OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una cadena de montaje está especializada en la producción de cierto modelo de motocicleta. Los costes de producción en euros, C(x), están relacionados con el número de motocicletas fabricadas, x, mediante la siguiente expresión:

$$C(x) = 10\,x^2 + 2000\,x + 250000$$

Si el precio de venta de cada motocicleta es 8000 euros y se venden todas las motocicletas fabricadas, se pide:

a) Definir la función de ingresos que obtiene la cadena de montaje en función de las ventas de las motocicletas producidas.
b) ¿Cuál es la función que expresa los beneficios de la cadena de montaje?
c) ¿Cuántas motocicletas debe fabricar para maximizar beneficios? ¿A cuánto ascenderán estos beneficios?

Solución:

a) La función, I(x), que nos da los ingresos en función de las ventas de las motocicletas producidas la obtenemos considerando que se fabrican y se venden x motocicletas, cada una a 8000€,
***I(x) = 8000 x**, siendo x = número de motocicletas fabricadas* $(x \in N)$.

b) La función que expresa los beneficios de la cadena de montaje, B(x), la obtenemos restando a los ingresos los costes de producción, C(x), es decir:

$$B(x) = I(x) - C(x) = 8000\,x - (\ 10\,x^2 + 2000\,x + 250000\ ) = 8000\,x - 10\,x^2 - 2000\,x - 250000 =$$
$$= -10\,x^2 + 6000\,x - 250000$$

Solución: $\mathbf{B(x) = -10\,x^2 + 6000\,x - 250000}$

c) Busquemos el máximo de B(x). Hay que considerar que $x \in N$.

$B'(x) = -20\,x + 6000$

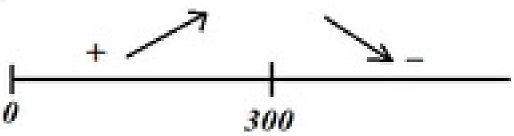
$-20\,x + 6000 = 0, \quad -20\,x = -6000, \quad x = \dfrac{-6000}{-20} = 300$

Estudiemos el signo de B´(x) a la izquierda y derecha de 300,

$x = 100,\ B'(100) = -20 \cdot 100 + 6000 = -2000 + 6000 = 4000 > 0$

$x = 400,\ B'(400) = -20 \cdot 400 + 6000 = -8000 + 6000 = -2000 < 0$

Por lo tanto:



Como a la izquierda de 300 B(x) es creciente y a la derecha decreciente, en x = 300 B(x) alcanza su máximo absoluto.

Para $x = 300,\ B(300) = -10 \cdot 300^2 + 6000 \cdot 300 - 250000 = 650000$

Solución: ***maximizará beneficios cuando fabrique 300 motocicletas** y, en este caso, **los beneficios ascenderán a 650000€.***

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Sea la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a}{x} & 2\le x<5\\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7\end{cases}$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en el intervalo [2 , 7].

b) Para a = 15, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ en el intervalo [2 , 7].

c) Calcula $\int_5^6 f(x)\,dx$.

Solución:

a) ¿a? / f(x) sea continua en [2 , 7]

Para $2\le x<5$, $f(x)=\dfrac{a}{x}$, *como* $x\ne 0$, *f(x) es continua.*

Para $5<x\le 7$, $f(x)=x^2-3x-8$, *como f(x) es un polinomio, f(x) es continua.*

Veamos la continuidad en $x=5$,

1) $f(5)=5^2-3\cdot 5-8=25-15-8=2$, *luego* $\exists f(5)$

2) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{a}{x}=\dfrac{a}{5}\\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}\left(x^2-3x-8\right)=5^2-3\cdot 5-8=2\end{cases}$, *para que exista el límite deben coincidir*

los dos límites laterales, es decir, $\dfrac{a}{5}=2 \;\rightarrow\; a=10$.

Por tanto, para $a=10$ *se cumple:* $\lim\limits_{x\to 5} f(x)=f(5)$, *luego f(x) es continua en* $x=5$.

Solución: ***f(x) es continua en [2 , 7] para a = 10.***

b) a = 15, ¿monotonía de f(x) en [2 , 7]?.

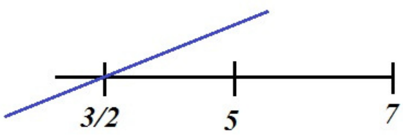
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{15}{x} & 2\le x<5\\ x^2-3x-8 & 5\le x\le 7\end{cases}\quad\rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-15}{x^2} & 2<x<5\\ 2x-3 & 5<x<7\end{cases}$$

Para $2<x<5$, $f'(x)=\dfrac{-15}{x^2}$, *por tanto,* $f'(x)<0 \rightarrow$ *f(x) es decreciente.*

Para $5<x<7$, $f'(x)=2x-3$,

$2x-3=0$, $2x=3$, $x=3/2$

Estudiemos el signo de $2x-3$ *en* [5 , 7]: $2x-3$ *es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y raíz 3/2, gráficamente:*



Por tanto, entre 5 y 7 $2x-3$ *es positivo; luego* $f'(x)$ *es positiva.*

Para $5<x<7$, *f(x) es crciente.*

Solución: ***f(x) es decreciente en (2 , 5) y creciente en (5 , 7).***

c) ¿ $\int_5^6 f(x)\,dx$?

Entre 5 y 6, f(x) = $x^2 - 3x - 8$, por tanto

$$\int_5^6 f(x)\;dx = \int_5^6 \left(x^2 - 3x - 8\right)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} - 8x\right]_5^6 == \left(\frac{6^3}{3} - 3\frac{6^2}{2} - 8\,.\,6\right) - \left(\frac{5^3}{3} - 3\frac{5^2}{2} - 8\,.\,5\right) =$$

$$= (72 - 54 - 48) - \left(\frac{125}{3} - \frac{75}{2} - 40\right) = -30 - \left(\frac{250 - 225}{6} - 40\right) - 30 - \frac{25}{6} + 40 = 10 - \frac{25}{6} = \frac{60 - 25}{6} = \frac{35}{6} \approx 5{\acute{}}8333$$

Solución: $\int_5^6 f(x)\,dx = \dfrac{35}{6}$

Problema 2. La evolución del precio de cierta acción, en euros, un día determinado siguió la función:

$$f(x) = 35'7\,\frac{x+2}{x^2+21}, \qquad x \in [0,8],$$

donde *x* representa el tiempo, en horas, transcurrido desde la apertura de la sesión. Se pide:

a) Calcular el valor máximo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
b) Calcular el valor mínimo que alcanzó la acción y en qué momento se alcanzó.
c) Una persona compró 20 acciones en el momento de la apertura ($x = 0$) y las vendió justo al cierre ($x = 8$). Determinar si obtuvo ganancias o pérdidas y la cuantía de estas.

Solución:

$$f(x) = 35'7\,\frac{x+2}{x^2+21}, \qquad x \in [0,8], \qquad \begin{matrix} x - \text{horas desde apertura} \\ f(x) \;-\; \text{euros} \end{matrix}$$

Por definición Dom f(x) = [0 , 8]

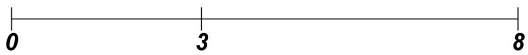
a) Máximo.

$$f'(x) = 35'7\,\frac{1.\left(x^2+21\right)-(x+2)\,2x}{\left(x^2+21\right)^2} = 35'7\,\frac{x^2+21-2x^2-4x}{\left(x^2+21\right)^2} = 35'7\,\frac{-x^2-4x+21}{\left(x^2+21\right)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 35'7\,\frac{-x^2-4x+21}{\left(x^2+21\right)^2} = 0 \;\rightarrow\; -x^2-4x+21 = 0$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2-4\,.\,(-1)\,.\,21}}{2\,.\,(-1)} == \frac{4 \pm \sqrt{16+84}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{-2} = \frac{4 \pm 10}{-2} = \left\langle \begin{matrix} x_1 = \dfrac{4+10}{-2} = \dfrac{14}{-2} = -7 \notin [0,8] \\ x_2 = \dfrac{4-10}{-2} = \dfrac{-6}{-2} = 3 \end{matrix} \right.$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos



$$x = 1 \;\rightarrow\; f'(1) = \frac{-1^2-4\cdot 1+21}{\left(1^2+21\right)^2} = 35'7 \cdot \frac{16}{22^2} > 0$$

$$x = 4 \;\rightarrow\; f'(4) = \frac{-4^2-4\cdot 4+21}{\left(4^2+21\right)^2} = 35'7 \cdot \frac{-16-16+21}{(16+21)^2} = 35'7 \cdot \frac{-11}{37^2} < 0$$

Luego:

Por tanto, en x = 3 hay un máximo relativo y como a la izquierda del 3 la función es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto.

$$x = 3 \;\rightarrow\; f(3) = 35'7 \cdot \frac{3+2}{3^2+21} = 35'7 \cdot \frac{5}{30} = 5'95$$

Por tanto, ***el precio de la acción alcanzó un valor máximo de 5´95 € al cabo de 3 horas de la apertura de la sesión.***

b) Mínimo.

Según lo estudiado en el apartado anterior el mínimo se alcanzará para $x = 0$ o $x = 8$

$$x=0 \quad \rightarrow \quad f(0) = 35'7 \cdot \frac{0+2}{0^2+21} = 35'7 \cdot \frac{2}{21} = 3'40$$

$$x=8 \quad \rightarrow \quad f(0) = 35'7 \cdot \frac{8+2}{8^2+21} = 35'7 \cdot \frac{10}{85} = 4'20$$

Por tanto, ***el precio de la acción alcanzó un valor mínimo de 3´40 € y fue en el momento de la apertura de la sesión.***

c) Utilizando los cálculos del apartado anterior.

Compra 20 acciones en el momento de la apertura, es decir, compra 20 acciones a 3´40 €/acción, entonces: coste = 20 . 3´40 = 68 €

Vende las 20 acciones a 4´20 €/acción, entonces: venta = 20 . 4´20 = 84

84 – 68 = 16

Obtuvo unas ganancias de 16€.

Problema 2. Sea la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3-3x-20 & x\le 3 \\ \dfrac{2}{a-x} & x>3 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de a para el que $f(x)$ es continua en $x = 3$.
b) Para $a = 0$, estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
c) Para $a = 0$, calcula los máximos y mínimos locales de $f(x)$.

Solución:
a) ¿a? / f(x) sea continua en x = 3.
Condiciones de continuidad
1) $f(3) = 3^3 - 3 \,.\, 3 - 20 = 27 - 9 - 20 = -2$, existe f(3)

$$2)\quad \underset{x\to 3}{Lím}\, f(x)=\begin{cases} \underset{x\to 3^-}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 3^-}{Lím}\left(x^3-3x-20\right)=3^3-3\,.\,3-20=-2 \\ \underset{x\to 3^+}{Lím}\, f(x)=\underset{x\to 3^+}{Lím}\left(\dfrac{2}{a-x}\right)=\dfrac{2}{a-3} \end{cases}$$

Para que exista el límite, los límites laterales deben coincidir, $-2=\dfrac{2}{a-3}$,

$$-2(a-3)=2 \;\rightarrow\; a-3=\frac{2}{-2} \;\rightarrow\; a-3=-1 \;\rightarrow\; a=-1+3 \;\rightarrow\; a=2$$

Luego, ***para que f(x) sea continua en x = 3 debe ser a = 2.***

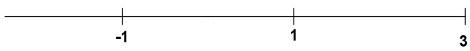
b) Para a = 0, ¿monotonía?.

$$Para\ a=0,\quad f(x)=\begin{cases} x^3-3x-20, & x\le 3 \\ \dfrac{2}{-x}=\dfrac{-2}{x}, & x>3 \end{cases}$$

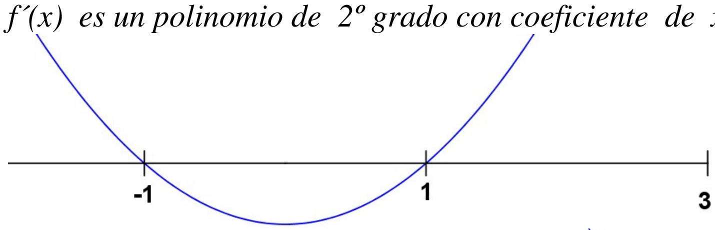
Por ser función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.
Para x < 3
$f(x) = x^3 - 3x - 20$, estudiemos el signo de $f'(x)$
$f'(x) = 3x^2 - 3$

$$3x^2-3=0 \;\rightarrow\; 3x^2=3 \;\rightarrow\; x^2=\frac{3}{3} \;\rightarrow\; x^2=1 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

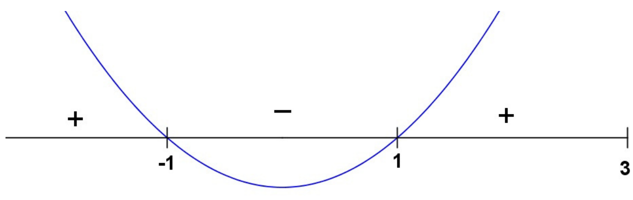
Hay que estudiar el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:



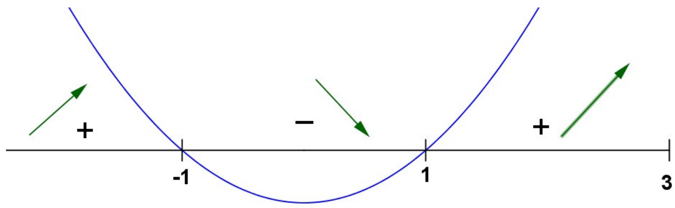
y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por x = 4´5:
$f'(x)$ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, por tanto:



En cada intervalo el signo de $f'(x)$ es:



Y el crecimiento y decrecimiento será



Para $x > 3$

$$f(x) = \frac{-2}{x}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot x - (-2) \cdot 1}{x^2} = \frac{2}{x^2}$$

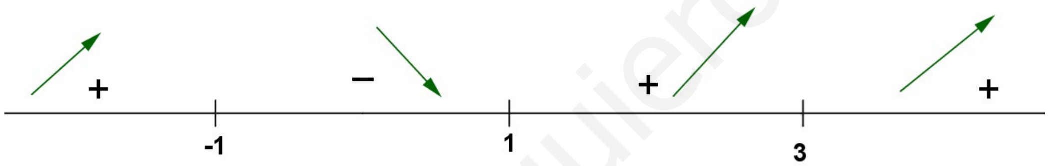
Estudiemos el signo de $f'(x)$, es una fracción, numerador positivo y como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo). Por tanto el signo de $f'(x)$ es positivo.
Para $x > 3$, la función es creciente.

Veamos si existe $f'(3)$

$$f'(3) = \begin{cases} f'(3^-) = 3 \cdot 3^2 - 3 = 24 \\ f'(3^+) = \dfrac{2}{3^2} = \dfrac{2}{9} \end{cases} \qquad 24 \neq \frac{2}{9} \quad \rightarrow \quad \text{No existe} \quad f'(3)$$

Por tanto, ***f(x) es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, 3) \cup (3, +\infty)$ y decreciente en $(-1, 1)$.***

c) Para $a = 0$, ¿extremos?
De lo estudiado en el apartado anterior:



Por tanto $f(x)$ tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.

$x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) - 20 = -1 + 3 - 20 = -18$

$x = 1 \;\rightarrow\; f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 - 20 = 1 - 3 - 20 = -22$

Finalmente, f(x) tiene un máximo local en $(-1, -18)$ y un mínimo local en $(1, -22)$.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. La velocidad (en m./seg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dada en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión: $f(x) = -0'00055\ x\ (x - 300)$
Deducir de forma razonada:

a) ¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima? ¿Cuál es ésta velocidad?
b) ¿Entre qué distancias su velocidad va aumentando? ¿Y disminuyendo?
c) ¿A qué velocidad llega a la meta?

Solución:

$f(x) = -0'00055\ x\ (x - 300) = -0'00055\ x^2 + 0'165\ x$

f(x) mide la velocidad en función del espacio recorrido, como la carrera es de 200 m $\text{Dom} f = [\ 0\ ,\ 200\ ]$

La representación gráfica de f(x) es una parábola. Esta representación es fácil de obtener y nos será útil para responder a las preguntas.

Puntos de corte con los ejes coordenados

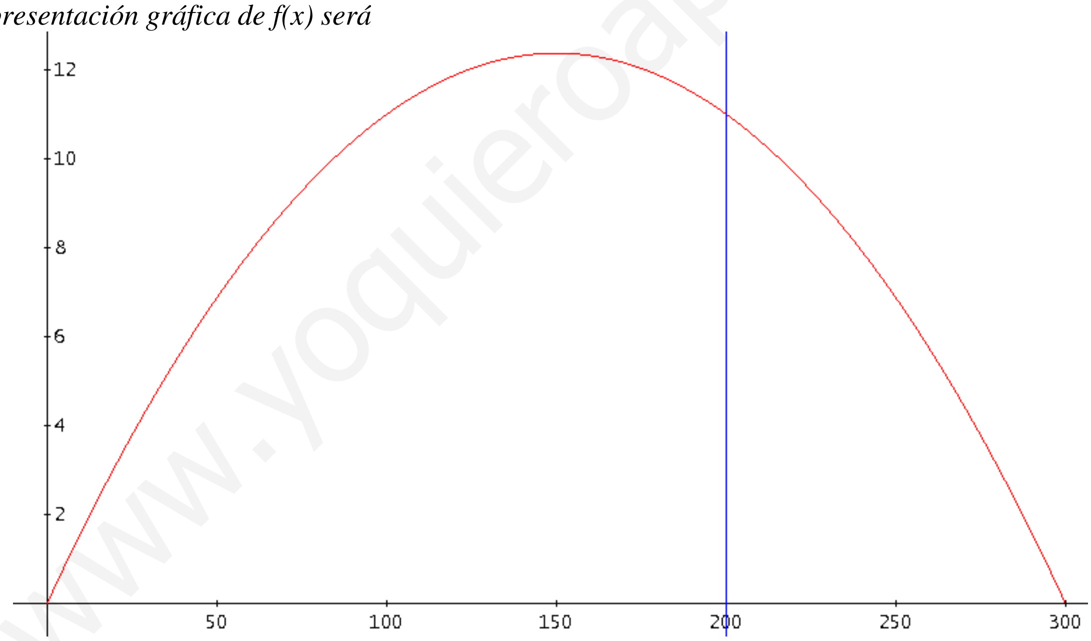
$x = 0 \ \rightarrow\ f(x) = -0'00055\ .\ 0^2 + 0'165\ .\ 0 = 0 \ \rightarrow\ (\ 0\ ,\ 0\ )$

$$f(x) = 0 \ \rightarrow\ 0'00055\ x\,(x-300) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} x = 0 & \rightarrow\ (\,0\,,0\,) \\ x - 300 = 0 \ \rightarrow\ x = 300 & \rightarrow\ (\,300\,,0\,) \end{cases}$$

Vértice

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-0'165}{2(-0'00055)} = 150 \ \rightarrow\ y = -0'00055\,.\,150\,(150-300) = 12'375 \ \rightarrow\ (\,150\,,12'375\,)$$

La representación gráfica de f(x) será



a) ¿velocidad máxima?

$f'(x) = -0'0011\ x + 0'165$

$$-0'0011\ x + 0'165 = 0 \ \rightarrow\ x = \frac{-0'165}{-0'0011} = 150$$

f''(x) = – 0'0011 luego f''(150) = – 0'0011, es decir, en x = 150 hay un máximo relativo.
Como f(x) es, gráficamente, una parábola "hacia abajo" y 150 está en el dominio de f(x) este máximo relativo que hemos obtenido es el máximo absoluto de f(x). Según los cálculos previos f(150) = 12'375.

El atleta alcanza su velocidad máxima, 12'375 m/s, cuando ha recorrido 150 m.

b) Podemos responder a esta pregunta de dos formas.

*1) Considerando la representación gráfica realizada al principio, obtenemos que **la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.***

2) Estudiando la monotonía de la función f(x)
Sabemos que Dom f = [0 , 200]
Por lo calculado en el apartado a) f'(x) = 0 para x = 150
Debemos estudiar el signo de f'(x) en los intervalos (0, 150) y (150 , 200)

intervalo	valor de x	$f'(x) = -0'0011\,x + 0'165$	
(0, 150)	100	$f'(x) = -0'0011 \cdot 100 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = 0'055 > 0$	creciente
(150 , 200)	180	$f'(x) = -0'0011 \cdot 180 + 0'165 = -0'11 + 0'165 = -0'033 < 0$	decreciente

Obtenemos que la velocidad va aumentando entre 0 m. y 150 m y disminuye entre 150 m. y 200 m.

c)
Como la meta está a 200 m. para saber la velocidad a la que llega basta con calcular f(200)
$f(200) = -0'00055 \cdot 200\,(200 - 300) = 11$

El corredor llega a la meta a 11 m/s

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Se cree que el número y de unidades vendidas de un cierto producto en función de su precio en euros, x, viene dado por y = 50 – x, donde el precio varía entre 0 y 50 euros. Si por cada unidad vendida se obtiene un beneficio x-10, determina de forma razonada el precio x que producirá un mayor beneficio, el número de unidades vendidas y el beneficio obtenido.

Solución:
Resumiendo en una tabla la información del problema,

Precio unidad	*Unidades vendidas*	*Beneficio unitario*	*Beneficio total*	
x	*50 – x*	*x – 10*	*(50 – x) (x – 10)*	*x € [0,50]*

Llamando z al beneficio total, $z = (50 - x)(x - 10) = 50x - 500 - x^2 + 10x = -x^2 + 60x - 500$, x € $[0,50]$
Queremos maximizar el beneficio, buscamos el máximo de la función z.
Busquemos el máximo relativo,
$z' = -2x + 60$, $-2x + 60 = 0$, $x = 30$
$z'' = -2$, *para* $x = 30$ $z'' < 0$, *para* $x = 30$ *z tiene un máximo relativo. ¿Es éste el máximo de z en el intervalo [0,50]?*
Gráficamente z es una parábola (invertida, coeficiente de x^2 *es -1), el máximo absoluto lo alcanza en su vértice,*

para $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2(-1)} = 30$

Por tanto, en x = 30 la función z alcanza su máximo en el intervalo [0,50].

	Precio unidad	*Unidades vendidas*	*Beneficio unitario*	*Beneficio total*	
	x	*50 – x*	*x – 10*	*(50 – x) (x – 10)*	*x € [0,50]*
Solución	*30 €*	*20*	*20 €*	*(50-30)(30-10)= =20 . 20 = 400 €*	

El precio que producirá un mayor beneficio es el de 30 €, el número de unidades vendidas será 20 y el beneficio obtenido será de 400 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Descomponer de forma razonada el número 90 en dos sumandos tales que el resultado de sumar el cuadrado del primero y el doble de cuadrado del segundo sea mínimo.

Solución:
El número 90 se descompone en los dos sumandos siguientes:

primer sumando $= x$
segundo sumando $= 90 - x$

La condición del problemas es que $x^2 + 2\,(90 - x)^2$ *sea mínimo. Consideramos la función* $y = x^2 + 2\,(90 - x)^2$ *, busquemos su mínimo.*

$y = x^2 + 2\,(90 - x)^2$

$y' = 2\,x + 4\,(90 - x)\,(-1) = 2\,x - 360 + 4\,x = 6\,x - 360$

$y' = 0 \rightarrow 6\,x - 360 = 0 \rightarrow x = 60$

$y'' = 6$ *como para* $x = 60$ $y'' = 6 > 0$*, en* $x = 60$ *hay un mínimo relativo.*

Para que se cumpla la condición del problema los sumandos deben ser 30 y 60.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Una multinacional ha estimado que anualmente sus ingresos en euros vienen dados por la función $I(x) = 28x^2 + 36.000x$, mientras que sus gastos (también en euros) pueden calcularse mediante la función $G(x) = 44x^2 + 12.000x + 700.000$, donde x representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

a) La función que define el beneficio anual en euros.
b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo. Justificar que es máximo.
c) El beneficio máximo.

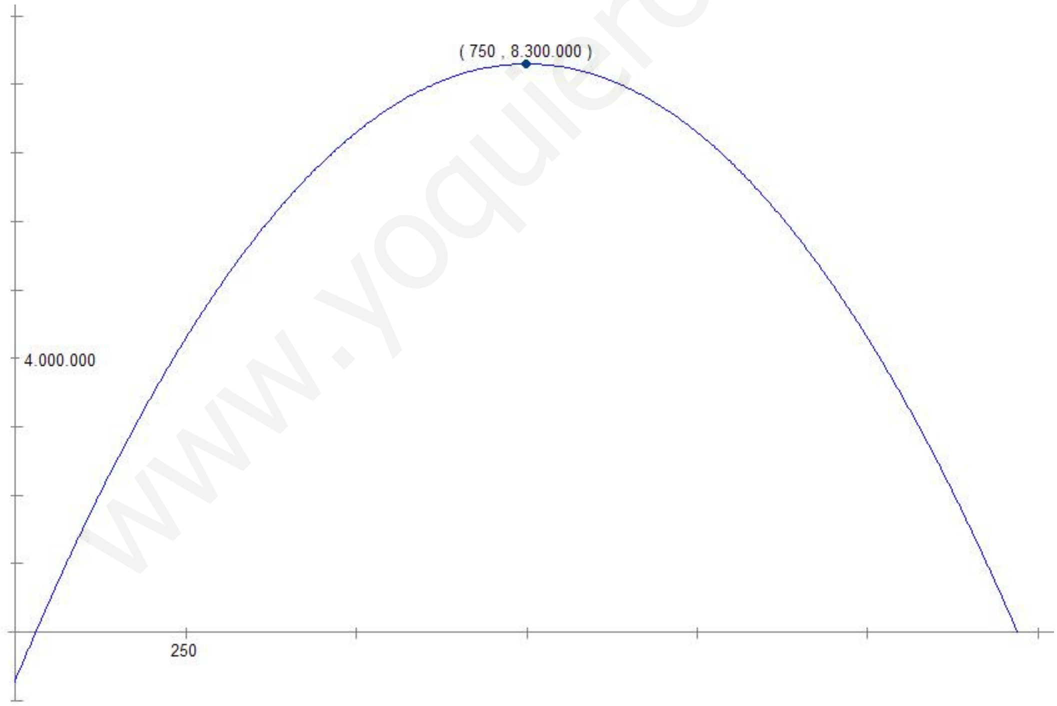
Solución:
La información que tenemos de la multinacional es:

Unidades vendidas	*Ingresos*	*Gastos*	*Beneficio*
x	$I(x) = 28x^2 + 36.000x$	$G(x) = 44x^2 + 12.000x + 700.000$	$I(x)$-$G(x)$

a) Por lo tanto la función que define el beneficio anual es,
$B(x) = (28x^2 + 36.000x) - (44x^2 + 12.000x + 700.000) = -16x^2 + 24000x - 700000$

b) Buscamos el máximo relativo de la función B(x),
$B'(x) = -32x + 24000$
$-32x + 24000 = 0 \rightarrow -32x = -24000 \rightarrow x = -24000/(-32) \rightarrow x = 750$
Veamos que este valor de x es el máximo de la función B(x),
como x representa el número de unidades vendidas, $x \geq 0$, $x = 750$ *es mayor que 0,*
la expresión de la función B(x), polinomio de 2º grado, corresponde a una parábola, el coeficiente de x^2 *es negativo, la parábola va "hacia abajo", por tanto B(x) alcanza su máximo absoluto en x=750.*
Para que el beneficio sea máximo hay que vender 750 unidades.

También podemos hacer una representación gráfica de la función B(x) para comprobar que x = 750 es el máximo absoluto.



c) El beneficio máximo será $B(750) = -16 \cdot 750^2 + 24000 \cdot 750 - 700000 = 8300000$
El beneficio máximo es 8.300.000 €

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Se estima que los beneficios mensuales de una fábrica de golosinas, en miles de euros, vienen dados por la función $f(x) = -0,1x^2 + 2,5x - 10$, cuando se venden x toneladas de producto. Se pide:

a) Calcular la cantidad de toneladas que se ha de vender para obtener el beneficio máximo y calcular éste. Justificar que es máximo.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas.

c) ¿Qué cantidad produce el máximo beneficio por tonelada vendida? Calcular el máximo beneficio y justificar que es máximo.

Solución:

a) Calculemos el dominio de la función f(x). Esta función da los beneficios dependiendo de las toneladas de producto vendidas, luego el dominio de f(x) serán los valores de x tales que f(x) ≥ 0.

Resolvamos la inecuación $-0,1x^2 + 2,5x - 10 \geq 0$*, para ello resolvemos la ecuación,*

$$-0,1x^2 + 2,5x - 10 = 0 \qquad x = \frac{-2'5 \pm \sqrt{2'5^2 - 4(-0'1)(-10)}}{2(-0'1)} = \frac{-2'5 \pm \sqrt{6'25-4}}{-0'2} = \frac{-2'5 \pm \sqrt{2'25}}{-0'2} =$$

$$= \frac{-2'5 \pm 1'5}{-0'2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-2'5+1'5}{-0'2} = \dfrac{-1}{-0'2} = 5 \\ x_2 = \dfrac{-2'5-1'5}{-0'2} = \dfrac{-4}{-0'2} = 20 \end{cases}$$

Como f(x) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo la solución de f(x) ≥ 0 es el intervalo [5 , 20].
Por tanto Dom f(x) = [5 , 20]

El máximo relativo de f(x) se alcanza en su vértice $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2'5}{2(-0'1)} = 12'5$

Como 12´5 Є [5 , 20] el máximo relativo es máximo absoluto de f(x).

Para x = 12´5, f(x) = – 0´1 . 12´5^2 + 2´5 . 12´5 – 10 = 5´625

Para obtener un beneficio máximo hay que vender 12´5 toneladas del producto y el beneficio será de 5625 €.

b) La cantidad mínima que se ha de vender para no tener pérdidas es 5 toneladas, según obtuvimos en el apartado anterior al calcular el dominio de f(x).

c) El beneficio por tonelada vendida viene dado por la función

$$y = \frac{-0'1x^2 + 2'5x - 10}{x} \qquad x \in [5,20]$$

Calculemos el máximo de esta función,

$$y' = \frac{(-0'2x+2'5)x - (-0'1x^2+2'5x-10)}{x^2} = \frac{-0'2x^2+2'5x+0'1x^2-2'5x+10}{x^2} = \frac{-0'1x^2+10}{x^2}$$

Estudiemos la monotonía de y,

$$-0'1x^2 + 10 = 0 \;\rightarrow\; 0'1x^2 = 10 \;\rightarrow\; x^2 = 100 \;\rightarrow\; x = \pm 10$$

$$x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 0$$

calculemos el signo de y´ en los siguientes intervalos,

intervalo	x	y'
$(-\infty,-10)$	-20	$\frac{-0'1(-20)^2+10}{(-20)^2} = \frac{-40+10}{200} =$ *negativo*
$(-10,0)$	-5	$\frac{-0'1(-5)^2+10}{(-5)^2} = \frac{-2'5+10}{25} =$ *positivo*
$(0,10)$	5	$\frac{-0'1(5)^2+10}{(5)^2} = \frac{-2'5+10}{25} =$ *positivo*
$(10,+\infty)$	20	$\frac{-0'1(20)^2+10}{(20)^2} = \frac{-40+10}{200} =$ *negativo*

Como el dominio de la función y es el intervalo [5 , 20], el estudio anterior nos dice que la función y es creciente en (5 , 10) y decreciente en (10 , 20), luego en x = 10 hay un máximo relativo.

Para x = 10 $y = \dfrac{-0'1.10^2 + 2'5.10 - 10}{10} = \dfrac{-10 + 25 - 10}{10} = \dfrac{5}{10} = 0'5$

Este máximo relativo es máximo absoluto por que y(5)=0 e y(20)=0 (para estos valores de x el numerador de y es 0, obtenido en el primer apartado) e y(10)=0´5.

La cantidad que produce el máximo beneficio por tonelada vendida es 10 toneladas, el beneficio será (10.0´5 = 5 miles de €) 5000 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Una empresa de telefonía quiere lanzar al mercado una oferta de tarifa plana de internet. Se ha realizado un estudio que determina que si la tarifa fuera de 36 € podrían conseguirse 4800 contratos. Sin embargo, por cada euro menos en la tarifa, el número de contratos previsto anteriormente se incrementaría en 150. Se pide:

a) Expresar el ingreso total previsto como una función de una variable. Explica el significado de la variable utilizada.
b) ¿Cuál debería ser la tarifa para que la empresa obtuviera el ingreso máximo? ¿Cuál es éste y con cuántos abonados se conseguiría? Justificar que el ingreso obtenido realmente es máximo.

Solución

De los datos del problema obtenemos la siguiente tabla de valores,

tarifa (€)	*nº de contratos*	*ingreso total*
36	4800	36 . 4800
35	4800 + 150	35 . 4950
34	4800 + 150 . 2	34 . 5100
…	…	…
36 – x	4800 + 150 x	…

siendo x el número de euros que rebajamos la tarifa inicial, luego x puede tomar valores de 0 a 36.

a) El ingreso total previsto en función de los euros que rebajemos la tarifa inicial (36 €) será:

$I(x) = (36 - x)\,(4800 + 150\,x) \quad x = 0, 1, \dots, 36$

Efectuando operaciones, $I(x) = 172800 + 5400\,x - 4800\,x - 150\,x^2 = -150\,x^2 + 600\,x + 172800$

b) Para encontrar el ingreso máximo representamos la parábola $y = -150\,x^2 + 600\,x + 172800$

$x = 0;\ y = 172800$

$$y = 0;\ (36 - x)(4800 + 150\,x) = 0 \quad \left|\ \begin{array}{l} 36 - x = 0;\ x = 36 \\ 4800 + 150\,x = 0;\ x = -4800/150;\ x = -32 \end{array}\right.$$

vértice de la parábola,

$$x = \frac{36 - 32}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow \quad y = (36 - 2)\,(4800 + 150\,.\,2) = 34\,.\,5100 = 173400$$

Como el coeficiente de x^2 *en la parábola es negativo, el vértice es el máximo de la parábola.*

La función I(x) que nos interesa toma valores para x = 0, 1, 2, …, 36. La parábola alcanza el máximo para x = 2 (uno de los valores que estudiamos), la función I(x) alcanza su máximo para x = 2.

Para que el ingreso sea máximo debemos rebajar la tarifa inicial (36 €) en dos euros, es decir:

tarifa: 34 €
nº de abonados: 5100
ingreso: 173400 €

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Los beneficios anuales B(x), en miles de euros, previstos por una empresa para los próximos años vienen dados por la siguiente función, donde x representa el número de años a partir del actual:

$$B(x) = \frac{25x}{x^2 + 16}$$

a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que la empresa obtenga el máximo beneficio y cuál es el valor de dicho beneficio? Justifica que es máximo.

b) ¿Puede esta empresa tener pérdidas algún año? ¿Por qué?

Solución:

a)

Como x representa el número de años a partir del actual, x tomará valores mayores o iguales que 0.

En la definición de B(x) tenemos como denominador la expresión $x^2 + 16$ que es distinta de cero para cualquier valor de x.

Por lo tanto el dominio de la función B(x) son los reales no negativos. Teniendo en cuenta esta restricción busquemos el máximo de B(x).

Empezamos realizando el cálculo como si el dominio de B(x) fueran todos los números reales.

$$B'(x) = \frac{25(x^2+16) - 2\,x\,25\,x}{(x^2+16)^2} = \frac{25x^2 + 400 - 50\,x^2}{(x^2+16)^2} = \frac{-25x^2+400}{(x^2+16)^2}$$

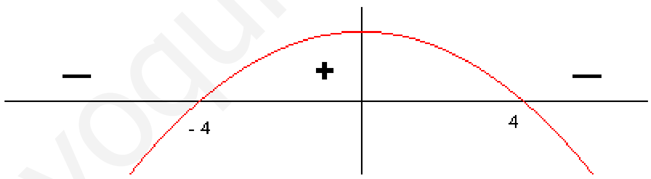
$$B'(x) = 0 \quad \to \quad \frac{-25x^2+400}{(x^2+16)^2} = 0 \quad \to \quad -25x^2 + 400 = 0$$

$$25x^2 = 400$$

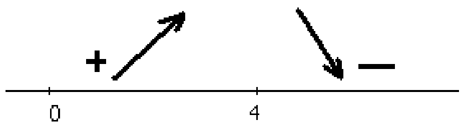
$$x^2 = \frac{400}{25} = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

En B´(x) el signo está determinado por el numerador (el denominador es un polinomio elevado al cuadrado, luego siempre positivo). El numerador es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 negativo, luego el signo de B´(x) será,



Como el dominio de B(x) son los números no negativos, consideramos el signo de B´(x) en este dominio,



Por lo tanto en x = 4 B(x) presenta un máximo relativo que además es el absoluto ya que a la izquierda de x=4 B(x) es creciente y a la derecha es decreciente.

Para $x = 4$ $B(x) = \dfrac{25\,.\,4}{4^2+16} = \dfrac{100}{32} = 3'125$

Solución: para que la empresa obtenga el máximo beneficio han de transcurrir 4 años, al cabo de los cuales obtendrá un beneficio de 3125 €.

b)

La empresa tendrá pérdidas cuando B(x) sea negativo.

Los valores que puede tomar la variable x son no negativos, por lo tanto el numerador de B(x), 25 x, es no negativo. El denominador de B(x), $x^2 + 16$, es positivo para cualquier valor de x. En consecuencia:

$$\forall\; x \in Dom(B(x)) \quad B(x) \geq 0$$

Es decir, la empresa nunca tendrá pérdidas.

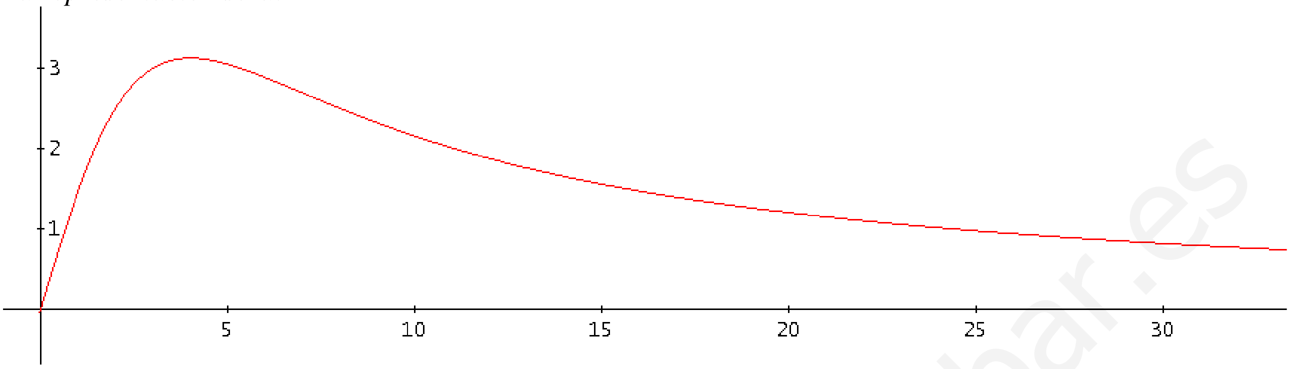
Otra forma de resolver este apartado es haciendo una representación gráfica aproximada de B(x).
Estudiamos los siguientes apartados:
Máximo relativo (4 , 3´125) (obtenido en el apartado anterior).
Cortes con los ejes,

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=\dfrac{25.0}{0^2+16}=0 \qquad (0,0) \\ y=0 \rightarrow \dfrac{25x}{x^2+16}=0 \rightarrow 25x=0 \rightarrow x=0 \qquad (0,0) \end{cases}$$

Asíntota,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{25x}{x^2+16}=0 \rightarrow y=0 \quad A.H.\ en +\infty$$

La representación será:



Como los valores que toma la función B(x) nunca son negativos, la empresa no tiene pérdidas.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Calcula los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ en el intervalo [1 , 4]. Justifica que los puntos encontrados son máximos o mínimos absolutos.

b) Estudia la continuidad en el intervalo [0,4] de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & 0 \le x < 1 \\ x^3 - 6x^2 + 9x + 1 & 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

Solución:

a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$

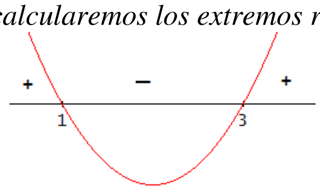
Calculemos, previamente, los extremos relativos de esta función polinómica.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$3x^2 - 12x + 9 = 0$

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

Estudiando el signo de f´ calcularemos los extremos relativos de f. Lo haremos gráficamente

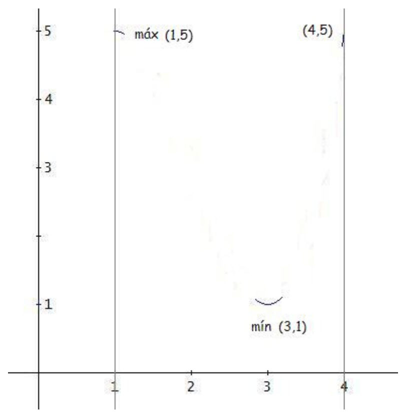


Por lo que f(x) tiene un máximo relativo en x = 1   y   un mínimo relativo en x = 3.

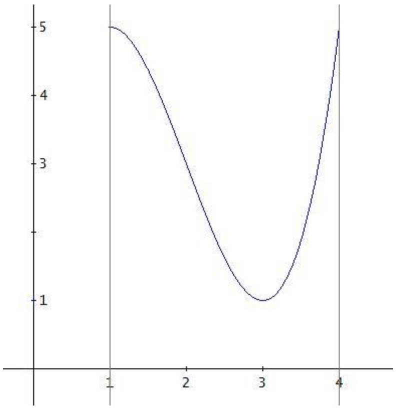
Para encontrar los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [1 , 4] representaremos, de forma aproximada, f(x) en este intervalo.

x	$f(x)$
1	$1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5 \quad máx.\ rel.$
3	$3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 1 = 27 - 54 + 27 + 1 = 1 \quad mín.\ rel.$
4	$4^3 - 6 \cdot 4^2 + 9 \cdot 4 + 1 = 64 - 96 + 36 + 1 = 5$

Representando los datos de que disponemos:



La función f(x) en [1,4] será:



Por lo tanto la función f(x) en el intervalo [1 , 4] tiene:
un mínimo absoluto en el punto (3 , 1) y
dos máximos absolutos en los puntos (1 , 5) y (4 , 5)

b) *La función de la que debemos estudiar su continuidad está definida "a trozos" por lo que estudiaremos su continuidad en cada trozo y en los puntos de cambio de definición.*

Para $0 \le x < 1$, $f(x) = 2x + 3$, es un polinomio luego es continua
Para $1 < x \le 4$, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, es un polinomio luego es continua
Para $x = 1$, en $x = 1$ hay un cambio de definición, procedemos como sigue,

a) $f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 1 = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$

b) $$\lim_{x\to 1} f(x) = \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \left(x^3 - 6x^2 + 9x + 1\right) = 5 \end{array} \right\} = 5$$

c) *Función y límite coinciden*
En consecuencia f(x) es continua en $x = 1$.

Luego hemos obtenido que f(x) es continua en el intervalo [1 , 4]

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El coste de fabricación en euros de x unidades de un artículo viene dado por la función $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 20$

a) ¿Cuál es la función que determina el coste de fabricación unitario?
b) ¿Para qué producción resulta mínimo el coste unitario? ¿Cuánto vale éste? Justifica que es mínimo.

Solución:

a) La función que determina el coste de fabricación unitario es

$$u(x) = \frac{x - 2\sqrt{x} + 20}{x} \qquad x = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

b) Buscamos los mínimos relativos de la función u(x) y después obtendremos el mínimo absoluto.
Calculemos u´(x)

$$u'(x) = \frac{\left(1 - \frac{2}{2\sqrt{x}}\right)x - \left(x - 2\sqrt{x} + 20\right)1}{x^2} = \frac{x - \frac{x}{\sqrt{x}} - x + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\frac{x}{\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{x}\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} =$$

$$= \frac{-\frac{x\sqrt{x}}{x} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{-\sqrt{x} + 2\sqrt{x} - 20}{x^2} = \frac{\sqrt{x} - 20}{x^2}$$

Estudiemos el signo de u´(x); como u´ es un cociente calculamos las raíces del numerador y denominador,

$$\sqrt{x} - 20 = 0 \quad \rightarrow \quad \sqrt{x} = 20 \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = 20^2 \quad \rightarrow \quad x = 400$$

$$x^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0$$

x = 0 no es del dominio de la función u(x).

Representamos en la recta los valores obtenidos

x	$u'(x)$
100	$\frac{\sqrt{100} - 20}{100^2} = \frac{10 - 20}{100^2} = -$
625	$\frac{\sqrt{625} - 20}{625^2} = \frac{25 - 20}{625^2} = +$

Por lo tanto en x = 400 hay un mínimo relativo.

Para comprobar que este mínimo relativo es absoluto veamos los valores de la función u(x) en x = 1 y x = 400

x	$u(x)$
1	$\frac{1 - 2\sqrt{1} + 20}{1} = \frac{21 - 2}{1} = 19$
400	$\frac{400 - 2\sqrt{400} + 20}{400} = \frac{420 - 40}{400} = \frac{380}{400} = 0{,}95$

Luego queda probado que el mínimo relativo es absoluto de la función u(x).

En resumen: el coste unitario resulta mínimo para una producción de 400 unidades y este coste unitario es de 0´95 €

BLOQUE D

PROBLEMA D1. El rendimiento de cierto producto en función del tiempo de uso (medido en años) viene dado por la expresión:

$$f(x) = 8{,}5 + \frac{3x}{1+x^2}, \quad x \geq 0$$

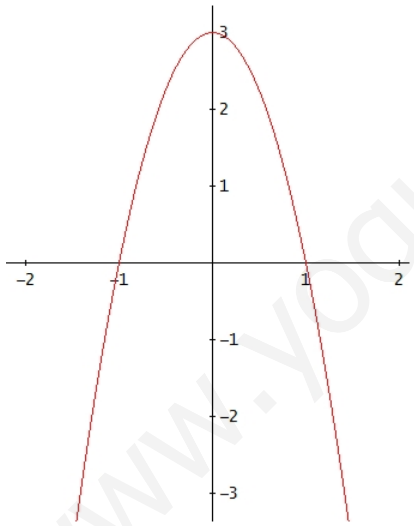
a) ¿Existen intervalos de tiempo en los que el rendimiento crece? ¿Y en los que decrece? ¿Cuáles son?
b) ¿En qué punto se alcanza el rendimiento máximo? ¿Cuánto vale éste?
c) Por mucho que pase el tiempo, ¿puede llegar a ser el rendimiento inferior al rendimiento que el producto tenía inicialmente? ¿Por qué?

Solución:
En la definición de la función hay un cociente cuyo denominador es $1 + x^2$, que siempre es distinto de cero. Por lo que el dominio de f(x), teniendo en cuenta su definición, será $[\ 0\ ,\ +\infty\ )$
a) Crecimiento, decrecimiento.
Estudiemos el signo de f´(x).

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 2x\,.\,3x}{(1+x^2)^2} = \frac{3+3x^2-6x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

Puesto que el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado, el signo de f´(x) depende del numerador.
$3 - 3x^2 = 0;\quad 3 = 3x^2;\quad 1 = x^2;\quad x = \pm 1$
Considerando el dominio de definición de la función, debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

Como hemos dicho anteriormente el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado de raíces – 1 y 1. Por lo que podemos obtener el signo del numerador mediante la representación gráfica de la correspondiente parábola,



Luego el signo de f´(x) en los intervalos a estudiar es,

Por lo tanto, f(x) es creciente en el intervalo $(\ 0\ ,\ 1\ )$ y decreciente en $(\ 1\ ,\ +\infty\ )$.

b) Máximo.
Según lo estudiado anteriormente como f(x) es creciente en el intervalo $(\ 0{,}1\ )$ y decreciente en $(\ 1,+\infty\ )$, alcanza su máximo para x = 1.

$$f(1) = 8{,}5 + \frac{3.1}{1+1^2} = 8{,}5 + \frac{3}{2} = 8{,}5 + 1{,}5 = 10$$

El valor máximo es 10.

c) Rendimiento.
Calculemos el rendimiento inicial, será para x = 0,

$$f(0) = 8{,}5 + \frac{3.0}{1+0^2} = 8{,}5 + \frac{0}{1} = 8{,}5 + 0 = 8{,}5$$

El rendimiento a largo plazo lo calculamos mediante el siguiente límite,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\, f(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(8{,}5 + \frac{3x}{1+x^2}\right) = 8{,}5 + \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} \overset{(a)}{=}$$

Calculemos ahora el límite pendiente,

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{1+x^2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$$

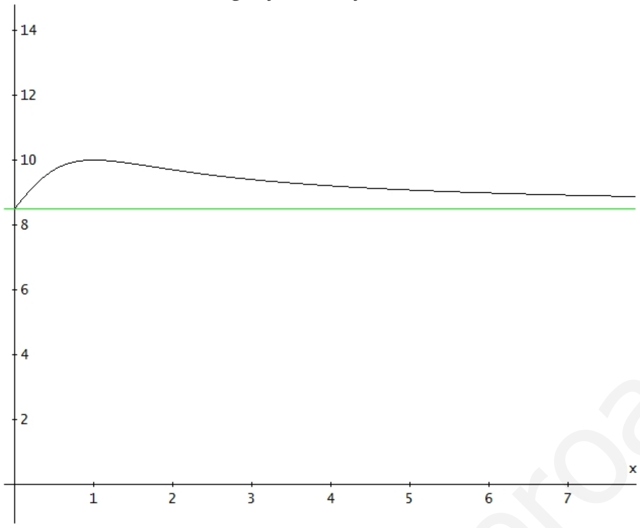
luego $\overset{(a)}{=} 8{,}5 + 0 = 8{,}5$

Respondamos a la pregunta del ejercicio,

para $x \geq 0$ $\quad \frac{3x}{1+x^2} \geq 0$ *, luego* $f(x) \geq 8{,}5$ *cuando* $x \geq 0$

por lo que por mucho que pase el tiempo el rendimiento del producto se mantiene por encima del rendimiento inicial y va acercándose a este valor inicial.

Esto lo podemos observar en la gráfica de f(x),



BLOQUE D

PROBLEMA D2. Dada la función $f(x) = x^3 - 12x + 7$, se pide

a) Hallar sus máximos y mínimos relativos.
b) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-3, 3]$.
c) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-4, 4]$.
d) Hallar sus máximos y mínimos absolutos en el intervalo $[-5, 5]$.

Solución:

Previo: como $f(x)$ es una función polinómica, su dominio es todos los números reales.

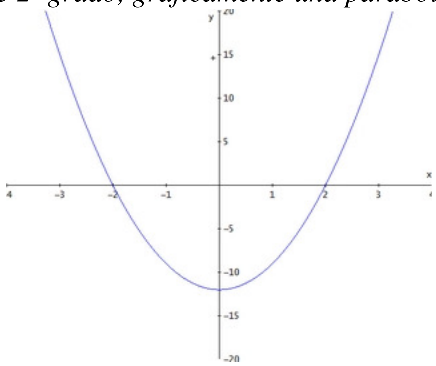
a) Máximos y mínimos relativos.

Debemos estudiar el signo de $f'(x)$,

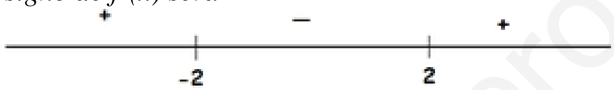
$f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0; \quad 3x^2 = 12; \quad x^2 = 4; \quad x = \pm 2$

En la recta real marcamos los valores de x, -2 y 2, y estudiamos el signo de $f'(x)$ teniendo en cuenta que $f'(x)$ es un polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola, con coeficiente de x^2 positivo, es decir:



Por lo que el signo de $f'(x)$ será



Luego en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 2$ un mínimo relativo.

Calculemos los valores de $f(x)$ correspondientes,

$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 7 = -8 + 24 + 7 = 23$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 7 = 8 - 24 + 7 = -9$

Y finalmente, $f(x)$ tiene un máximo relativo en el punto $(-2, 23)$ y un mínimo relativo en el punto $(2, -9)$.

Para contestar a los siguientes apartados debemos considerar que por ser $f(x)$ una función polinómica, es una función continua y derivable en R. Entonces, al restringir el estudio de sus extremos absolutos a un intervalo cerrado, sabemos que estos se alcanzan en los extremos del intervalo o en los extremos relativos obtenidos en el apartado anterior.

Calcularemos los valores de la función en los extremos del intervalo correspondiente y lo compararemos con los extremos relativos. Así determinaremos los extremos absolutos.

b) Extremos absolutos en $[-3, 3]$.

$x = -3; \quad f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 7 = -27 + 36 + 7 = 16$

$x = 3; \quad f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 7 = 27 - 36 + 7 = -2$

luego en el intervalo $[-3, 3]$ el máximo absoluto es $(-2, 23)$ y el mínimo absoluto es $(2, -9)$.

c) Extremos absolutos en $[-4, 4]$.

$x = -4; \quad f(-4) = (-4)^3 - 12(-4) + 7 = -64 + 48 + 7 = -9$

$x = 4; \quad f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4 + 7 = 64 - 48 + 7 = 23$

luego en el intervalo $[-4, 4]$ los máximos absolutos son $(-2, 23)$ y $(4, 23)$ y los mínimos absolutos son $(2, -9)$ y $(-4, -9)$.

d) Extremos absolutos en $[-5, 5]$.

$x = -5; \quad f(-5) = (-5)^3 - 12(-5) + 7 = -125 + 60 + 7 = -58$

$x = 5; \quad f(5) = 5^3 - 12 \cdot 5 + 7 = 125 - 60 + 7 = 72$

luego en el intervalo $[-5, 5]$ el máximo absoluto es $(5, 72)$ y el mínimo absoluto es $(-5, -58)$.

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. La siguiente función representa la valoración de una empresa en millones de euros en función del tiempo, t, a lo largo de los últimos 13 años:

$$f(t)=\begin{cases} 5-0{,}1\,t & 0\le t<5 \\ 4{,}5+0{,}05\,(t-5) & 5\le t<10 \\ 4{,}75+0{,}1\,(t-10)^2 & 10\le t\le 13 \end{cases}$$

Estudia analíticamente en el intervalo [0, 13]:

a) Si la función f(t) es o no continua, indicando en caso negativo los puntos de discontinuidad.
b) Instante t en el que la valoración de la empresa es máxima y dicha valoración máxima.
c) Instante t en el que la valoración de la empresa es mínima y dicha valoración mínima.

Solución:

a) La función f(t) está definida mediante tres ramas que son funciones polinómicas y, por tanto, funciones continuas en sus correspondientes intervalos abiertos de definición.

Estudiemos la continuidad en los puntos de cambio de definición,

t=5

f(5) = 4´5 + 0´05 (5 – 5) = 4´5

$$\underset{t\to 5}{Lím}\, f(t)=\left\{\begin{array}{l} \underset{t\to 5^-}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 5^-}{Lím}(5-0´1t)=5-0´1\,.\,5=4´5 \\ \underset{t\to 5^+}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 5^+}{Lím}(\,4´5+0´05(t-5)\,)=4´5+0´05(5-5)=4{,}5 \end{array}\right\}=4´5$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 5

t=10

f(10) = 4´75 + 0´1 (10 – 10)^2 = 4´75

$$\underset{t\to 10}{Lím}\, f(t)=\left\{\begin{array}{l} \underset{t\to 10^-}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 10^-}{Lím}\left(\,4´5+0´05(t-5)\,\right)=4´5+0´05(10-5)=4´75 \\ \underset{t\to 10^+}{Lím}\, f(t)=\underset{t\to 10^+}{Lím}\left(\,4´75+0´1(t-10)^2\,\right)=4´75+0´1(10-10)^2=4´75 \end{array}\right\}=4´75$$

Como los valores de la función y del límite coinciden, f(t) es continua en t = 10

La función está definida en el intervalo cerrado [0 , 13], entendemos que en t = 0 f(t) es continua por la derecha y en t = 13 lo es por la izquierda.

Finalmente, f(t) es continua en [0 , 13].

Para resolver los apartados b) y c) representamos gráficamente la función.

Las dos primeras ramas de la función son polinomios de primer grado, gráficamente líneas rectas, utilizaremos una tabla de valores para los valores inicial y final.

La tercera rama es un polinomio de segundo grado, gráficamente una parábola, utilizaremos tabal de valores y cálculo de su vértice.

recta

t	$5-0´1t$
0	5
5	4´5

recta

t	$4´5+0´05(t-5)$
5	4´5
10	4´75

parábola

t	$4´75+0´1(t-10)^2$
10	4´75
13	$4´75+0´1(13-10)^2=5´65$

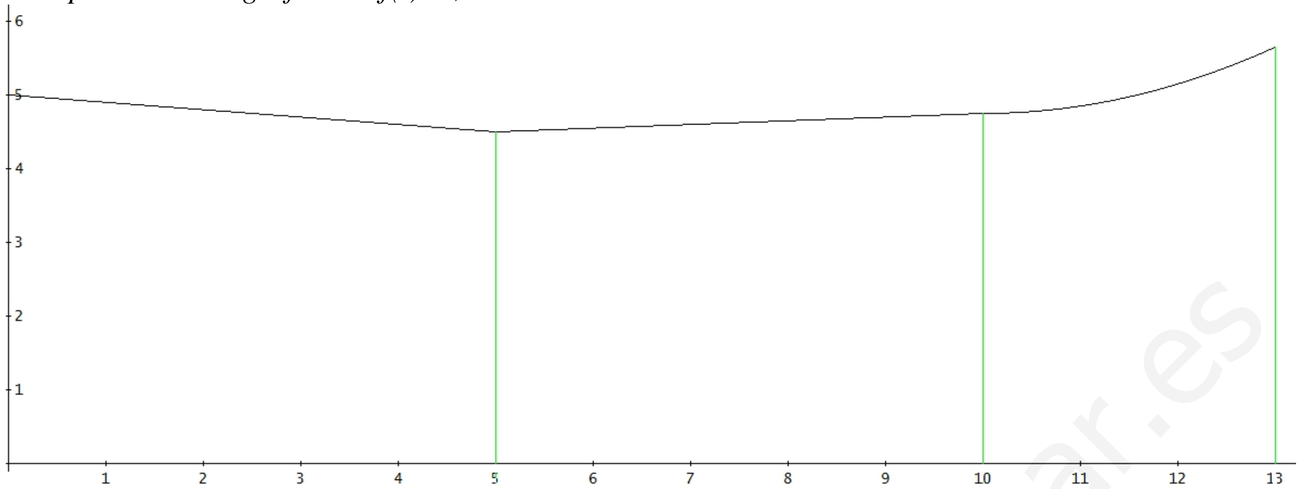
La mayoría de los cálculos están escritos directamente porque están realizados en el apartado anterior.

Obtengamos el vértice de la parábola,

$$4'75 + 0'1(t-10)^2 = 4'75 + 0'1(t^2 - 20t + 100) = 4'75 + 0'1t^2 - 2t + 10 = 0'1t^2 - 2t + 14'75$$

Y el vértice de la parábola será, $t = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-(-2)}{2 \cdot 0'1} = \dfrac{2}{0'2} = 10 \rightarrow (10, 4'75)$

La representación gráfica de f(t) es,



b) La valoración máxima se alcanza a los 13 años y es de 5´65 millones de euros.

c) La valoración mínima se alcanza a los 5 años y es de 4´5 millones de euros.

PROBLEMA 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases}-x^2-2x+3 & si \quad 0\le x<1\\ x-1 & si \quad 1\le x\le 3\end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0 , 3].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x).
c) Calcula el área de la región determinada por la gráfica de la función y las rectas x = 0, y = 0 y x = 3.

Solución:

a) f(x) es una función definida a trozos, cada trozo es un polinomio luego cada trozo es continuo; el problema de continuidad está en el punto de cambio de definición, es decir, para x = 1. Estudiemos la continuidad en x = 1:

1ª) f(1) = 1 – 1 = 0, luego ∃ f(1).

$$2^a)\quad \lim_{x\to 1} f(x)=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(-x^2-2x+3\right)=-1^2-2\,.\,1+3=-1-2+3=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=1-1=0\end{array}\right\}=0,$$

$$3^a)\quad f(1)=\lim_{x\to 1} f(x)$$

Se cumplen las tres condiciones de continuidad, f(x) es continua en x = 1. Por lo tanto f(x) es continua en [0 , 3].

b) Para calcular los máximos y mínimos absolutos de f(x) representamos gráficamente esta función.
Considerando que el primer trozo de f(x) es una parábola y el segundo una línea recta obtendremos una tabla de valores de la función y calcularemos el vértice de a parábola.

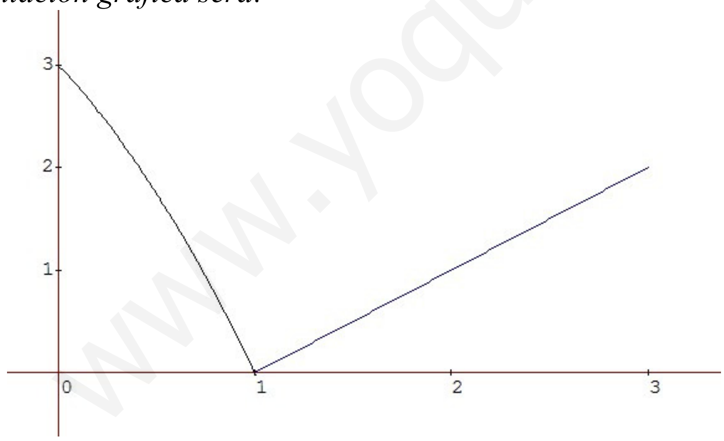
x	$f(x)$
0	$-0^2-2.0+3=3$
1	0
3	$3-1=2$

Vértice de la parábola $y=-x^2-2x+3$

$$x=\frac{-b}{2a}=\frac{-(-2)}{2(-1)}=\frac{2}{-2}=-1$$

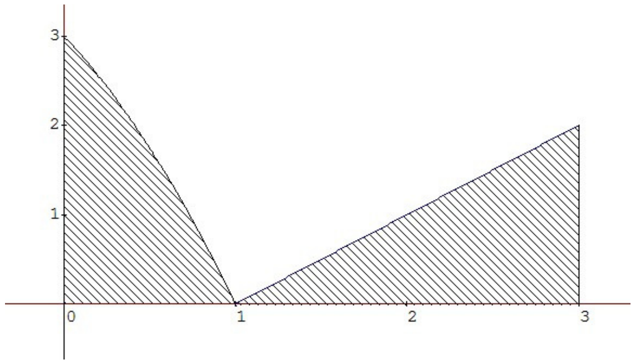
el vértice no es del dominio de la función f(x)

La representación gráfica será:



Por lo tanto, el máximo absoluto de f(x) es el punto (0 , 3) y el mínimo absoluto es el punto (1 , 0).

c) El área a calcular es:



Este área podemos calcularla mediante las siguientes integrales:

$$A=\int_0^1\left(-x^2-2x+3\right)dx+\int_1^3(x-1)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^3=$$

$$=\left(-\frac{1^3}{3}-1^2+3.1\right)+\left(\frac{3^2}{2}-3\right)-\left(\frac{1^2}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}-1+3\right)+\left(\frac{9}{2}-3\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)=\left(-\frac{1}{3}+2\right)+\left(\frac{9-6}{2}\right)-\left(\frac{1-2}{2}\right)=$$

$$=\left(\frac{-1+6}{3}\right)+\frac{3}{2}-\left(\frac{-1}{2}\right)=\frac{5}{3}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{3}+\frac{4}{2}=\frac{5}{3}+2=\frac{5+6}{3}=\frac{11}{3}$$

Finalmente este área mide $\frac{11}{3}u^2$

BLOQUE B

PROBLEMA 2. Una empresa dispone de 15 comerciales que proporcionan unos ingresos por ventas de 5750 euros mensuales cada uno. Se calcula que por cada nuevo comercial que contrate la empresa los ingresos de cada uno disminuyen en 250 euros. Calcula:

a) Los ingresos mensuales de la empresa proporcionados por los 15 comerciales.
b) La función que determina los ingresos mensuales que se obtendrían si se contrataran x comerciales más.
c) El número total de comerciales que debe tener la empresa para que los ingresos por este medio sean máximos.
d) Los ingresos máximos.

Solución:
A partir de los datos del problema podemos construir la siguiente tabla,

Nº de comerciales	*Ingresos por ventas(€)/comercial y mes*	*Ingresos mensuales de la empresa (€)*
15	*5750*	*15 . 5750 = 86250*
15 + 1	*5750 – 250 . 1 = 5500*	*16 . 5500 = 88000*
15 + 2	*5750 – 250 . 2 = 5250*	*17 . 5250 = 89250*
15 + x	*5750 – 250 x*	

Contestemos a cada uno de los apartados.

a) *Según los cálculo efectuados anteriormente, los 15 comerciales proporcionan a la empresa uno ingresos mensuales de 86250 €*

b) *Llamando $I(x)$ a la función que nos da los ingresos mensuales contratando a x comerciales más*
$I(x) = (15 + x) \cdot (5750 - 250x) = 86250 - 3750x + 5750x - 250x^2 = -250x^2 + 2000x + 86250$
Por lo tanto, si se contratarán x comerciales más los ingresos mensuales que se obtendrían serían
$I(x) = -250x^2 + 2000x + 86250 \quad x \in N$

c) *Busquemos el máximo de la función I(x)*
$I'(x) = -500x + 2000$
$-500x + 2000 = 0$
$-500x = -2000$
$$x = \frac{-2000}{-500} = 4$$
Para determinar qué tipo de extremos hay en x = 4, estudiamos el signo de I´(x) a la izquierda y derecha del 4.
$I'(3) = -500 \cdot 3 + 2000 = 500 > 0$, *I(x) es creciente*
$I'(5) = -500 \cdot 5 + 2000 = -500 < 0$, *I(x) es decreciente*
Luego en x = 4 hay un máximo relativo, que es el absoluto porque la función sólo tiene un extremo.
Finalmente, el número total de comerciales que debe tener la empresa para que los ingresos sean máximos es de 19 (15 + 4).

d) *Para 19 comerciales (x = 4) los ingresos serán de* $I(4) = (15 + 4) \cdot (5750 - 250 \cdot 4) = 19 \cdot 4750 = 90250$
Los ingresos máximos serán de 90250 €.

OPCIÓN B

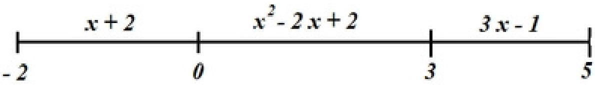
Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & si \quad -2\le x<0 \\ x^2-2x+2 & si \quad 0\le x<3 \\ 3x-1 & si \quad 3\le x\le 5 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de la función en todos los puntos del intervalo [– 2 , 5].
b) Calcula los máximos y mínimos absolutos de f(x) en el intervalo [– 2 , 5/2]
c) Calcula $\int_1^2 f(x)\,dx$.

Solución:
a) f(x) está definida en el intervalo [– 2 , 5] mediante tres trozos que son:



En cada uno de los trozos la definición de f(x) es un polinomio, por lo tanto en cada trozo la función es continua. Tenemos que estudiar la continuidad en los cambios de definición.

x = 0

1) f(0) = 0^2 – 2 . 0 + 2 = 2

$$2)\ \lim_{x\to 0} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)=0+2=2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2-2x+2)=0^2-2.0+2=2 \end{array}\right\}=2$$

$$3)\ f(0)=2=\lim_{x\to 0} f(x)$$

Luego f(x) es continua en x = 0

x = 3

1) f(3) = 3 . 3 – 1 = 8

$$2)\ \lim_{x\to 3} f(x)=\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2-2x+2)=3^2-2.3+2=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(3x-1)=3.3-1=8 \end{array}\right\}5\neq 8 \quad \rightarrow \quad \text{No existe el límite}$$

Luego f(x) no es continua en x = 3

Finalmente, f(x) es continua en [– 2 , 5] – { 3 } y en x = 3 tiene una discontinuidad de salto finito.

b) Para obtener los máximos y mínimos absolutos de f(x) en [– 2 , 5/2], representemos f(x) en este intervalo. Tengamos en cuenta que f(x) es continua en x = 0.

En [– 2 , 0), f(x) = x + 2, gráficamente una línea recta, para representarla basta con calcular dos puntos:

x = – 2, y = – 2 + 2 = 0
x = 0, y = 0 + 2 = 2

En [0 , 5/2], f(x) = x^2 – 2 x + 2, gráficamente una parábola.

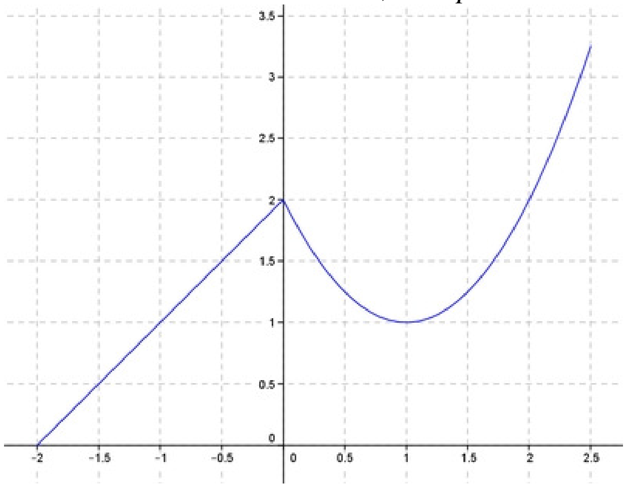
Calculemos su vértice, $x=\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-(-2)}{2.1}=\dfrac{2}{2}=1 \quad\rightarrow\quad y=1^2-2.1+2=1-2+2=1 \quad\rightarrow\quad \text{Vértice } (1,1)$

Como x = 1 ∈ [0 , 5/2], obtengamos los puntos de la parábola en los extremos del intervalo [0 , 5/2]

Para x = 0, y = 2 porque la función es continua en x = 0, (0 , 2)

Para $x=\dfrac{5}{2},\quad y=\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2.\dfrac{5}{2}+2=\dfrac{25}{4}-5+2=\dfrac{25}{4}-3=\dfrac{13}{4}=3'25,\quad \left(\dfrac{5}{2},\dfrac{13}{4}\right)=(2'5,3'25)$

A partir de los cálculos anteriores, la representación gráfica de f(x) en el intervalo [0 , 5/2] será:



La gráfica nos indica que en el intervalo [0 , 5/2] la función f(x) tiene:

un mínimo absoluto en el punto (– 2 , 0) y

un máximo absoluto en $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{4}\right)$

c)

$\int_1^2 f(x)\,dx$ = *como en el intervalo [1 , 2] f(x) =* $x^2 - 2\ x + 2$ $= \int_1^2 \left(x^2-2x+2\right)dx =$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+2x\right]_1^2=\left(\frac{2^3}{3}-2^2+2.2\right)-\left(\frac{1^3}{3}-1^2+2.1\right)=\left(\frac{8}{3}-4+4\right)-\left(\frac{1}{3}-1+2\right)=\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{8}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)=$$

$$=\frac{8}{3}-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

Por lo tanto $\int_1^2 f(x)\,dx=\frac{4}{3}$

Problema 2. Calcula:

a) Todas las asíntotas verticales y horizontales de la función $f(x)=\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}$

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

c) Los máximos y mínimos de la función $g(x)$ del apartado anterior.

Solución:

a) Asíntotas verticales.

Primero resolvemos: $x^3 - 9x = 0 \;\rightarrow\; x\left(x^2-9\right)=0 \left\langle \begin{array}{l} x=0 \\ x^2-9=0 \;\rightarrow\; x^2=9 \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{9}=\pm 3 \end{array}\right.$

Por tanto, hay tres posible asíntotas verticales: $x = -3$, $x = 0$ *y* $x = 3$.

Veamos si lo son. El límite de la función para cada valor de x *debe dar infinito.*

$x = -3$

$$\underset{x\to -3}{Lím}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2(-3)^3+2(-3)-1}{(-3)^3-9(-3)}=\frac{-54-6-1}{-27+27}=\frac{-61}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=-3 \textit{ es a.v.}$$

$x = 0$

$$\underset{x\to 0}{Lím}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,0^3+2\,.\,0-1}{0^3-9\,.\,0}=\frac{-1}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=0 \textit{ es a.v.}$$

$x = 3$

$$\underset{x\to 3}{Lím}\frac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\frac{2\,.\,3^3+2\,.\,3-1}{3^3-9\,.\,3}=\frac{54+6-1}{27-27}=\frac{59}{0}=\infty,\ \textit{por tanto } x=3 \textit{ es a.v.}$$

Asíntota horizontal

Debemos calcular los siguientes límites,

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to -\infty}{Lím}\dfrac{2x^3}{x^3}=\underset{x\to -\infty}{Lím}\,2=2 \\ \underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{2x^3+2x-1}{x^3-9x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\underset{x\to +\infty}{Lím}\dfrac{2x^3}{x^3}=\underset{x\to +\infty}{Lím}\,2=2 \end{array}\right\}\ \textit{por tanto, } y=2 \textit{ es la a.h.}$$

Luego, ***f(x) tiene tres asíntotas verticales*** $\boldsymbol{x = -3}$, $\boldsymbol{x = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{x = 3}$ ***y una asíntota horizontal*** $\boldsymbol{y = 2}$.

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $g(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - 8$.

En primer lugar, como $g(x)$ *es una función polinómica* $Dom\ g(x) = \Re$

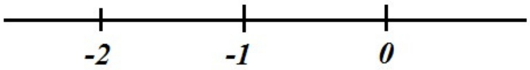
Debemos estudiar el signo de $g'(x)$

$g'(x) = 4x^3 + 12x^2 + 8x$

$4x^3 + 12x^2 + 8x = 0;\quad 4x\,(x^2 + 3x + 2) = 0 \left\langle \begin{array}{l} 4x=0 \;\rightarrow\; x=0 \\ x^2+3x+2=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-3\pm\sqrt{3^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}= \end{array}\right.$

$$=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-3+1}{2}=\dfrac{-2}{2}=-1 \\ x_2=\dfrac{-3-1}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2 \end{array}\right.$$

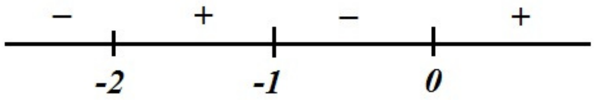
Hay que estudiar el signo de $g´(x)$ en los siguientes intervalos



Como $g´(x)$ es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, calculando el signo de $g´(x)$ en uno de los intervalos los demás salen de forma alterna,

$x = 1 \rightarrow g´(1) = 4 \,.\, 1^3 + 12 \,.\, 1^2 + 8 \,.\, 1 = 4 + 12 + 8 = 24 > 0$

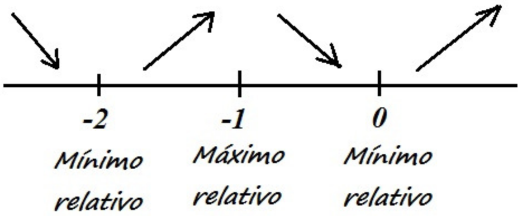
Por tanto:



Luego ***g(x) es creciente en*** $(-2\,,-1)\cup(0\,,+\infty)$ ***y decreciente en*** $(-\infty\,,-2)\cup(-1\,,0)$**.**

c) Máximos y mínimos de $g(x)$

Del estudio realizado en el apartado anterior obtenemos:



$x = -2 \rightarrow g(-2) = (-2)^4 + 4\,.\,(-2)^3 + 4\,.\,(-2)^2 - 8 = 16 - 32 + 16 - 8 = -8$

$x = -1 \rightarrow g(-1) = (-1)^4 + 4\,.\,(-1)^3 + 4\,.\,(-1)^2 - 8 = 1 - 4 + 4 - 8 = -7$

$x = 0 \rightarrow g(0) = 0^4 + 4\,.\,0^3 + 4\,.\,0^2 - 8 = -8$

Es decir, ***g(x) tiene un máximo relativo en (– 1 , – 7) y mínimos relativos en (– 2 , – 8) y (0 , – 8).***

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. El departamento de análisis financiero de una consultora determina que la rentabilidad $R(x)$, en miles de euros, de cierta inversión, en función de la cantidad invertida en miles de euros, x, viene dada por la siguiente expresión:

$$R(x) = -0{,}01\,x^2 + 0{,}1\,x + 1, \quad x > 0$$

a) ¿Cuántos euros conviene invertir para maximizar la rentabilidad? ¿Cuál será dicha rentabilidad máxima?

b) Determina la función que proporciona la rentabilidad media (es decir, el cociente entre la rentabilidad y la cantidad invertida) de dicha inversión y estudia la evolución de dicha rentabilidad media en función de la cantidad invertida.

Solución:

a) Busquemos el máximo de R(x).

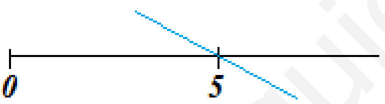
x y $R(x)$ son miles de euros.

Por definición, $Dom\ R(x) = (0, +\infty)$ *{intervalo abierto}*

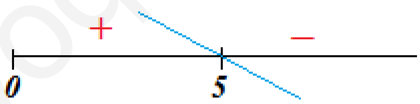
$R'(x) = -0'02\,x + 0'1$

$-0'02\,x + 0'1 = 0 \;\rightarrow\; -0'02\,x = -0'1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{-0'1}{-0'02} = 5$

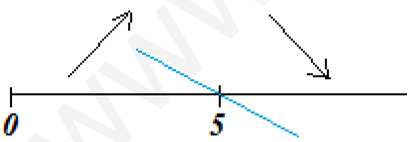
Estudiemos el signo de $R'(x)$. $R'(x)$, gráficamente, es una línea recta de pendiente negativa que pasa por (5 , 0), luego:



Por tanto, el signo de $R'(x)$ es:



Y $R(x)$



es creciente a la izquierda de 5 y decreciente a la derecha.

Luego en $x = 5$ hay un máximo relativo, pero como a la izquierda de $x = 5$ la función es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto de $R(x)$.

Para $x = 5$, $R(5) = -0{,}01 \cdot 5^2 + 0{,}1 \cdot 5 + 1 = 1'25$ *{x = 5 miles de euros; R(5) = 1´25 miles de euros}*

Finalmente, para maximizar la rentabilidad conviene invertir 5000€ y la rentabilidad máxima será de 1250€.

b) La función de rentabilidad media (RM) será: $RM(x) = \dfrac{R(x)}{x} = \dfrac{-0'01\,x^2 + 0'1\,x + 1}{x} = -0'01x + 0'1 + \dfrac{1}{x},\ x>0$

Para estudiar la evolución de RM(x) en función de x, estudiémosla para representarla gráficamente.

Por definición, $Dom\ RM(x) = (0, +\infty)$

Puntos de corte con ejes coordenados,

$$y=0 \;\rightarrow\; -0'01x+0'1+\frac{1}{x}=0 \;\rightarrow\; -0'01x^2+0'1x+1=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-0'1\pm\sqrt{0'1^2-4.(-0'01).1}}{2.(-0'01)}=$$

$$=\frac{-0'1\pm\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-0'1+\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=-6'\ldots\notin Dom\ RM(x) \\ x_2=\dfrac{-0'1-\frac{\sqrt{5}}{10}}{-0'02}=16'1803 \end{cases} \rightarrow \text{Punto de corte} \quad (16'1803\,,0)$$

Monotonía,

$$RM'(x)=-0'01-\frac{1}{x^2},\ \text{por lo tanto} \quad \forall\, x\in Dom\ RM(x), \quad RM'(x)<0$$

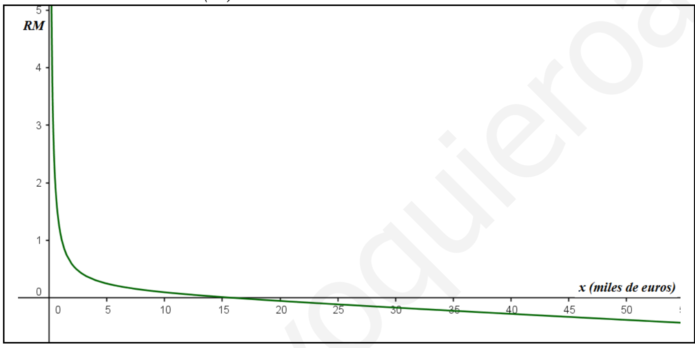
Luego RM(x) es decreciente en su dominio.

Asíntotas,

$$\lim_{x\to 0^+} RM(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=0+0'1+\frac{1}{0}=+\infty \;\Rightarrow\; x=0 \text{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

$$\lim_{x\to +\infty} RM(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(-0'01x+0'1+\frac{1}{x}\right)=-\infty+0'1+\frac{1}{+\infty}=-\infty+0=-\infty \;\Rightarrow\; \text{No hay asíntota horizontal}$$

La representación de RM(x) sería:



Por tanto, la rentabilidad media es decreciente y a partir de 16´1803 miles de euros de inversión es negativa.

Problema 2. Un analista pronostica que el beneficio *B(x)* en miles de euros de cierto fondo de inversión, donde *x* representa la cantidad invertida en miles de euros, viene dado por la siguiente expresión:

$$B(x)=\begin{cases} -0'01\,x^2+0'09\,x+0'1 & 0<x\le 8 \\ 1'26\,\dfrac{x}{x^2-1}+0'02 & x>8 \end{cases}$$

a) Estudia la continuidad de *B(x)*.
b) Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
c) ¿Qué capital, en euros, conviene invertir en este fondo para maximizar el beneficio? ¿Cuál será dicho beneficio máximo?
d) Si se invierte un capital muy elevado, ¿cuál sería como mínimo su beneficio? ¿Por qué?

Solución:

a) Continuidad de B(x).

B(x) es una función definida a trozos. Estudiemos la continuidad de la función en cada trozo y en el punto de cambio de definición.

Para $0 < x < 8$, $B(x) = -0'01\,x^2 + 0'09\,x + 0'1$ *que es un polinomio, por tanto continua.*

Para $x > 8$, $B(x) = 1'26\,\dfrac{x}{x^2-1}+0'02$, *los problemas para continuidad se presentan en las raíces del denominador,* $x^2 - 1$, *calculémoslas:*

$$x^2-1=0 \quad\rightarrow\quad x^2=1 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

Pero como esta definición de B(x) es para x > 8, el denominador no se anula, por tanto B(x) es continua.

Estudiemos la continuidad en x = 8,

1) $B(8) = -0'01 \cdot 8^2 + 0'09 \cdot 8 + 0'1 = 0'18$, *existe B(8)*

2) $\lim\limits_{x\to 8} B(x) =$ *(como a la izquierda y derecha de 8 B(x) tiene dos definiciones diferentes, calculamos*

$$\text{límites laterales)}=\begin{cases} \lim\limits_{x\to 8^-} B(x)=\lim\limits_{x\to 8^-}\left(-0'01\,x^2+0'09\,x+0'1\right)=-0'01\cdot 8^2+0'09\cdot 8+0'1=0'18 \\ \lim\limits_{x\to 8^+} B(x)=\lim\limits_{x\to 8^+}\left(1'26\,\dfrac{x}{x^2-1}+0'02\right)=1'26\,\dfrac{8}{8^2-1}+0'02=1'26\,\dfrac{8}{63}+0'02=0'18 \end{cases}$$

como los límites laterales coinciden, $\lim\limits_{x\to 8} B(x)=0'18$, *existe el límite.*

3) $\lim\limits_{x\to 8} B(x)=0'18=B(8)$

Se cumplen las tres condiciones, B(x) es continua en x = 8

Luego, ***B(x) es continua en su dominio de definición, es decir, en (0 , + ∞).***

b) Monotonía. Por se función definida a trozos estudiemos la monotonía en cada trozo.

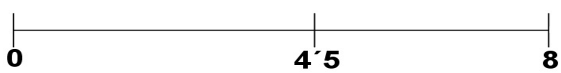
Para $0 < x < 8$

$y = -0'01\,x^2 + 0'09\,x + 0'1$, *estudiemos el signo de* y'

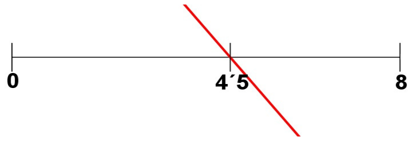
$y' = -0'02\,x + 0'09$

$$-0'02\,x+0'09=0 \quad\rightarrow\quad -0'02\,x=-0'09 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-0'09}{-0'02}=4'5$$

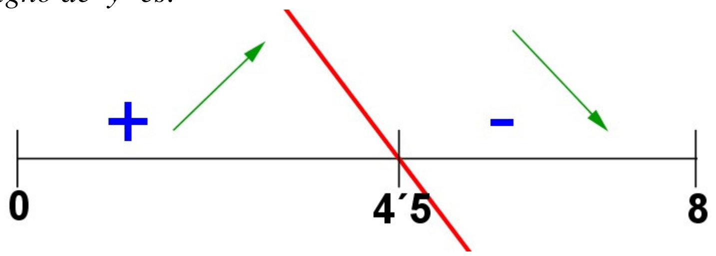
Hay que estudiar el signo en los siguientes intervalos:



y´ es una línea recta de pendiente negativa y que pasa por x = 4´5:



El signo de y´ es:



Para x > 8

$$y = 1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02$$

$$y' = 1'26\,\frac{1\left(x^2-1\right) - x\cdot 2\,x}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{x^2-1-2\,x^2}{\left(x^2-1\right)^2} = 1'26\,\frac{-x^2-1}{\left(x^2-1\right)^2} =$$

Estudiemos el signo de y´. 1´26 es positivo. Veamos la fracción, como el denominador está elevado al cuadrado (es positivo) el signo de y´ sólo depende del numerador, $-x^2-1 = -\left(x^2+1\right)$*; como* $x^2 + 1$ *siempre es positivo,* $-\left(x^2+1\right)$ *es negativo, por tanto y´ es negativa.*

Para x > 8, la función es decreciente.

Para x = 8

$$y'(8) = \begin{cases} y'(8^-) = -0'02\cdot 8 + 0'09 = -0'07 \\ y'(8^+) = 1'26\,\dfrac{-8^2-1}{\left(8^2-1\right)^2} = 0'020634... \end{cases} \rightarrow \quad No\ existe \quad y'(8)$$

Finalmente, como B(x) es continua,

B(x) es creciente en (0 , 4´5) y decreciente en (4´5 , 8) ∪ (8 , + ∞).

c) Del estudio realizado en el apartado anterior se deduce que el máximo relativo se alcanza para x = 4´5.

x = 4´5, $B(4'5) = -0'01\ .\ 4'5^2 + 0'09\ .\ 4'5 + 0'1 = 0'3025$

Como a la derecha de 4´5 la función es creciente y a la derecha decreciente el máximo relativo es el absoluto.

Por tanto, hay que invertir 4´5 miles de euros se obtendría un beneficio de 0´´3025 miles de euros.

Es decir, hay que invertir 4500 euros y obtendríamos un beneficio de 302´50 euros.

d) Cuando se invierte un capital muy elevado el beneficio lo podemos obtener calculando el siguiente límite:

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\,B(x) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(1'26\,\frac{x}{x^2-1} + 0'02\right) \overset{*}{=}$$

$$calculemos \quad \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{x}{x^2-1} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{x}{x^2} = \underset{x\to+\infty}{Lím}\,\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\overset{*}{=} 1'26\cdot 0 + 0'02 = 0'02$$

Podemos afirmar que el mínimo beneficio, cuando se invierte un capital muy elevado, es 0´02 miles de euros (20 euros) porque de lo estudiado en los apartados anteriores sabemos que a partir de x = 8 la función es decreciente.

Luego, ***si se invierte un capital muy elevado el beneficio será, como mínimo, de 20 euros.***

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a\,x^2+24x & si\;\; x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si\;\; x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 24\,x$ *es, independientemente del valor de a, un polinomio luego es continua.*

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *es un polinomio luego es continua.*

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

a) $f(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

b) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x^3+a\,x^2+24x\right)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=a-25 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[(x-1)^2+3\right]=(-1-1)^2+3=7 \end{cases}$$

Para que exista el límite $a-25=7 \;\rightarrow\; a=7+25=32$

c) Para $32 = 2$ $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua debe ser a = 32.

b) Para $a = 9$, *máximos y mínimos locales de f(x) en* $\left(\frac{-9}{2},\frac{-3}{2}\right)=(-4{\acute{}}5,-1{\acute{}}5)$.

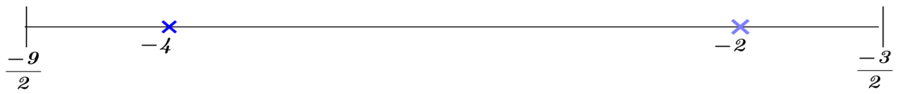
Como $(-4{\acute{}}5, -1{\acute{}}5) \subset \{x \le -1\} \;\rightarrow\; f(x) = x^3 + 9\,x^2 + 24\,x$

$f'(x) = 3\,x^2 + 18\,x + 24$

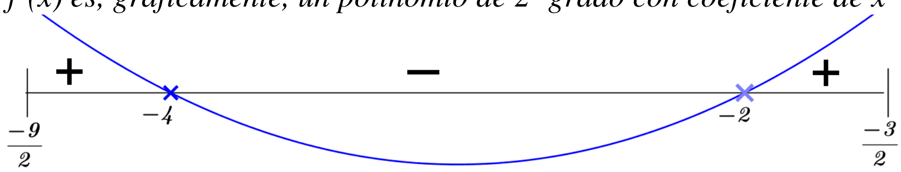
estudiemos el signo de $f'(x)$

$$3x^2+18x+24=0 \;\rightarrow\; x=\frac{-18\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 24}}{2\cdot 3}=\frac{-18\pm 6}{6}=\begin{cases} x_1=\frac{-18+6}{6}=-2 \\ x_2=\frac{-18-6}{6}=-4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en:*



$f'(x)$ *es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *positivo y raíces* -4 *y* -2, *luego,*



En $x = -4$ *hay un máximo local*
y
en $x = -2$ *hay un mínimo local*

Para $x = -4 \rightarrow f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$
Para $x = -2 \rightarrow f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

Solución: ***para $a = 9$ los máximos y mínimos locales de f(x) en*** $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ***son:***

$(-4, -16)$ máximo local y $(-2, -20)$ mínimo local.

c) Si $a = 0$ ¿área de la región delimitada por f(x), x=2, x = 3 y eje OX?

Si $a = 0 \rightarrow$ $f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & si \ \ x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 & si \ \ x > -1 \end{cases}$

Entre $x = 2$ y $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ y, además, como f(x) es algo al cuadrado más tres: $f(x) > 0$.
Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx$$

$$Cálculo \ \ auxiliar: \quad \int (x-1)^2 dx = \left\{ cambio \ \ de \ variable \quad \begin{array}{c} t = x-1 \\ dt = dx \end{array} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x\right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3 \cdot 3\right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3 \cdot 2\right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{-1}{3} + 6\right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, ***el área de la región pedida es*** $\frac{16}{3}$ *u.a.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. El coste total en euros de la producción de x litros de un determinado producto viene dado por

$$C(x)=\frac{1}{2}x^2+5x+800$$

Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿Cuál es el valor de dicho coste?

Solución:
El coste total de producir x litros es C(x), por lo tanto el coste medio por litro producido será:

$$CM(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}x^2+5x+800}{x}=\frac{x}{2}+5+\frac{800}{x}$$

Debemos calcular x de manera que CM(x) sea mínimo,

$$CM'(x)=\frac{1}{2}+0-\frac{800}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{800}{x^2}$$

$$\frac{1}{2}-\frac{800}{x^2}=0 \quad\rightarrow\quad \frac{1}{2}=\frac{800}{x^2} \quad\rightarrow\quad x^2=1600 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{1600}=\pm 40$$

como x representa los litros producidos no tiene sentido la solución negativa, luego x = 40

$$CM''(x)=\frac{1600}{x^3} \qquad , \qquad CM''(40)=\frac{1600}{40^3}>0$$

para x = 40 se alcanza un mínimo relativo en (40, 45).
(para x=40   CM(40)=20+5+20=45)

Veamos si es el mínimo absoluto, para ello debemos representar gráficamente la función CM(x)

$$CM(x)=\frac{x}{2}+5+\frac{800}{x}=\frac{x^2+10x+1600}{2x}$$

como x representa los litros producidos, x≥0

$a)\ Dom\ CM=(0,+\infty)$

$b)\ Asíntotas:$

$AV \quad x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^2+10x+1600}{2x}\right)=\frac{1600}{0}=+\infty \quad\Rightarrow\quad x=0\ es\ AV$$

$para\ x>0\ num.\ y\ den.\ son\ positivos \rightarrow el\ lím.\ es\ positivo$

$AH \quad no\ hay$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2+10x+1600}{2x}\right)=\infty\ porque\ grd(num)>grad(deno)$$

$AO \quad y=\frac{1}{2}x+5$

como grd(numerador)-grd(denominador)=2-1=1, hay asíntota oblicua.
Efectuamos la división polinómica,

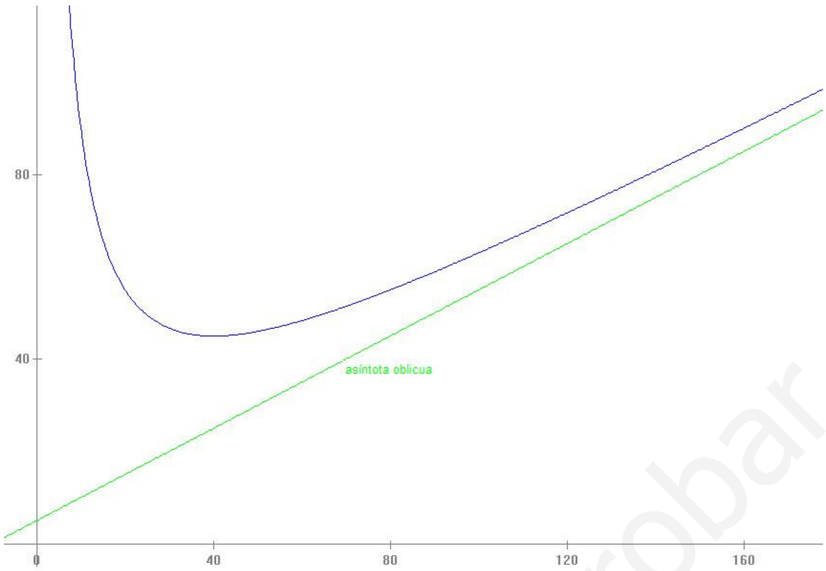
$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & +\,10x & +\,1600 & 2x \\ \hline -x^2 & & & \frac{1}{2}x+5 \\ \hline & +\,10x & & \\ & -\,10x & & \\ \hline & & +\,1600 & \end{array}$$

Veamos la posición de la curva respecto de la asíntota oblicua,

$$\frac{x^2+10x+1600}{2x}=\left(\frac{1}{2}x+5\right)+\frac{1600}{2x}$$

$$\textit{Cuando} \quad x \to +\infty \quad \frac{1600}{2x}>0 \quad \Rightarrow \textit{la función está por encima de la asíntota.}$$

Con la información del mínimo relativo y la posición de la curva respecto de sus asíntotas podemos trazar un esbozo de la función:



Luego el mínimo relativo es un mínimo absoluto. Por ello el coste medio será mínimo con una producción de 40 litros y este coste será de 45 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La concentración C de ozono contaminante, en microgramos por metro cúbico, en una ciudad durante los 20 primeros días de un determinado mes se puede aproximar por la función $C(x)=90+15x-0{\acute{}}6x^2$, donde x representa el tiempo transcurrido en días.

a) Estudiar de forma razonada el crecimiento y decrecimiento de la concentración de ozono en relación con los días transcurridos.
b) ¿Cuál es la concentración máxima de ozono alcanzada durante esos 20 días? Justificar la respuesta.

Solución:

La concentración C de ozono contaminante viene dada por la función,

$$C(x) = 90 + 15\,x - 0{\acute{}}6\,x^2 \qquad x \in [\,0\,,\,20\,]$$

Para responder las preguntas del problema estudiamos la monotonía de la función $y = 90 + 15\,x - 0{\acute{}}6\,x^2$

$$y' = 15 - 1{\acute{}}2\,x$$

$$15 - 1{\acute{}}2\,x = 0 \;\rightarrow\; 15 = 1{\acute{}}2\,x \;\rightarrow\; x = \frac{15}{1{\acute{}}2} = 12{\acute{}}5$$

Calculemos el signo de y´,

x	y´
10	$15 - 0{\acute{}}12\,.\,10 = 15 - 1{\acute{}}2 = 13{\acute{}}8 > 0$
200	$15 - 0{\acute{}}12\,.\,200 = 15 - 24 = -9 < 0$

Por lo tanto y es creciente para $x<12{\acute{}}5$ *y decreciente para* $x>12{\acute{}}5$

a) *La concentración de ozono crece durante los doce primeros días y decrece a partir del día 13.*

b) *La máxima concentración de ozono se alcanzará en el día 12 o 13, calculémoslo.*

$$C(12) = 90 + 15\,.\,12 - 0{\acute{}}6\,.\,12^2 = 90 + 180 - 0{\acute{}}6\,.\,144 = 270 - 86{\acute{}}4 = 183{\acute{}}6$$

$$C(13) = 90 + 15\,.\,13 - 0{\acute{}}6\,.\,13^2 = 90 + 195 - 0{\acute{}}6\,.\,169 = 285 - 101{\acute{}}4 = 183{\acute{}}6$$

Por lo tanto, la máxima concentración de ozono será de 183´6 microgramos por metro cúbico.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Un restaurante abre a las 8 de la noche y cierra cuando todos los clientes se han ido. La función $C(t) = 60\ t - 10\ t^2$ representa el número de clientes que hay en el restaurante en función del número de horas t que lleva abierto el establecimiento. Se pide:

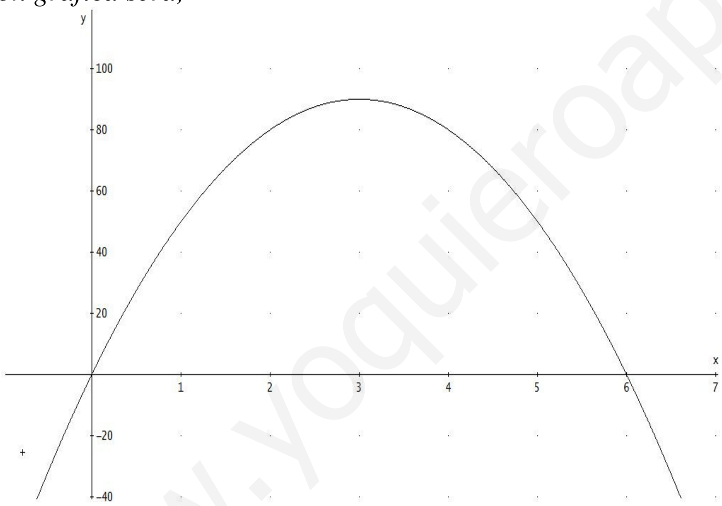
a) Determinar el número máximo de clientes que van a una determinada noche al restaurante. Justificar que es un máximo.
b) Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, ¿entre qué horas tendríamos que ir?

Solución:
(Nota: Como t representa el número de horas que lleva abierto el establecimiento y este abre a las 8 de la noche, para pasar de valores de t a hora de la noche calculamos t+8)

Representamos la función $y = 60\ t - 10\ t^2$
C(t) es un polinomio de segundo grado, su representación gráfica será una parábola.

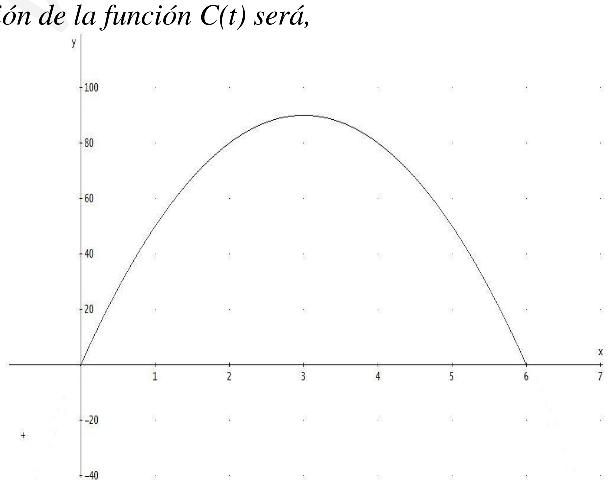
- *Puntos de corte con el eje OX* *(0 , 0) y (6 , 0)*
  $60\ t - 10\ t^2 = 0 \ \rightarrow\ 10\ t\ (6 - t) = 0 \ \rightarrow\ t = 0 \text{ o } t = 6$
- *Vértice* *(3 , 90)*
  $t = \dfrac{-60}{2(-10)} = \dfrac{-60}{-20} = 3, \qquad y = 60\ .\ 3 - 10\ .\ 3^2 = 180 - 90 = 90$

La representación gráfica será,



La función $C(t) = 60\ t - 10\ t^2$ que representa el número de clientes en el restaurante estará definida en el intervalo [0 , 6] puesto que fuera de ese intervalo C(t) toma valores negativos. Es decir, el restaurante abre a las 8 de la noche y cerrará a las, 8+6=14, 2 de la madrugada.

La representación de la función C(t) será,



a) *El número máximo de clientes que van una determinada noche al restaurante se alcanza en el vértice de la parábola. El vértice de la parábola es el punto (3 , 90). Por tanto, el número máximo de clientes será de 90.*

b) *Si deseamos ir al restaurante cuando haya al menos 50 personas y no más de 80, queremos que* $50 \le C(t) \le 80$, *es decir,* $50 \le 60t - 10t^2 \le 80$ *debemos resolver el siguiente sistema de inecuaciones:*

$$\begin{cases} 60t - 10t^2 \le 80 \\ 60t - 10t^2 \ge 50 \end{cases}$$

Resolución de la 1ª inecuación,

$-10t^2 + 60t - 80 \le 0$ *simplificando por 10*

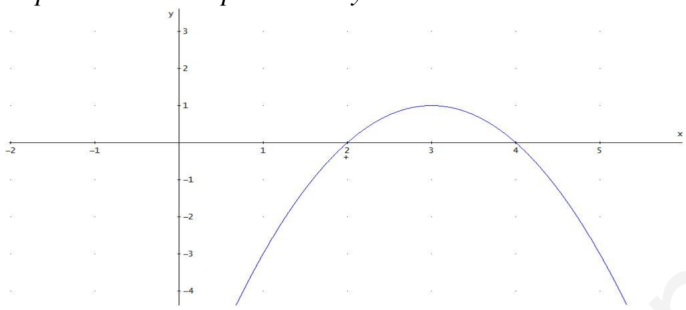
$-t^2 + 6t - 8 \le 0$

Resolvemos la ecuación $-t^2 + 6t - 8 = 0$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-8)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-32}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{4}}{-2} = \frac{-6 \pm 2}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-6+2}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad t_2 = \frac{-6-2}{-2} = \frac{-8}{-2} = 4$$

Representamos la parábola $y = -t^2 + 6t - 8$



La solución de la inecuación son los valores de t en donde la parábola es menor o igual que cero, es decir, $t \in (-\infty, 2] \cup [4, +\infty)$

Resolución de la 2ª inecuación,

$-10t^2 + 60t - 50 \ge 0$ *simplificando por 10*

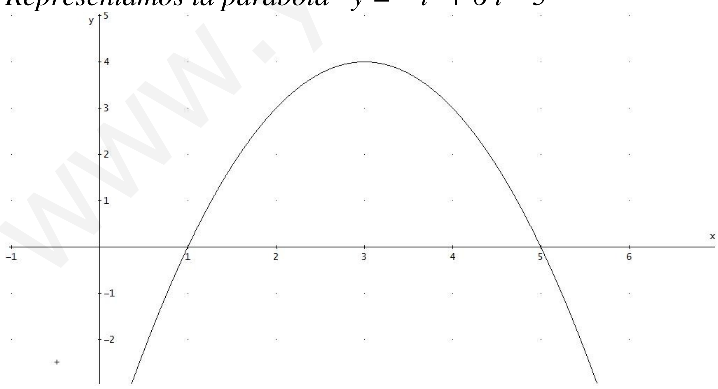
$-t^2 + 6t - 5 \ge 0$

Resolvemos la ecuación $-t^2 + 6t - 5 = 0$

$$t = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(-1)(-5)}}{2(-1)} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-20}}{-2} = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-6 \pm 4}{-2}$$

$$t_1 = \frac{-6+4}{-2} = \frac{-2}{-2} = 1 \qquad t_2 = \frac{-6-4}{-2} = \frac{-10}{-2} = 5$$

Representamos la parábola $y = -t^2 + 6t - 5$



La solución de la inecuación son los valores de t en donde la parábola es mayor o igual que cero, es decir, $t \in [1, 5]$

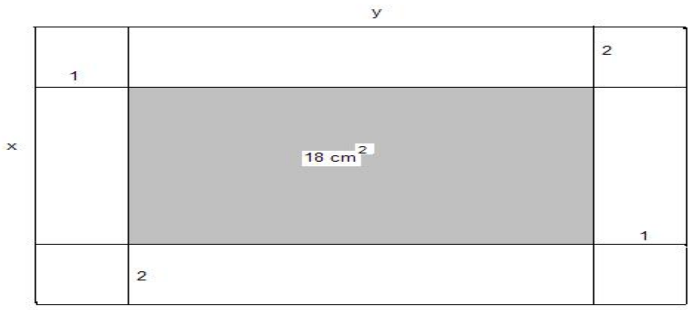
La solución del sistema de inecuaciones son los valores de t en que se cumplen las dos inecuaciones, en este caso: $t \in [1, 2] \cup [4, 5]$

Por tanto, deberíamos ir al restaurante entre las 9 y 10 de la noche, o bien, entre las 12 y la 1 de la madrugada.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Se quiere imprimir un cartel anunciador rectangular que debe contener 18 cm^2 de texto impreso (también rectangular). Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm cada uno, mientras que los laterales deben ser de 1 cm. Calcular las dimensiones del cartel para que el gasto de papel sea mínimo y justificar que dicho gasto es realmente mínimo.

Solución:
Utilizamos las siguientes variables,
x = alto del cartel
y = ancho del cartel
El problema que queremos resolver podemos representarlo de la siguiente forma,



El gasto del cartel estará en función de la dimensión del cartel, es decir, G = x y   que será la función a minimizar.
La relación entre las variables x e y viene dada por los 18 cm^2 de texto impreso que debe tener el cartel, por lo tanto (x – 4) (y – 2) = 18, despejamos de esta expresión la variable y,

$$y-2=\frac{18}{x-4} \quad \rightarrow \quad y=\frac{18}{x-4}+2$$

Por lo que $G=x\left(\frac{18}{x-4}+2\right)=\frac{18\,x}{x-4}+2\,x$

Calculamos $G'=\frac{18(x-4)-18x}{(x-4)^2}+2=\frac{18x-72-18x}{(x-4)^2}+2=\frac{-72}{(x-4)^2}+2$

Calculamos $G''=\frac{72\,.\,2\,(x-4)}{(x-4)^3}=\frac{144}{(x-4)^2}$

$$G'=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-72}{(x-4)^2}+2=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-72}{(x-4)^2}=-2 \quad \rightarrow \quad -72=-2(x-4)^2 \quad \rightarrow \quad (x-4)^2=36 \quad \rightarrow \quad x-4=\pm 6$$

$$\textit{Dos posibles soluciones}: \begin{cases} x-4=6 \quad \rightarrow \quad x=10 \\ x-4=-6 \quad \rightarrow \quad x=-2 \quad \textit{No es válida, la longitud de un lado no puede ser negativa.} \end{cases}$$

$G''(10)=\frac{144}{(10-4)^2}=\frac{144}{36}>0 \quad \rightarrow$ *En* $x=10$ *la función G alcanza un mínimo relativo.*

Para $x=10 \quad \rightarrow \quad y=\frac{18}{10-4}+2=\frac{18}{6}+2=3+2=5$

Solución: el cartel será un rectángulo de base 5 cm y alto 10 cm.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. En unos almacenes se tienen 2000 Kg. de alimentos perecederos que se pueden vender a 3 € el Kg., pero si se venden más tarde, el precio aumenta en 0,1 € el Kg. cada día. Calcular cuándo interesa vender estos alimentos para tener los máximos ingresos si cada día que pasa se estropean 50 Kg. de ellos. ¿Cuáles son estos ingresos máximos? ¿Cuántos los kilos que se venden y a qué precio? Justificar que es máximo.

Solución:

Inicialmente tenemos:

2000 Kg. de alimentos a 3 €/Kg.

cada día que pasa aumenta el precio 0'1 €/Kg. pero se pierden 50 Kg.

Al cabo de x días,

Kg. de alimentos = 2000 – 50 x

precio del Kg. = 3 + 0'1 x

ingresos = (2000 – 50 x) . (3 + 0'1 x)

(Nota: ¿Al cabo de cuántos días nos quedaremos sin alimentos?, 2000 – 50 x = 0; 2000 = 50 x; x = 40; Al cabo de 40 días)

Llamando I (x) a lo ingresos al cabo de x días,

$I(x) = (2000 - 50x) \cdot (3 + 0'1x) = 6000 - 150x + 200x - 5x^2 = -5x^2 + 50x + 6000$

Obtengamos el máximo de esta función,

$I'(x) = -10x + 50$

$-10x + 50 = 0; \quad 50 = 10x; \quad x = 5$

$I''(x) = -10$; *para* $x = 5$ $I''(5) = -10 < 0$ *luego para* $x = 5$ *hay un máximo relativo.*

Este máximo relativo es el máximo absoluto de la función I (x) ya que esta función es una parábola de coeficiente de x^2 *negativo.*

Por lo tanto, se venderán $2000 - 50 \cdot 5 = 2000 - 250 = 1750$ *Kg.*

a $3 + 0'1 \cdot 5 = 3 + 0'5 = 3'50$ *€/Kg.*

obteniendo unos ingresos de $1750 \cdot 3'50 = 6125$ *€*

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. El dinero en efectivo, en euros, de una oficina durante las seis horas que permanece la caja abierta al público viene dada por la expresión $C(t) = 2000 - 234\ t + 27\ t^2$, siendo t el tiempo en horas transcurrido desde la apertura. Determina:

a) ¿En qué momento hay más dinero en efectivo y cuánto?
b) ¿En qué momento hay menos dinero en efectivo y cuánto?

Justifica que son máximo y mínimo respectivamente.

Solución:

Como la variable t representa el tiempo transcurrido desde la apertura y la oficina está abierta 6 horas, $t \in [0\ ,\ 6]$

C(t) es una función polinómica luego es continua y derivable en $\Re$ *y en particular en el intervalo cerrado [0 , 6] en que está definida. Por ser continua y derivable en un intervalo cerrado sabemos que sus extremos los alcanza en los extremos del intervalo cerrado o en los puntos intermedios que sean extremos relativos de la función.*

Obtengamos sus extremos relativos,

$C(t) = 2000 - 234\ t + 27\ t^2$

$C'(t) = -234 + 54\ t$

$-234 + 54\ t = 0 \quad t = \frac{234}{54} = \frac{13}{3} = 4'333...$

$$t = \frac{13}{3} \quad \to \quad C\left(\frac{13}{3}\right) = 2000 - 234\frac{13}{3} + 27\left(\frac{13}{3}\right)^2 = 2000 - 1014 + 507 = 1493$$

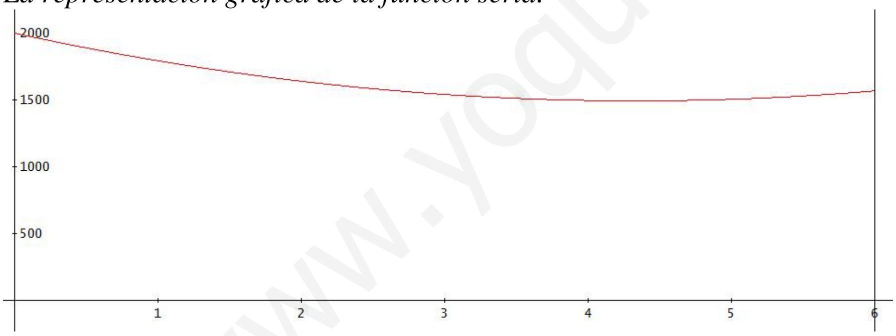
C(t) es un polinomio de 2º grado con coeficiente de t^2 *positivo, por lo tanto el extremo es un mínimo relativo, que además se alcanza dentro del intervalo [0 , 6].*

Mínimo relativo en $\left(\frac{13}{3}\ ,1493\right)$

Calculemos los valores de la función en los extremos del intervalo [0 , 6]

$t = 0, \quad C(0) = 2000$	(0 , 2000)
$t = 6, \quad C(6) = 2000 - 234 \cdot 6 + 27 \cdot 6^2 = 1568$	(6 , 1568)

La representación gráfica de la función sería:



a) *Hay más dinero en efectivo en el momento de abrir.* *Hay 2000 €*

b) *Hay menos dinero en efectivo al cabo de 4 h. y 20 min.,* $\left(\frac{13}{3}h\right)$, *de abrir. Hay 1493 €*

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función $y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$:

a) Calcula los máximos y mínimos locales. Justifica que los puntos encontrados son máximos y mínimos locales.

b) Halla el área de la región del plano determinada por la gráfica de $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$, y $x = 5$.

Solución:

a)

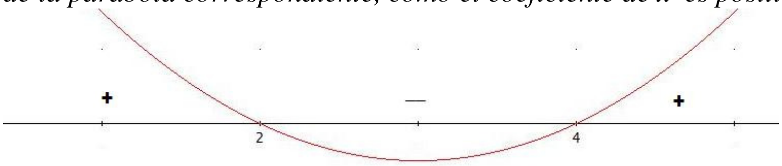
$y = x^3 - 9x^2 + 24x + 3$

$y' = 3x^2 - 18x + 24$

$3x^2 - 18x + 24 = 0; \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{6+2}{2} = 4 \\ \dfrac{6-2}{2} = 2 \end{cases}$$

Como la primera derivada es un polinomio de 2º grado estudiamos el signo de y´ a través de la representación gráfica de la parábola correspondiente, como el coeficiente de x^2 es positivo será



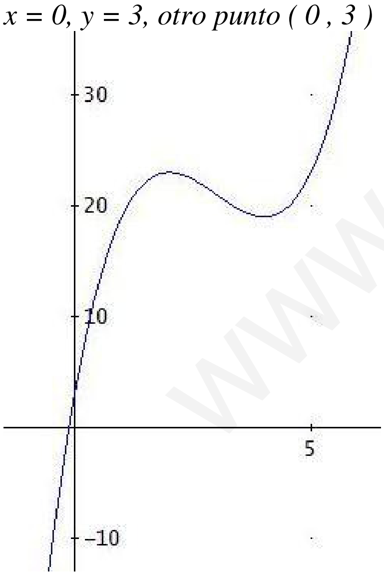
En x = 2, la función pasa de creciente a decreciente por lo que presenta un máximo local.
En x = 4 la función pasa de decreciente a creciente por lo que presenta un mínimo local.

$x = 2, \quad y = 2^3 - 9 \,.\, 2^2 + 24 \,.\, 2 + 3 = 8 - 36 + 48 + 3 = 59 - 36 = 23.$ *Máximo local (2 , 23)*

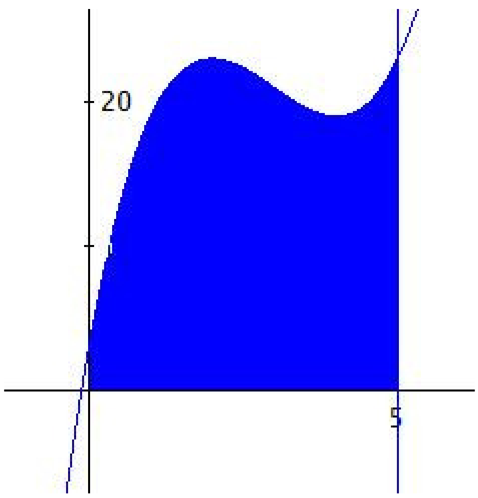
$x = 4, \quad y = 4^3 - 9 \,.\, 4^2 + 24 \,.\, 4 + 3 = 64 - 144 + 96 + 3 = 163 - 144 = 19.$ *Máximo local (4 , 19)*

b) Como y es una función polinómica de tercer grado con los datos del apartado anterior y algún punto más podemos representarla,

x = 0, y = 3, otro punto (0 , 3)



La región del plano de la que debemos calcular su área será



Este área podemos calcularla mediante la siguiente integral

$$A = \int_0^5 \left(x^3 - 9x^2 + 24x + 3\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 12x^2 + 3x\right]_0^5 = \frac{625}{4} - 3 \,.\, 125 + 12 \,.\, 25 + 15 = 96´25 \; u.a.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Obtén los parámetros *r, s y t* para que la función: $f(x) = x^3 + r x^2 + s x + t$ tenga un máximo en x = – 2, un mínimo en x = 0 y pase por el punto (1 , – 1)

Solución:

$f(x) = x^3 + r x^2 + s x + t$

Pase por (1 , – 1); $-1 = 1^3 + r \cdot 1^2 + s \cdot 1 + t$

$-1 = 1 + r + s + t$

$\boldsymbol{-2 = r + s + t}$

Máximo en $x = -2$, *por lo tanto* $f'(-2) = 0$

Mínimo en $x = 0$, *por lo tanto* $f'(0) = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2rx + s$

$f'(-2) = 3(-2)^2 + 2r(-2) + s = 12 - 4r + s$

$f'(0) = 3 \cdot 0^2 + 2r\,0 + s = s$

Por lo que: $12 - 4r + s = 0$; $\boldsymbol{-4r + s = -12}$

y $\boldsymbol{s = 0}$

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} r + s + t = -2 \\ -4r + s = -12 \\ s = 0 \end{cases}$$

sustituyendo el valor de s en las dos primeras ecuaciones quedará,

$$\begin{cases} r + t = -2 \\ -4r = -12 \end{cases}$$

de la segunda ecuación obtenemos el valor de r

$$-4r = -12 \quad \rightarrow \quad r = \frac{-12}{-4} = 3$$

sustituyendo este valor de r en la primera ecuación: $3 + t = -2$; $t = -2 - 3 = -5$

Solución: los valores buscados son $r = 3$, $s = 0$ *y* $t = -5$

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. La cuenta de resultados (pérdidas o ganancias) en millones de euros, y , de una empresa vienen dadas por la siguiente función de los años de existencia de la misma:

$$y = \frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7}$$

a) ¿A partir de qué año deja la empresa de tener pérdidas?
b) ¿En qué momento alcanza la empresa sus ganancias máximas? ¿A cuánto ascienden éstas?
c) Describe la evolución de la cuenta de resultados de la empresa. ¿Cuáles serán sus beneficios a muy largo plazo?

Solución:

Por definición de x *, años de existencia de la empresa,* $x \geq 0$

$$y \quad como \quad \forall x \in \Re \quad x^2 + 7 \neq 0 \quad \rightarrow \quad Dom\ y = [\,0, +\infty)$$

a) La empresa dejará de tener pérdidas cuando y > 0, luego debemos resolver la siguiente inecuación,

$$\frac{5x^2 + 20x - 25}{x^2 + 7} > 0$$

como para cualquier valor de x*,* $x^2 + 7$ *es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del numerador.*

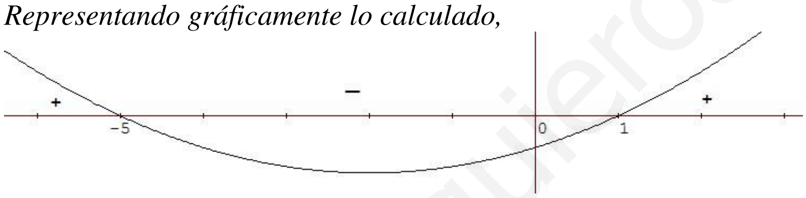
$5x^2 + 20x - 25 > 0$ *Resolvamos esta inecuación,*

$5x^2 + 20x - 25 = 0$*, simplificando entre 5*

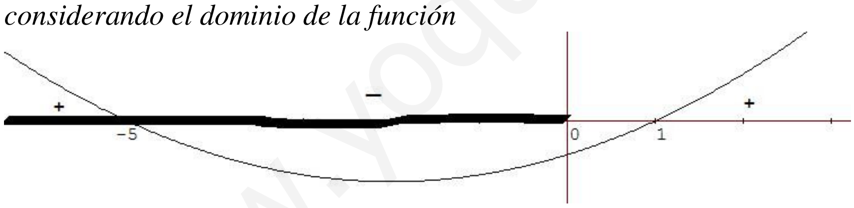
$x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\,.\,1\,.\,(-5)}}{2\,.\,1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-4+6}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ x_2 = \dfrac{-4-6}{2} = \dfrac{-10}{2} = -5 \end{cases}$$

Representando gráficamente lo calculado,



considerando el dominio de la función



Por lo tanto $y > 0$ *para* $x > 1$*. Es decir que la empresa dejará de tener perdidas a partir del primer año de existencia*

b) Ganancias máximas y a cuánto ascienden.

Busquemos los extremos de la función y

$$y' = \frac{(10x+20)(x^2+7) - (5x^2+20x-25)2x}{(x^2+7)^2} = \frac{10x^3 + 20x^2 + 70x + 140 - 10x^3 - 40x^2 + 50x}{(x^2+7)^2} =$$

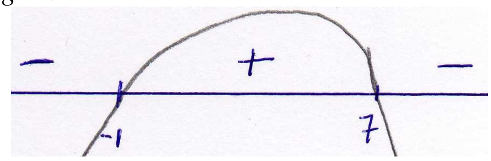
$$= \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2+7)^2}$$

$$y' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-20x^2 + 120x + 140}{(x^2+7)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad -20x^2 + 120x + 140 = 0 \quad simplificando\ entre\ 20$$

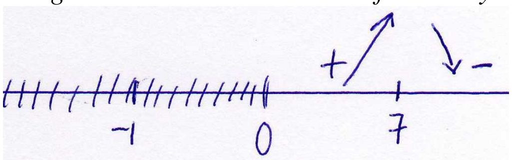
$$-x^2+6x+7=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4(-1)7}}{2(-1)}=\frac{-6\pm\sqrt{36+28}}{-2}=\frac{-6\pm\sqrt{64}}{-2}=\frac{-6\pm 8}{-2}=$$

$$=\left\langle \begin{array}{l} \frac{-6+8}{-2}=\frac{2}{-2}=-1 \\ \frac{-6-8}{-2}=\frac{-14}{-2}=7 \end{array} \right.$$

Estudiemos el signo de y´. Como el denominador de y´ es $(x^2+7)^2$*, siempre es positivo; el signo de y´ depende del numerador que gráficamente es una parábola, por ser un polinomio de 2º grado, y como el coeficiente de* x^2 *es negativo será*



Restringiéndonos al dominio de la función y



Luego en x = 7 hay un máximo relativo. Como la función y en el intervalo (0 , 7) es creciente y en el intervalo (7 , +∞) es decreciente, este máximo relativo es el absoluto de la función.

Por lo tanto la empresa alcanza sus ganancias máximas a los 7 años de su creación y estas ganancias son de

$$y=\frac{5\,.\,7^2-20\,.\,7-25}{7^2+7}=\frac{360}{56}=6´428571 \quad \textit{millones de euros}$$

es decir, unas ganancias de 6 428 571 €

c) Para obtener los beneficios a muy largo plazo calculamos el siguiente límite,

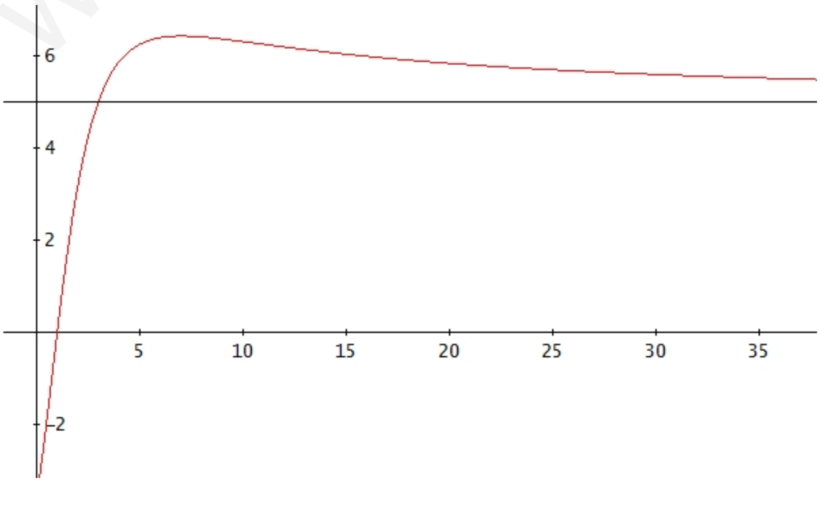
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+20x-25}{x^2+7}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}5=5$$

Esto quiere decir que a muy argo plazo los beneficios se estabilizan e 5 millones de euros.

Podemos describir la evolución de la cuenta de resultados de la empresa de la siguiente forma:

- *Durante el primer año tiene pérdidas.*
- *A partir del segundo año y hasta el séptimo los beneficios crecen hasta alcanzar un máximo de 6´4 millones de euros y a partir del séptimo año los beneficios desciende pero se mantienen por encima de los 5 millones de euros.*

Gráficamente:



BLOQUE B

PROBLEMA B2. La especialidad de una pastelería es la fabricación de cajas de bombones Xupladitis. Los costes de fabricación, $C(x)$ en euros, están relacionados con el número de cajas producidas, x, mediante la función: $C(x) = 0,1\, x^2 + 20\, x + 2500$
Si el precio de venta de una caja de bombones es de 80 euros y se venden todas las cajas producidas, se pide:

a) La función de ingresos que obtiene la pastelería con la venta de las cajas.
b) La función de beneficios, entendida como diferencia entre ingresos y costes de fabricación.
c) El número de cajas de bombones que se deben producir para maximizar el beneficio y el beneficio máximo.

Solución:
Llamamos x = nº de cajas producidas
Coste de fabricación, en euros, de x cajas: $C(x) = 0'1\, x^2 + 20\, x + 2500$,
precio de venta de la caja 80 €, se venden todas las cajas producidas.

a) La función de ingresos,
$I(x) = 80\, x$

b) La función de beneficios,
$B(x)$ = Ingresos – Costes, por lo tanto
$B(x) = 80\, x - (\, 0'1\, x^2 + 20\, x + 2500\,) = -\, 0'1\, x^2 + 60\, x - 2500$

c) Número de cajas de bombones a producir para maximizar el beneficio y éste.
Busquemos el máximo local de $B(x)$.
$B'(x) = -\, 0'2\, x + 60$
$-\, 0'2\, x + 60 = 0; \quad 60 = 0'2\, x; \quad x = 60 / 0'2 = 300$
Como $B(x)$ es una parábola con coeficiente de x^2 negativo, $x = 300$ es un máximo local. Y además es el absoluto.
$x = 300, \; B(300) = -\, 0'1 \,.\, 300^2 + 60 \,.\, 300 - 2500 = 6500$

Por tanto, para maximizar el beneficio hay que producir 600 cajas de bombones y el beneficio máximo será de 6500 €.

OPCIÓN A

PROBLEMA 2. Una pastelería ha comprobado que el número de pasteles de un determinado tipo que vende semanalmente depende de su precio p en euros, según la función:

$$n(p) = 2000 - 1000\,p$$

donde n(p) es el número de pasteles vendidos cada semana. Calcula:

a) La función I(p) que expresa los ingresos semanales de la pastelería en función del precio p de cada pastel.

b) El precio al que hay que vender cada pastel para obtener los ingresos semanales máximos. ¿A cuánto ascenderán dichos ingresos máximos? Justifica la respuesta.

Solución:

a) Como semanalmente vende n(p) pasteles a p euros, los ingresos semanales I(p) se calculan como sigue:

$I(p) = n(p)\,.\,p = (2000 - 1000\,p)\,p = 2000\,p - 1000\,p^2$

Como p es el precio del pastel, no puede ser negativo; el número de pasteles vendidos tampoco puede ser negativo. Por lo tanto los valores que puede tomar p están determinados por el sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} p \geq 0 \\ 2000 - 1000p \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ 2000 \geq 1000p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p \geq 0 \\ 2 \geq p \end{cases} \rightarrow \quad 0 \leq p \leq 2$$

Por lo que, $I(p) = 2000\,p - 1000\,p^2$ *y* $Dom\ I(p) = [\,0\,,\,2\,]$

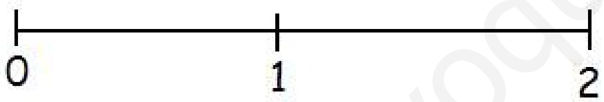
b) Busquemos le máximo de I(p) (recordemos que $Dom\ I(p) = [\,0\,,\,2\,]$ *)*

Estudiemos la monotonía de I(p),

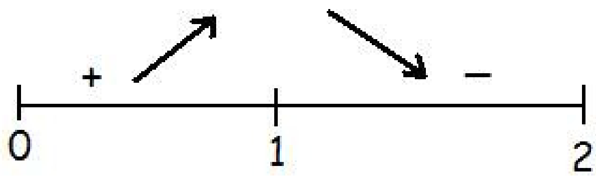
$I'(p) = 2000 - 2000\,p$

$I'(p) = 0 \;\rightarrow\; 2000 - 2000\,p = 0 \;\rightarrow\; 2000 = 2000\,p \;\rightarrow\; p = 1 \in Dom\ I(p)$

Debemos estudiar el signo de I´(p) en los intervalos (0 , 1) y (1 , 2)



p	$I'(p) = 2000 - 2000p$
0´5	$2000 - 2000\,.\,0'5 = 1000 > 0$
1´5	$2000 - 2000\,.\,1'5 = -1000 < 0$



Por lo tanto en p = 1 la función I(p) tiene un máximo relativo; como la función a la izquierda de 1 es creciente y a la derecha decreciente, este máximo relativo es absoluto.

Para $p = 1 \;\rightarrow\; I(1) = 2000\,.\,1 - 1000\,1^2 = 1000$

Finalmente, hay que vender los pasteles a 1 euro para que el beneficio sea máximo y este beneficio será de 1000 euros.

OPCIÓN B

PROBLEMA 2. Un ganadero ordeña una vaca desde el día siguiente al día que ésta pare hasta 300 días después del parto. La producción diaria en litros de leche que obtiene de dicha vaca viene dada por la función:

$$f(x) = \frac{120x - x^2}{5000} + 40$$

donde x representa el número de días transcurridos desde el parto. Se pide:

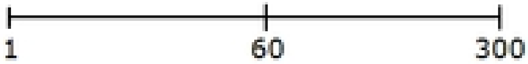
a) El día de máxima producción y la producción máxima.
b) El día de mínima producción y la producción mínima.

Solución:
Busquemos los extremos de la función.
Vamos a estudiar el signo de f´(x),

$$f'(x) = \frac{120 - 2x}{5000}$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{120-2x}{5000} = 0 \quad \rightarrow \quad 120 - 2x = 0 \quad \rightarrow \quad 120 = 2x \quad \rightarrow \quad x = 60$$

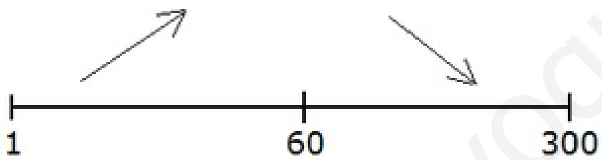
Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,



$$x = 50 \quad \rightarrow \quad f'(50) = \frac{120 - 2.50}{5000} = \frac{20}{5000} = +$$

$$x = 70 \quad \rightarrow \quad f'(70) = \frac{120 - 2.70}{5000} = \frac{-20}{5000} = -$$

Luego:



Por lo que en x = 60 hay un máximo relativo, y como la función a la izquierda de 60 es creciente y a la derecha decreciente este máximo relativo es el absoluto. $x = 60 \quad \rightarrow \quad f(60) = \frac{120 \,.\, 60 - 60^2}{5000} + 40 = \frac{3600}{5000} + 40 = 40'72$

Como f(x) es creciente de 1 a 60 y decreciente de 60 a 300, el mínimo absoluto corresponderá a uno de los extremos del intervalo de definición. Calculemos en que extremo se alcanza el mínimo:

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad f(1) = \frac{120 \,.\, 1 - 1^2}{5000} + 40 = \frac{119}{5000} + 40 = 40'0238$$

$$x = 300 \quad \rightarrow \quad f(300) = \frac{120 \,.\, 300 - 300^2}{5000} + 40 = \frac{-5400}{5000} + 40 = 29'2$$

Luego el mínimo se alcanza para x = 300 (último día)

Por lo tanto: el día de máxima producción es a los 60 días después del parto y produce 40´72 l. de leche y el día de mínima producción es a los 300 días después del parto y produce 29´2 l. de leche.

OPCIÓN A

Problema 2. Se estima que el beneficio anual $B(t)$, en %, que produce cierta inversión viene determinado por el tiempo t en meses que se mantiene dicha inversión a través de la siguiente expresión:

$$B(t) = \frac{36t}{t^2 + 324} + 1, \ \ t \geq 0.$$

a) Describe la evolución del beneficio en función del tiempo durante los primeros 30 meses.
b) Calcula, razonadamente, cuánto tiempo debe mantenerse dicha inversión para que el beneficio sea máximo. ¿Cuál es el beneficio máximo?
c) ¿Cuál sería el beneficio de dicha inversión si ésta se mantuviera en el tiempo de forma indefinida?

Solución:

Estudiemos la función $B(t) = \frac{36t}{t^2 + 324} + 1, \ \ t \geq 0.$

$B(0) = \frac{36 \ . \ 0}{0^2 + 324} + 1 = \frac{0}{324} + 1 = 0 + 1 = 1$, *la función B(t) pasa por el punto (0 , 1)*

Estudiemos su monotonía

$$B'(t) = \frac{36 \ . \left(t^2 + 324\right) - 36 \ . \ t \ . \ 2t}{\left(t^2 + 324\right)^2} = \frac{36\ t^2 + 11664 - 72\ t^2}{\left(t^2 + 324\right)^2} = \frac{-36\ t^2 + 11664}{\left(t^2 + 324\right)^2}$$

$$B'(t) = 0 \ \ \rightarrow \ \ \frac{-36\ t^2 + 11664}{\left(t^2 + 324\right)^2} = 0 \ \ \rightarrow \ \ -36\ t^2 + 11664 = 0$$

$$36\ t^2 = 11664$$

$$t^2 = \frac{11664}{36} = 324$$

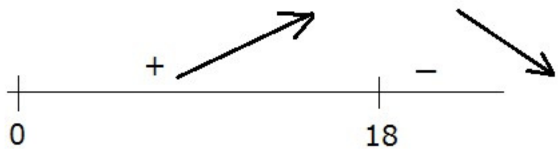
$$t = \pm\sqrt{324} = \pm 18$$

Como la función B(t) está definida para $t \geq 0$, *t = 18.*
Estudiemos el signo de B´(t) a la izquierda y derecha de 18,

$$B'(1) = \frac{-36 \ . \ 1^2 + 11664}{\left(1^2 + 324\right)^2} = \frac{-36 + 11664}{325^2} = \frac{11628}{325^2} = +$$

$$B'(20) = \frac{-36 \ . \ 20^2 + 11664}{\left(20^2 + 324\right)^2} = \frac{-2376}{\left(20^2 + 324\right)^2} = -$$

Es decir:

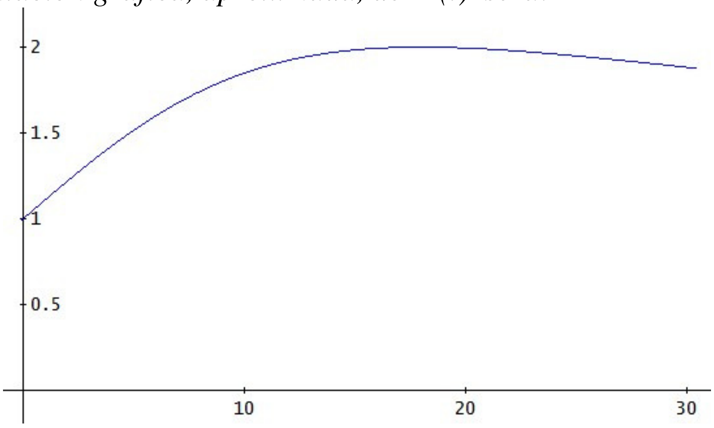


Por lo tanto, B(t) es creciente en (0 , 18) y decreciente en (18 , +∞) y para t = 18 alcanza su máximo.

$B(18) = \frac{36 \ . \ 18}{18^2 + 324} + 1 = 2$, *el máximo está en el punto (18 , 2)*

Para responder al apartado a) calculemos el valor de B(t) para t = 30, $B(30) = \frac{36 \ . \ 30}{30^2 + 324} + 1 = 1'8824$

La representación gráfica, aproximada, de $B(t)$ será:



Respondamos a los apartados.

a) Durante los 30 primeros meses la evolución del beneficio es: empieza proporcionando un beneficio del 1% y va creciendo hasta los 18 meses en que alcanza su valor máximo, un 2%. A partir de los 18 meses, a medida que aumenta el tiempo que se mantiene la inversión el beneficio desciende y manteniéndola 30 meses alcanza el valor de 1´8824%.

b) Según hemos calculado anteriormente el beneficio máximo se alcanza manteniendo la inversión durante 18 meses. Este beneficio máximo es del 2%.

c) Para obtener el beneficio de esta inversión si se mantuviera de forma indefinida debemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{36t}{t^2+324}+1\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{36t+t^2+324}{t^2+324}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}1=1$$

Si la inversión se mantuviera en el tiempo de forma indefinida, el beneficio sería del 1%.