2} = \mathbf{0{,}225}\ \boldsymbol{m}$$

Veamos que la distancia obtenida en realmente la mínima. De acuerdo con lo que se ha explicado en el apartado anterior, las distancias entre puntos que oscilan con un desfase de $3\pi/2$ *rad* son los que cumplen la condición,

$$k(x_2 - x_1) = kd = 3\pi/2 + 2n\pi\ rad \ \text{ con } (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \Rightarrow d = \frac{3\pi/2 + 2n\pi}{k} = \frac{3\pi/2 + 2n\pi}{20\pi/3} = \frac{9}{40} + \frac{3n}{10}$$

de donde se deduce que la distancia mínima es la correspondiente a $n = 0$,

$$d(n = 0) = 9/40 = 0{,}225\ m$$

como habíamos obtenido al resolver el apartado.

El movimiento de una cuerda tensa, de longitud L = 1 m, con sus extremos fijos, corresponde a la onda estacionaria dada por:

$$y(x,t) = 0{,}1\mathrm{sen}(3\pi/L)x\cos\omega t$$

en la que las cantidades vienen en el S.I. Se pide

a) ¿Cuál es la longitud de onda de la misma?

b) ¿Cuál es el número de nodos?

c) Si la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es de 0,1 m/s, ¿cuál es la frecuencia angular ω de la onda estacionaria?

Solución

La ecuación general de una onda estacionaria es,

$$y(x,t) = 2A\mathrm{sen}\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

donde A es la amplitud de las ondas que dan lugar a la estacionaria, λ la longitud de onda y T el periodo.

$$A_r = 2A\mathrm{sen}\frac{2\pi x}{\lambda}$$

es la amplitud de la vibración de un punto x de la cuerda, que depende de la posición.

Comparando las ecuaciones se deduce que,

$$\frac{2\pi}{\lambda} = \frac{3\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}L = \frac{2}{3}\cdot 1 = \boldsymbol{\frac{2}{3}\ m}$$

Teniendo en cuenta el valor de λ, se deduce que en la cuerda entran 1,5 longitudes de onda, por lo que se tienen **cuatro nodos**, como se ve en el dibujo.

También puedes hallar el número de nodos (N) así: para una cuerda con los dos extremos fijos se tiene que,

$$\lambda = \frac{2L}{n} \Rightarrow n = \frac{2L}{\lambda} = \frac{2\times 1}{2/3} = 3 \quad \text{(es el tercer armónico)}$$

$$N = n + 1 = 3 + 1 = 4$$

Comparando de nuevo la ecuación general de la onda estacionaria con la particular de nuestro problema, se ve que

$$\omega = 2\pi/T$$

para obtener la frecuencia angular (ω) hemos de obtener primero el periodo (T)

En toda onda se cumple que,

$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} = \frac{2/3}{0{,}1} = 6{,}67\ s$$

por lo tanto $$\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{6{,}67} = \mathbf{0{,}942}\ \boldsymbol{rad/s}$$

En una cuerda se engendra una onda sinusoidal mediante un oscilador armónico que actúa en el punto x = 0 con una frecuencia de 10 *Hz* y una amplitud de 3 *cm*. Determinar la ecuación de la onda, sabiendo que en el instante t = 0 el oscilador se encuentra en la posición de amplitud máxima y que la velocidad de la onda es de 12 *m/s*.

Solución

La ecuación general del movimiento ondulatorio es,

$$y = A\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)+\varphi\right]$$

donde φ es la denominada constante de fase inicial, y su valor depende de la elongación del punto en el que se genera la onda (x = 0) en el instante t = 0. El problema indica que la elongación de este punto en t = 0 es la máxima, esto es, es igual a la amplitud cuyo valor es de 3 *cm*. En consecuencia,

$$y(x=0,\, t=0)=3=3\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{0}{T}-\frac{0}{\lambda}\right)+\varphi\right]=3\,\text{sen}\varphi$$

por lo tanto, $\text{sen}\varphi=1 \Rightarrow \varphi=\pi/2\ rad$

Por otro lado, la frecuencia es de 10 *Hz*, entonces

$$T=\frac{1}{f}=\frac{1}{10}=0{,}1\,s$$

Finalmente, como la velocidad de la onda es de 12 *m/s* y $\lambda = vT$ queda

$$\lambda=12\times 1/10=1{,}2\ m$$

Así que la ecuación buscada es,

$$y=3\cdot 10^{-2}\,\text{sen}\left[2\pi\left(\frac{t}{0{,}1}-\frac{x}{1{,}2}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

pero de acuerdo con la relación $\text{sen}(\alpha+\pi/2)=\cos\alpha$ también se puede escribir la ecuación anterior de la forma siguiente

$$y=3\cdot 10^{-2}\cos 2\pi\left(\frac{t}{0{,}1}-\frac{x}{1{,}2}\right)$$

Un punto está sometido a un movimiento de ecuación

$$y = 5\sin 2\pi(2t - 0{,}001x)$$

donde el tiempo viene en *s* y *x* e *y* en *cm*. Hállese el tiempo mínimo que tiene que transcurrir para que un punto situado a 5 *cm* del foco tenga velocidad máxima.

Solución

Es más fácil para ti que expresemos la ecuación de la onda en la forma en la que la hemos trabajado más habitualmente; es decir,

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

Para expresarla de esta forma sólo tenemos que meter el término 2π de la ecuación original dentro del paréntesis,

$$y = 5\sin(4\pi t - 0{,}002\pi x)$$

de donde, al comparar con la ecuación general, deducimos inmediatamente que,

$$\omega = 4\pi\, rad/s \quad \text{y} \quad k = 0{,}002\pi\ rad/cm \quad \text{(pues } x \text{ viene en } cm\text{)}$$

Ahora tenemos que calcular la expresión del la velocidad derivando la ecuación respecto a t,

$$v = \frac{dy}{dt} = 4\pi \cdot 5\cos(4\pi t - 0{,}002\pi x) = 20\pi\cos(4\pi t - 0{,}002\pi x) \quad (1)$$

Puesto que estamos suponiendo que la onda se propaga en el eje *OX* y que el foco está en el origen, el punto que nos piden es $x = 5\ cm$.

Los instantes en los que la velocidad es máxima positiva o negativa, de acuerdo con la ecuación (1), tienen que cumplir que,

$$\cos(4\pi t - 0{,}002\pi x) = \pm 1 \ \text{ donde } \ x = 5cm$$

pero $\cos\alpha = \pm 1 \Rightarrow \alpha = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots;$ es decir, $\alpha = n\pi$ donde $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ Por lo tanto,

$$4\pi t - 0{,}002\pi \times 5 = 4\pi t - 0{,}01\pi = n\pi$$

Despejando el tiempo (t) de la ecuación anterior,

$$4\cancel{\pi} t = n\cancel{\pi} + 0{,}01\cancel{\pi} \ \Rightarrow \ t = \frac{n + 0{,}01}{4}$$

El primer instante en el que la velocidad es máxima (tiempo mínimo, que es lo que piden) se obtiene cuando $n = 0$; entonces,

$$t_{min} = \frac{0{,}01}{4} = \mathbf{2{,}50 \times 10^{-3}\ s}$$

Observa que el problema se ha resuelto de la forma más general. Como solo nos piden el primer instante, la solución válida es la primera; es decir, con hacer,

$$4\pi t - 0{,}01\pi = 0$$

hubiese sido suficiente. Sin embargo, la forma general nos permite hallar los demás instantes en los que la velocidad también es máxima (positiva o negativa). Así por ejemplo, los dos instantes siguientes en los que se cumple lo mismo son,

$$t_2 = \frac{1 + 0{,}01}{4} = 0{,}252\,s \quad \text{y} \quad t_3 = \frac{2 + 0{,}01}{4} = 0{,}502\,s$$

Una onda estacionaria que responde a la ecuación:

$$y = 0,02\,\text{sen}10\pi x \cdot \cos 40\pi t$$

en unidades del *S.I.* se propaga por una cuerda. Calcula la distancia entre dos nodos consecutivos de la cuerda.

Sol.: a) 0,200 m; 20,0 Hz ; 0,0100 m; b) 0,100 m

Solución

De acuerdo con la ecuación, la amplitud de un punto *x* de la cuerda es,

$$A = 0,02\,\text{sen}10\pi x$$

y los puntos de la cuerda que no oscilan (o sea, los nodos) son los que tienen amplitud nula,

$$0,02\sin 10\pi x = 0 \;\Rightarrow\; \sin 10\pi x = 0 \;\Rightarrow\; 10\pi x = n\pi \;\; (n = 0,\, 1,\, 2, \cdots)$$

Despejando *x*, tenemos que,

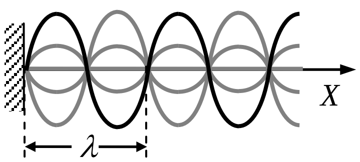
$$x = n/10$$

así que los dos primeros nodos son,

$$x_0(n=0) = 0 \quad \text{y} \quad x_1(n=1) = 1/10 = 0,1m$$

por lo tanto la distancia entre ellos es,

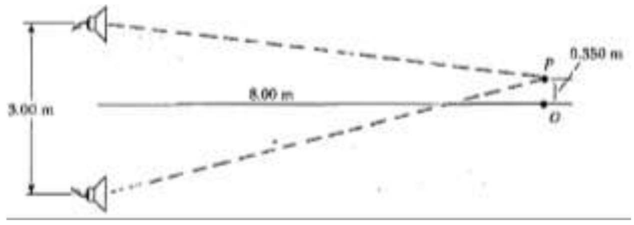
$$d = x_1 - x_0 = 0,1 - 0 = \mathbf{0,100}\ \boldsymbol{m}$$



La figura representa una onda estacionaria en una cuerda situada en el eje *OX*, de modo que su extremo izquierdo, que es un nodo, está en el origen de coordenadas. La ecuación del problema se corresponde con esta situación.

Observa que la distancia entre dos nodos consecutivos es igual a media longitud de onda, que se puede deducir a partir de la ecuación de ondas.

Dos altavoces separados una distancia de 3,00 *m* están emitiendo sendas ondas acústicas idénticas y en fase. Consideremos una recta paralela a la que une los altavoces y que está a 8,00 *m* de la misma. Un oyente recorre dicha recta, encontrando puntos en los que la intensidad del sonido es máxima y otros en los que es mínima. En concreto, en *O* se encuentra un máximo y en *P*, situado a 0,350 *m* de *O*, encuentra el primer mínimo. Calcular la frecuencia de las ondas emitidas.
<u>Dato</u>: velocidad del sonido en el aire *v* = 340 *m/s*



Solución

De acuerdo con el punto 10.2 de teoría de ondas, sabemos que cuando dos ondas idénticas que oscilan en fase interfieren se tiene que:

- Los puntos en los que se da una interferencia totalmente constructiva son los que cumplen que.

$$s_2 - s_1 = n\lambda \text{ con } n = 0, 1, 2, \cdots$$

- Los puntos en los que se da una interferencia totalmente destructiva son,

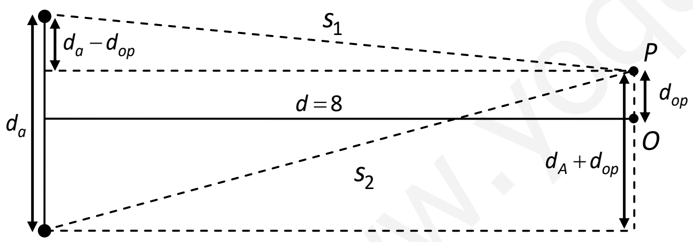
$$s_2 - s_1 = (2n+1)\lambda/2 = m\lambda/2 \text{ con } m = 1, 3, 5, \cdots$$

donde $s_2 - s_1$ es la diferencia de caminos que recorren las ondas que interfieren.

Observa en la figura que en el punto *O* se tiene un máximo porque $s_2 = s_1$. Puesto que en *P* se obtiene el primer mínimo de sonido, se ha de cumplir en ese punto que,

$$s_2 - s_1 = m\lambda/2 = \lambda/2 \text{ donde } m = 1 \text{ porque se trata del primer mínimo.}$$

Primero hay que hallar s_1 y s_2 para obtener λ. Fíjate en la fig. que $d_a = 3\ m$ y $d_{op} = 0{,}350\ m$.



En el triángulo superior tenemos que,

$$s_1 = \sqrt{d^2 + \left(d_a/2 - d_{op}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(3/2 - 0{,}35\right)^2} = 8{,}08\ m$$

y en el triángulo inferior se ve que,

$$s_2 = \sqrt{d^2 + \left(d_a/2 + d_{op}\right)^2} = \sqrt{8^2 + \left(3/2 + 0{,}35\right)^2} = 8{,}21\ m$$

$$s_2 - s_1 = \lambda/2 \Rightarrow \lambda = 2\left(s_2 - s_1\right) = 2 \times \left(8{,}21 - 8{,}08\right) = 0{,}258\ m$$

Como λ y *f* se relacionan a través de la velocidad de la onda (en este caso el sonido),

$$v = \lambda f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} = \frac{340}{0{,}258} = 1{,}32 \cdot 10^3\ Hz$$

La ecuación de una onda es:

$$y = 0{,}1\sin\pi(t/2 - x/2)$$

donde *x* e *y* se expresan en metros y *t* en segundos. Calcular:

a) La amplitud, frecuencia, longitud de onda y velocidad de propagación.

b) La diferencia de fase, en el mismo instante, entre dos puntos que distan 2 *m* en la dirección de propagación.

Solución

Apartado a) Lo primero es meter el término π de la ecuación dentro del paréntesis, así la ecuación tiene la misma forma que la general que estamos habituados a manejar. Luego comparamos las ecuaciones para obtener los valores de A, ω, y k,

$$\left.\begin{array}{l} y = 0{,}1\sin\left(\pi t/2 - \pi x/2\right) \\ y = A\sin\left(\omega t - kx\right) \end{array}\right\} \Rightarrow A = 0{,}1\ m;\ \ \omega = \frac{\pi}{2}\ rad/s;\ \ k = \frac{\pi}{2}\ rad/m$$

Para hallar f, λ y v utilizamos las correspondientes fórmulas,

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\cancel{\pi}/2}{2\cancel{\pi}} = \frac{1}{4} = 0{,}250\ Hz;\ \ k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{\pi}/\cancel{2}} = 4{,}00\ m;\ \ v = \lambda f = 4 \times \frac{1}{4} = 1{,}00\ m/s$$

Apartador b) La fase de la onda es el término que está dentro del paréntesis; esto es $\omega t - kx$. Así que las fases de los dos puntos (x_1 y x_2), en el mismo instante t son,

$$\Phi_1 = \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x_1}{2} \quad \text{y} \quad \Phi_2 = \frac{\pi t}{2} - \frac{\pi x_2}{2}$$

por lo que la diferencia de fase es,

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \left(\cancel{\frac{\pi t}{2}} - \frac{\pi x_1}{2}\right) - \left(\cancel{\frac{\pi t}{2}} - \frac{\pi x_2}{2}\right) = \frac{\pi x_2}{2} - \frac{\pi x_1}{2} = \frac{\pi}{2}\left(x_2 - x_1\right)$$

pero $x_2 - x_1$ no es más que la distancia entre los puntos; es decir, $x_2 - x_1 = 2\ m$; así que,

$$\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_2 = \frac{\pi}{2}\left(x_2 - x_1\right) = \frac{\pi}{\cancel{2}} \times \cancel{2} = \pi\ rad$$

Hallar la tensión (*T*) de una cuerda de piano cuya frecuencia fundamental de vibración es de 247 *Hz*, su longitud 0,5 *m* y su densidad lineal (η) 0,01 *kg/m*.

Solución

En la pregunta 8 del tema (Influencia del medio en la velocidad de propagación) se dio la ecuación, sin demostrar, que expresa la velocidad de propagación de una onda en una cuerda (*v*) en función de la tensión (*T*) y de la densidad lineal (η, masa por unidad de longitud),

$$v=\sqrt{T/\eta} \;\Rightarrow\; v^2=T/\eta \;\Rightarrow\; T=v^2\cdot\eta \quad (1)$$

Como conocemos η, solo necesitamos obtener *v* para calcular *T*.

Por teoría sabemos que las frecuencias (*f*) permitidas en una cuerda con los dos extremos fijos (como una cuerda de piano) son las expresadas por la fórmula,

$$f=n\frac{v}{2L} \;\Rightarrow\; v=\frac{2fL}{n}$$

donde *L* es la longitud de la cuerda y $n=1$ para la frecuencia fundamental. Por lo tanto,

$$v=\frac{2fL}{n}=\frac{2\times 247\times 0,5}{1}=247\ m/s$$

Sustituyendo en la ecuación (1) los valores de *v* y de *T* tenemos,

$$T=v^2\cdot\eta=247^2\times 0,01=\mathbf{610\ N}$$

* * * * * *

Un diapasón vibra con una frecuencia de 660 *Hz* en la boca de un tubo de 1 *m* de largo. ¿Qué altura de agua ha de tener el tubo para que exista resonancia?

Solución

Está claro que el tubo está cerrado por la base (de no ser así no se podría echar agua); así que se trata de un tubo sonoro cerrado.

Para que exista resonancia en el tubo (es decir, para que se generen ondas sonoras estacionarias), el diapasón tiene que oscilar con una de las frecuencias permitidas por el tubo. De acuerdo con la teoría, las frecuencias permitidas por un tubo cerrado (es decir, las únicas frecuencias sonoras que son capaces de formar una estacionaria) son las dadas por la ecuación,

$$f=m\frac{v}{4L} \quad \text{con} \quad m=1, 3, 5, \ldots$$

donde *v* es la velocidad del sonido, que a 20 º*C* y 1 *atm* es de 340 *m/s*. Este es un dato que hay que saber. Así pues, las longitudes de los tubos que provocarían resonancia a 660 *Hz* son,

$$L=m\frac{v}{4f}=m\frac{340}{4\times 660}=m0,129$$

El valor de *m* que hace que *L* sea la más próxima a $L_0=1\ m$ y que esté por debajo de ese valor es,

$$\frac{1}{0,129}=7,76 \;\Rightarrow\; m=7$$

Entonces,
$$L=m\frac{v}{4f}=7\times\frac{340}{4\times 660}=0,902\,m$$

O sea, un tubo de 0,902 *m* produciría ondas estacionarias (resonancia) con una frecuencia de 660 *Hz*. Como nuestro tubo es más largo (1 *m*), la cantidad de agua que tenemos que añadir para acortar su longitud es,

$$h_{agua}=L_0-L=1-0,902=0,0985\ m=9,85\ cm$$

Un movimiento ondulatorio transversal cuya ecuación es

$$y(x,t)=y_0\sin\pi(50t-x)$$

donde y_0 = 0,5 *cm*, *t* se expresa en *s* y *x* en *cm*, se está propagando en un cierto medio. En un instante inicial, un punto situado en x_0 = 10 *cm* se encuentra en un cierto estado de movimiento: posición, velocidad y aceleración. Calcula cuánto tiempo transcurrirá para que un punto situado en x_1 = 10,5 *cm* alcance el mismo estado de movimiento.

Sol.: t = 0,01 *s*

Solución

Los puntos tienen el mismo estado de movimiento cuando su elongación y velocidad de oscilación son iguales (no se incluye la aceleración porque ésta es directamente proporcional a la elongación; es decir, si dos puntos tienen la misma elongación, también llevan la misma aceleración).

La ecuación de ondas y la de la velocidad de oscilación son funciones del seno y del coseno respectivamente. Sabemos que estas funciones alcanzan el mismo valor si su diferencia de fase es cero o un múltiplo entero de 2π. (Esto está explicado en teoría).

La fase del punto $x_0=10\ cm$ en un instante t_0 es,

$$\pi(50t_0-x_0)$$

y la del punto $x_1=10,5\ cm$ en un instante t_1 es,

$$\pi(50t_1-x_1)$$

Para que los puntos oscilen en fase se ha de cumplir que,

$$\Delta\Phi=\Phi_1-\Phi_0=\pi(50t_1-x_1)-\pi(50t_0-x_0)=2n\pi \quad \text{donde } n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

simplificando y sacando factor común queda,

$$50(t_1-t_0)-(x_1-x_0)=2n$$

donde $\Delta t=t_1-t_0$ es el intervalo de tiempo que ha de transcurrir para que el punto x_1 adquiera el mismo estado de movimiento que el que tenía x_0 en el instante t_0 (sea cual sea éste). Entonces,

$$50\Delta t-(x_1-x_0)=2n \;\Rightarrow\; \Delta t=\frac{(x_1-x_0)}{50}+\frac{2n}{50}$$

El tiempo mínimo que tiene que transcurrir se obtiene con $n=0$; es decir,

$$\Delta t=\frac{(x_1-x_0)}{50}=\frac{10,5-10}{50}=\mathbf{0,01\,s}$$

Una onda armónica transversal de 4 *Hz* de frecuencia se propaga a lo largo de una cuerda con una velocidad de 2 *m/s* en la dirección positiva del eje OX. En la posición *x* = 2 *m*, en el instante *t* = 2 *s* la velocidad es nula y la elongación positiva y, en el instante *t* = 2,125 *s* su elongación es –5 *cm*.

a) Hallar el periodo, la longitud de onda, la fase inicial y la amplitud de la onda

b) Indicar la expresión matemática de la onda. Dibujar la velocidad frente a *x* en el instante *t* = 0 *s* y en el intervalo $0 \le x \le 1$ *m*.

Solución

Apartado a):

$$T = 1/f = 1/4 = \mathbf{0{,}25\ s};\quad v = \lambda f \;\Rightarrow\; \lambda = v/f = 2/4 = \mathbf{0{,}5\ m}$$

Como $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 4 = 8\pi\ rad/s$ y $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/0{,}5 = 4\pi\ rad/s$, la ecuación (incompleta) es,

$$y = A\sin\left(\omega t - kx + \varphi\right) = A\sin\left(8\pi t - 4\pi x + \varphi\right)$$

y la de la velocidad de las partículas de la cuerda es,

$$y = dy/dt = \omega A\cos\left(\omega t - kx + \varphi\right) = 8A\cos\left(8\pi t - 4\pi x + \varphi\right)$$

Los datos del problema nos dicen que,

$$v(x=2;\ t=2) = 8A\cos\left(8\pi\times 2 - 4\pi\times 2 + \varphi\right) = 8A\cos\left(16\pi - 8\pi + \varphi\right) = 8A\cos\left(8\pi + \varphi\right) = 8A\cos\varphi = 0$$

$$8A\cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi = 0 \;\Rightarrow\; \varphi = \pm\pi/2\ rad$$

y también que,

$$y(x=2;\ t=2{,}125) = A\sin\left(8\pi\times 2{,}125 - 4\pi\times 2 + \varphi\right) = A\sin\left(17\pi - 8\pi + \varphi\right) = A\sin\left(9\pi + \varphi\right) = -5\ cm \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} A > 0 \\ A\sin\left(9\pi + \varphi\right) = -5\ cm \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; \sin\left(9\pi + \varphi\right) < 0$$

$$\varphi = \pi/2 \;\Rightarrow\; \sin\left(9\pi + \varphi\right) = \sin\left(9\pi + \pi/2\right) = \sin(8\pi + 3\pi/2) = \sin 3\pi/2 = -1$$

$$\varphi = -\pi/2 \;\Rightarrow\; \sin\left(9\pi + \varphi\right) = \sin\left(9\pi - \pi/2\right) = \sin(8\pi + \pi/2) = \sin\pi/2 = 1$$

Así que para que la elongación sea negativa se tiene que cumplir que $\boldsymbol{\varphi = \pi/2}$, por lo que de la ecuación (1) deducimos que,

$$8A\sin\left(9\pi + \pi/2\right) = 8A\sin(8\pi + 3\pi/2) = 8A\sin 3\pi/2 = -5\ cm \;\Rightarrow\; A = \frac{-5}{\sin 3\pi/2} = \frac{-5}{-1} = \mathbf{5\ cm}$$

Apartado b): La expresión matemática completa de la onda es,

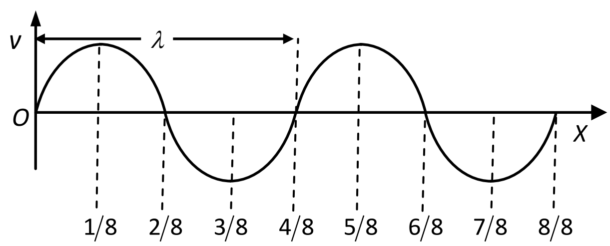
$$\boxed{y = 5\sin\left(8\pi t - 4\pi x + \pi/2\right)}$$

y la de la velocidad es, $\boxed{v = 1{,}26\cdot 10^2\cos\left(8\pi t - 4\pi x + \pi/2\right)}$

$$\text{En } t = 0\ s \;\Rightarrow\; v = 1{,}26\cdot 10^2\cos\left(-4\pi x + \pi/2\right)$$

Tenemos que representar esta ecuación. Como la función de onda (y, por lo tanto, la de la vel ocidad) se repite cada longitud de onda (para un instante particular), lo más razonable es dar valores a *x* desde $x = 0$ en intervalos de un cuarto de longitud de onda. Como $\lambda = 0{,}5\ m \;\Rightarrow\; \lambda/4 = 1/8\ m$.

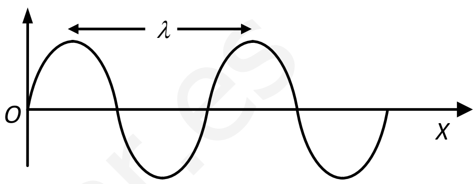
$$\left.\begin{array}{r} v(x=0) = 126\cos(\pi/2) = 0 \\ v(x=1/8) = 126\cos(-\pi/2 + \pi/2) = 126\cos 0 = 126 \\ v(x=2/8) = 126\cos(-\pi + \pi/2) = 126\cos(-\pi/2) = 0 \\ v(x=3/8) = 126\cos(-3\pi/2 + \pi/2) = 126\cos(-\pi) = -126 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\}$$



En un extremo de una cuerda tensa horizontal de 5 *m* se provoca un *MAS* perpendicular a la dirección de la cuerda, cuya elongación es de –8 *cm* cuando han transcurrido 0,5 *s* desde su comienzo. Se observa que la onda producida tarda en llegar al otro extremo 2 *s* y que la distancia entre dos crestas consecutivas es de 1,5 *m*. Determinar la frecuencia, longitud de onda y amplitud del movimiento ondulatorio.

Solución

Si fuéramos rigurosos, este problema, como otros de selectividad, no se podría resolver porque no da la fase inicial del movimiento, que es un dato necesario. Así que supondremos que $\varphi = 0$.



Puesto que la distancia entre dos crestas consecutivas es igual a la longitud de onda, tenemos que,

$$\lambda = d_{cc} = 1{,}5\ m$$

Por otro lado, como la velocidad de propagación de la onda es constante se cumple que,

$$\Delta x = v\,t \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\Delta x}{t} = \frac{L}{t_L} = \frac{5}{2} = 2{,}5\ m$$

y recordando que,

$$v = \lambda f \quad \Rightarrow \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{2{,}5}{1{,}5} = \frac{5}{3}\ Hz$$

Para determinar la amplitud necesitamos la ecuación de onda (en la que hemos supuesto que $\varphi = 0$),

$$y = A\sin(\omega t - kx)$$

teniendo en cuenta que,

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 5/3 = 10\pi/3\ rad/s \ \text{ y } \ k = 2\pi/\lambda = 2\pi/1{,}5 = 4\pi/3\ rad/m$$

la ecuación de onda, salvo la amplitud, es,

$$y = A\sin\left(\frac{10\pi}{3}t - \frac{4\pi}{3}x\right)$$

Como la elongación del punto $x = 0$ en el instante $t = 0{,}5\ s$ es de $-8\ cm$, tenemos que,

$$y(x=0;\ t=0{,}5) = A\sin\left(\frac{10\pi}{3}\times 0{,}5\right) = A\sin\frac{5\pi}{3} = -8 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{-8}{\sin\frac{5\pi}{3}} = \frac{-8}{-\sqrt{3}/2} = 9{,}24\ cm$$

Un altavoz emite sonido como un foco puntual. A una distancia de 1 *km* dejamos de escuchar el sonido.

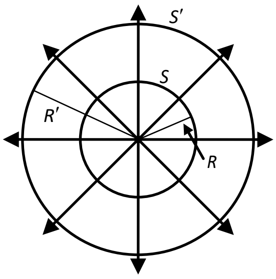
a) ¿Cuál es la potencia del sonido emitido por el altavoz?

b) ¿A qué distancia del mismo el nivel de intensidad sonora es de 50 *dB*?

Dato: $I_0 = 1{,}0 \times 10^{-12}\ W/m^2$.

Solución

Apartado a): ya que el foco es puntual (suponiendo un medio homogéneo e isótropo) los frentes de onda son esféricos; por lo tanto se cumple que,



$$\frac{I}{I'} = \frac{R'^2}{R^2} \quad (1)$$

donde *I* e *I'* representan, respectivamente, las intensidades del sonido a las distancias del foco *R* y *R'*. Haciendo,

$$I' = I_0 = 1 \cdot 10^{-12}\ W/m^2 \;\Rightarrow\; R' = 1\ km = 10^3\ m$$

La intensidad de una onda esférica viene dada por,

$$I = \frac{P_e}{S} \;\Rightarrow\; I' = \frac{P_e}{S'} = \frac{P_e}{4\pi R'^2}$$

así que despejando P_e obtenemos la potencia del foco,

$$P_e = 4\pi R'^2 I' = 4\pi \times \left(10^3\right)^2\ \frac{W}{m^2} \times 10^{-12}\ m^2 = 1{,}26 \cdot 10^{-5}\ W$$

Apartado b): para obtener la distancia *R* a la que $\beta = 50\ dB$, tenemos que hallar primero la intensidad del sonido a esa distancia. Recordemos que,

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

donde β es el nivel de intensidad sonora, por lo que despejando,

$$\log \frac{I}{I_0} = \frac{\beta}{10} \;\Rightarrow\; \frac{I}{I_0} = 10^{\beta/10} \;\Rightarrow\; I = I_0 10^{\beta/10} = 10^{-12} \times 10^{50/10} = 10^{-12} \times 10^5 = 10^{-7}\ W/m^2$$

Aplicando ahora la ecuación (1) y recordando que $I' = I_0 = 1 \cdot 10^{-12}\ W/m^2$ y $R' = 1\ km = 10^3\ m$,

$$R^2 = R'^2 \frac{I'}{I} \;\Rightarrow\; R = R'\sqrt{\frac{I'}{I}} = 10^3 \sqrt{\frac{10^{-12}}{10^{-7}}} = 10^3 \sqrt{10^{-5}} = 10^3 \times 3{,}16 \cdot 10^{-3} = 3{,}16\ m$$