OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix},\quad A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Calcula A y B.
b) Calcula la matriz X sabiendo que $A\,X\,A = B$

Solución:
a) Debemos resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\\ A-B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\end{cases} \quad \textit{Sumando ambas ecuaciones,}\quad 2A=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}6 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Despejando B *en la 1ª ecuación:* $B=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

Solución: $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$

b) Buscamos una matriz X / $A\,X\,A = B$
Veamos si existe A^{-1},

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-2=-2\neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\overset{menores}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\overset{adjuntos}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}\overset{traspuesta}{\rightarrow}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

Finalmente $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$

Calculemos la matriz X,
$A\,X\,A = B$, *multiplicando por* A^{-1} *por la izquierda:* $A^{-1}A\,X\,A = A^{-1}B$, *como* $A^{-1}A = I$, $I\,X\,A = A^{-1}B$,
$X\,A = A^{-1}B$
Multiplicando, ahora, por A^{-1} *por la derecha:* $X\,A\,A^{-1} = A^{-1}B\,A^{-1}$, *luego* $X = A^{-1}B\,A^{-1}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/2 & -3/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1/4 & -11/4\end{pmatrix}$

Finalmente, $X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1/4 & -11/4\end{pmatrix}$

Problema 1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación $A\,X - B\,C\,X = 3\,C$.

b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) ¿Matriz X / $A\,X - B\,C\,X = 3\,C$?

$A\,X - B\,C\,X = 3\,C$, *sacando factor X por la derecha,*

$(A - B\,C)\,X = 3\,C$, *si existe* $(A - B\,C)^{-1}$ *entonces* $X = (A - B\,C)^{-1}\,3\,C$

Calculemos $A - B\,C$,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2.1+2.1 & 2.(-1)+2.(-3)\\ 1.1-1.1 & 1.(-1)-1.(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6+10=4\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\; (A-B\,C)^{-1}$

Cálculo de $(A - B\,C)^{-1}$,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow \{menores\}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 10 & -3\end{pmatrix}\rightarrow \{adjuntos\}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -10 & -3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\{traspuesta\}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Luego, $(A-B\,C)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz X,

$$X=(A-B\,C)^{-1}\,3\,C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}-8 & 28\\ -2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 21\\ -3/2 & 6\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-6 & 21\\ -3/2 & 6\end{pmatrix}$

b) $(A^t + B)^{-1}$.

$$A^t+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=9-3=6\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\; (A^t+B)^{-1}$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ (A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A-I)^2$.
b) $A \cdot B^t$
c) $A - B^{-1}$

siendo I la matriz identidad y B^t y B^{-1} las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente.

Solución:
a) $(A-I)^2$.

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A-I)^2=\begin{pmatrix} -2 & -8 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}$

b) $A \,.\, B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $A\cdot B^t=\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix}$

c) $A - B^{-1}$.
Cálculo de B^{-1},

Como $|B|=\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=2\neq 0 \rightarrow \exists\ B^{-1}$

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego, $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Finalmente, $A-B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -3/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$

Solución: $A-B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 7/2 \\ -1 & -7/2 \end{pmatrix}$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&0&-3\\0&1&-1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&2&2\\2&-1&3\end{pmatrix}\ y\ el\ vector\ \ c=\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix},\ se\ \ pide:$$

a) Calcula el determinante de la matriz A y calcula A^{-1}. *(2 + 4 puntos)*
b) Determina el vector x que verifica $A\,x = B^t\,c$, donde B^t representa la matriz traspuesta de B. *(4 puntos)*

Solución:
a)

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-2&1\\2&0&-3\\0&1&-1\end{vmatrix}=2+3-4=1.\quad \textbf{Por tanto,}\quad |A|=1$$

Como $|A|=1\neq 0 \ \rightarrow\ \exists\, A^{-1}$

Cálculo de A^{-1},

$$A\ \xrightarrow{menores}\ \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&-3\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&-3\\0&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2&1\\1&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&-1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\0&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2&1\\0&-3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\2&-3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-2\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2&2\\1&-1&1\\6&-5&4\end{pmatrix}\ \xrightarrow{adjuntos}\ \begin{pmatrix}3&2&2\\-1&-1&-1\\6&5&4\end{pmatrix}\ \xrightarrow{traspuesta}\ \begin{pmatrix}3&-1&6\\2&-1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}$$

$$\textbf{Finalmente,}\ A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}3&-1&6\\2&-1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-1&6\\2&-1&5\\2&-1&4\end{pmatrix}$$

b) ¿Vector x*?* / $A\,x=B^t\,c$
Calculemos $B^t\,c$

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-1&2&2\\2&-1&3\end{pmatrix},\quad luego\quad B^t=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&2&-1\\0&2&3\end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot c=\begin{pmatrix}1&-1&2\\-2&2&-1\\0&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1(-2)-1(-1)+2\cdot 3\\-2(-2)+2(-1)-1\cdot 3\\0(-2)+2(-1)+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+1+6\\4-2-3\\0-2+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-1\\7\end{pmatrix}$$

Luego, $A\,x=\begin{pmatrix}5\\-1\\7\end{pmatrix}$, *multiplicando por la izquierda por* A^{-1},

$$A^{-1}\,A\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; I\,x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; x = A^{-1}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot 5 - 1(-1) + 6\cdot 7 \\ 2\cdot 5 - 1(-1) + 5\cdot 7 \\ 2\cdot 5 - 1(-1) + 4\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15+1+42 \\ 10+1+35 \\ 10+1+28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$$

Solución: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 58 \\ 46 \\ 39 \end{pmatrix}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Un inversor decidió invertir un total de 42000 € entre tres productos:

a) Una cuenta de ahorros por la que recibe unos intereses anuales del 5%.

b) Un depósito a plazo fijo por el que le pagan unos intereses anuales del 7%.

c) Unos bonos con unos intereses anuales del 9%.

Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €.

Si los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones, ¿qué cantidad invirtió en cada producto?

(Planteamiento correcto 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando x = *cantidad invertida en cuenta de ahorro (5%)*

y = *cantidad invertida en depósito (7%)*

z = *cantidad invertida en bonos (9%)*

De los datos del problema,

Invirtió un total de 42000 € entre tres productos:	$x + y + z = 42.000$
Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 2600 €:	$0'05\,x + 0'07\,y + 0'09\,z = 2600$
Los intereses que ha recibido de la cuenta de ahorros son 200 € menos que la suma de los intereses que ha percibido por las otras dos inversiones:	$0'05\,x = 0'07\,y + 0'09\,z - 200$

Arreglamos las dos últimas ecuaciones,

$0'05\,x + 0'07\,y + 0'09\,z = 2600 \rightarrow 5\,x + 7\,y + 9\,z = 260.000$

$0'05\,x = 0'07\,y + 0'09\,z - 200 \rightarrow 5\,x = 7\,y + 9\,z - 20.000 \rightarrow 5\,x - 7\,y - 9\,z = -20.000$

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 42000 \\ 5x + 7y + 9z = 260000 \\ 5x - 7y - 9z = -20000 \end{cases}$. *Lo resolvemos por Gauss,*

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 5 & 7 & 9 & 260000 \\ 5 & -7 & -9 & -20000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ F_2 - 5x\,F_1 \\ F_3 - 5x\,F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & -12 & -14 & -230000 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ F_3 + 6x\,F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 42000 \\ 0 & 2 & 4 & 50000 \\ 0 & 0 & 10 & 70000 \end{array}\right)$$

De $F_3 \rightarrow 10\,z = 70000 \rightarrow z = \dfrac{70000}{10} = 7000$

De $F_2 \rightarrow 2\,y + 4\,z = 50000 \rightarrow 2\,y + 4\,.\,7000 = 50000 \rightarrow 2\,y + 28000 = 50000 \rightarrow$

$2\,y = 50000 - 28000 \rightarrow 2\,y = 22000 \rightarrow y = \dfrac{22000}{2} = 11000$

De $F_1 \rightarrow x + y + z = 42000 \rightarrow x + 11000 + 7000 = 42000 \rightarrow x + 18000 = 42000 \rightarrow$

$x = 42000 - 18000 \rightarrow x = 24000$

Solución: en la cuenta de ahorro invirtió 24000 euros, en el depósito 11000 euros y en los bonos 7000 euros.

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A *(3 puntos)*

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. *(3 puntos)*

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\left\{ sacando\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ cada\ fila \right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}(4+4+4++8+8-1)=\frac{1}{27}\cdot 27=1$$

Solución: $|A|=1$.

b)¿A es ortogonal?

La matriz A es ortogonal si $\exists A^{-1}$ *y* $A^{-1}=A^t$

En el apartado anterior obtuvimos que $|A|=1\neq 0$, *por lo tanto* $\exists A^{-1}$.

Comprobemos que $A^{-1}=A^t$, *lo haremos calculando* $A\ .\ A^t\ (=A\ .\ A^{-1}=I)$

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\left\{ sacamos\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ las\ dos\ matrices \right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1\cdot 1-2\cdot(-2)+2\cdot 2 & 1\cdot 2-2\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)-2\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 2 & 2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 2 \\ -2\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 2 & -2\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1 & -2\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I \quad c.q.c.$$

Solución: la matriz A es ortogonal.

c) Resolver el sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,

$$A^{-1}\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=$$

Del apartado anterior sabemos que $A^{-1} = A^t$, *luego*
{utilizaremos la matriz A^t *como la escribimos en el apartado b)}, es decir:*

$$A^t=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 1-2\cdot 1 \\ -2\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 1 \\ 2\cdot 1+1\cdot 1+2\cdot 1 \end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x=\frac{1}{3},\quad y=\frac{1}{3}\quad y\quad z=\frac{3}{5}.$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. *(3 puntos)*
b) Calcula la matriz X de dimensión 2x3, que satisface la ecuación $X\,A + C = X\,B$. *(4 puntos)*
c) ¿Es posible hacer el producto $B\,C$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto $C\,B$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. *(3 puntos)*

Solución:
a) Cálculo de $(A-B)^{-1}$.

$$A-B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Calculemos /A – B/, $|A-B|=\begin{vmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=6\neq 0$

Como /A/ $\neq 0$ $\rightarrow$ existe $(A-B)^{-1}$. Procedamos a su cálculo,

$$A-B \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&2\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-2&-3\\6&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-2&3\\6&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}$$

Finalmente, $(A-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&-1/3&-2/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}$

b) ¿Matriz X? / X A + C = X B
Veamos si podemos despejar X,
$X A - X B = -C;\quad X\,(A-B) = -C$
Como existe $(A-B)^{-1}$, multiplicando por la derecha por $(A-B)^{-1}$, $X\,(A-B)\,(A-B)^{-1} = -C\,(A-B)^{-1}$
Como $(A-B)\,(A-B)^{-1}=I$, $X\,I = -C\,(A-B)^{-1} \rightarrow X = -C\,(A-B)^{-1}$
Procedamos al cálculo de X,

$$C\left(A-B\right)^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot(-2)+0\cdot 3 & 5\cdot 6+3\cdot(-4)+0\cdot 0\\ 2\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 2\cdot 6+1\cdot(-4)+2\cdot 0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}$$

Finalmente, $X=-C\left(A-B\right)^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$.

c) ¿Es posible hacer el producto B C?
B es una matriz 3 x 3 y C es 2 x 3, el producto B C no puede realizarse porque el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de C (2).

¿Es posible hacer el producto C B?
C es una matriz 2 x 3 y B es 3 x 3, el producto C B puede efectuarse porque nº de columnas de C = nº de filas de B = 3 y el resultado será una matriz 2 x 3.

$$C\,B=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 1\\ 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$$

Solución: $C\,B=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$

Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa *(5 puntos)*

b) Resolver la ecuación matricial $2\,A^2\,X = 4\,B$ *(2 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot(-2)+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+2\cdot 0+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 1+2\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) & -1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo de la inversa de A^2,

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+4+36-16-6-6=16\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\left(A^2\right)^{-1}$$

$$A^2 \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2/16 & -1/16 & -10/16 \\ 10/16 & -3/16 & 2/16 \\ 6/16 & -5/16 & -2/16 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X? / $2\,A^2\,X = 4\,B$

Despejemos X,

$$A^2X=\frac{4}{2}B;\quad A^2X=2B$$

Como existe $\left(A^2\right)^{-1}$*, multiplicando por la izquierda por* $\left(A^2\right)^{-1}$*,*

$$\left(A^2\right)^{-1}A^2X=\left(A^2\right)^{-1}2B;\quad como\quad \left(A^2\right)^{-1}A^2=I \;\rightarrow\; I\,X=2\left(A^2\right)^{-1}B;\quad X=2\left(A^2\right)^{-1}B$$

Procedamos al cálculo de X,

$$X = 2\,\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+(-10)\cdot 0 & -2\cdot(-2)+(-1)\cdot 4+(-10)\cdot 0 & -2\cdot 1+(-1)\cdot 2+(-10)\cdot 1 \\ 10\cdot 3+(-3)\cdot(-1)+2\cdot 0 & 10\cdot(-2)+(-3)\cdot 4+2\cdot 0 & 10\cdot 1+(-3)\cdot 2+2\cdot 1 \\ 6\cdot 3+(-5)\cdot(-1)+(-2)\cdot 0 & 6\cdot(-2)+(-5)\cdot 4+(-2)\cdot 0 & 6\cdot 1+(-5)\cdot 2+(-2)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6+1 & 4-4 & -2-2-10 \\ 30+3 & -20-12 & 10-6+2 \\ 18+5 & -12-20 & 6-10-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$$

a) Analiza si la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2\,X\,C=B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&z\end{pmatrix}$ cumple la condición $C\,D=D\,C$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿$A\,B-2\,I$ es invertible?

Cálculos:

$$A\,B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot0&1\cdot4+0\cdot2&1\cdot0+0\cdot3\\0\cdot(-1)+1\cdot0&0\cdot4+1\cdot2&0\cdot0+1\cdot3\\-1\cdot(-1)+3\cdot0&-1\cdot4+3\cdot2&-1\cdot0+3\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\\1&2&9\end{pmatrix}$$

$$A\,B-2I=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\\1&2&9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\\1&2&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4&0\\0&0&3\\1&2&7\end{pmatrix}$$

$A\,B-2\,I$ será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$|A\,B-2I|=\begin{vmatrix}-3&4&0\\0&0&3\\1&2&7\end{vmatrix}=12+18=30\neq0\quad\rightarrow\quad\exists\,(A\,B-2I)^{-1}$$

Solución: la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible.

b) ¿Matriz X? / $A+2\,X\,C=B^t$

Despejemos X,

$2\,X\,C=B^t-A$; $X\,C=\frac{1}{2}(B^t-A)$; *si existe C^{-1} entonces, multiplicando por C^{-1} por la derecha*

$$X\,C\,C^{-1}=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X\,I=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1}$$

Como $|C|=\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix}=-1\neq0\quad\rightarrow\quad\exists\,C^{-1}$

Cálculo de C^{-1},

$$C=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}0&1\\1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&3\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&-3\end{pmatrix}$$

Cálculo de X,

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^t - A\right)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 0 + 0\cdot 1 & -2\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 4\cdot 0 + 1\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $X = \frac{1}{2}\left(B^t - A\right)C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Valor de z? / C D = D C

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Estas dos matrices serán iguales si $\begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases}$ *que es la misma ecuación, por tanto resolvamos:*

$-3 + z = 1;\quad z = 1 + 3 = 4$

Solución: la matriz D cumple la condición C D = D C para z = 4.

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de Cramer:

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2z = -6 \\ x \qquad + z = 5 \\ 2x - y \qquad = 11 \end{array}\right\}$$

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2+2+1 = 5 \neq 0$$ *podemos resolverlo por el método de Cramer.*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -6 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{10+11-6}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -6 & -2 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 11 & 0 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-22-12+20-11}{5} = \frac{-25}{5} = -5$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 11 \end{vmatrix}}{5} = \frac{6+10+5-11}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

La solución del sistema es $x = 3$, $y = -5$, $z = 2$

BLOQUE A

PROBLEMA A2. Resuelve el sistema:

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+z=3 \\ x+5y-7z=4 \end{cases}$$

Si (x , y , 0) es una solución del sistema anterior, ¿cuáles son los valores de x y de y?

Solución:
Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -7 & 4 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ F_2-2xF_1 \\ F_3-F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -6 & 2 \end{array}\right) \quad \begin{array}{r} \\ \\ F_3+2xF_2 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como, al hacer ceros por debajo de la diagonal principal, obtenemos una fila de ceros el sistema es Compatible Indeterminado.
Para resolverlo utilizamos x e y como incógnitas principales.
De la última matriz del método de Gauss nos queda el sistema,

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ -2y+3z=-1 \end{cases}$$

pasamos la incógnita z a la derecha,

$$\begin{cases} x+y=2+z \\ -2y=-1-3z \end{cases}$$

de la $2^{\text{a}} \quad \rightarrow y=\dfrac{-1-3z}{-2}=\dfrac{1+3z}{2}$

sustituyendo en la 2ª ecuación,

$$x+\frac{1+3z}{2}=2+z \quad \rightarrow \quad x=2+z-\frac{1+3z}{2}=\frac{4+2z-1-3z}{2}=\frac{3-z}{2}$$

$$Solución: \quad \begin{cases} x=\dfrac{3-\lambda}{2} \\ y=\dfrac{1+3\lambda}{2} \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

Si (x , y , 0) es una solución sabemos que z = 0, es decir, que λ = 0, por lo que, sustituyendo en la solución general obtenida anteriormente obtenemos los valores de x e y pedidos,

$$x=\frac{3-0}{2}=\frac{3}{2}$$

$$y=\frac{1+3\,.\,0}{2}=\frac{1}{2}$$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}$.

a) Calcular A^{-1}.
b) Determina la matriz X tal que $A\,X = A + B$.

Solución:
a) A^{-1}.
Calculamos el determinante de la matriz A,

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{vmatrix}=(F_2-F_1)=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&0\\0&1&3\end{vmatrix}=3\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \exists A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&3&1\\0&1&3\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}3&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&3\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\0&3\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}2&1\\3&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&3&1\\5&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}8&-3&1\\-5&3&-1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}8&-5&-1\\-3&3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}$$

Y, finalmente, $A^{-1}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix}8&-5&-1\\-3&3&0\\1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8/3&-5/3&-1/3\\-1&1&0\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}$

b) Determina la matriz X tal que $A\,X = A + B$.
Multiplicamos la expresión anterior por A^{-1} *por la izquierda,*
$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,(A + B)$; $\quad I\,X = A^{-1}A + A^{-1}B$; $\quad X = I + A^{-1}B$
En primer lugar, calculamos $A^{-1}B$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}8/3&-5/3&-1/3\\-1&1&0\\1/3&-1/3&1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1&2\\1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{3}0-\frac{5}{3}1-\frac{1}{3}2&-\frac{8}{3}-\frac{5}{3}0-\frac{1}{3}1&\frac{8}{3}2+\frac{5}{3}1-\frac{1}{3}0\\-1.0+1.1+0.2&1.1+1.0+0.1&-1.2-1.1+0.0\\\frac{1}{3}0-\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}2&-\frac{1}{3}1-\frac{1}{3}0+\frac{1}{3}1&\frac{1}{3}2+\frac{1}{3}1+\frac{1}{3}0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-7/3&-9/3&21/3\\1&1&-3\\1/3&0&3/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3&-3&7\\1&1&-3\\1/3&0&1\end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7/3&-3&7\\1&1&-3\\1/3&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4/3&-3&7\\1&2&-3\\1/3&0&2\end{pmatrix}$$

Problema 1. Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula A^{-1}. *(5 puntos)*

b) Calcula una matriz X, de orden 3x3, que cumpla $A\,X = C$. *(5 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de A^{-1}.

Calculemos /A/, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 15 + 10 - 25 + 4 + 9 = 19$

Como /A/ ≠ 0 → existe A^{-1}. Procedamos a su cálculo,

$$A \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 19 & -2 \\ -8 & -19 & 7 \\ -3 & -19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 5 & -19 & -2 \\ 8 & -19 & -7 \\ -3 & 19 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$A^{-1} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 5 & 8 & -3 \\ -19 & -19 & 19 \\ -2 & -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X? / A X = C

Como existe A^{-1}, multiplicando por la izquierda por A^{-1}, $A^{-1} A\,X = A^{-1} C$

Como $A^{-1} A = I$, $I\,X = A^{-1} C \rightarrow X = A^{-1} C$

Procedamos al cálculo de X,

$$X = \begin{pmatrix} 5/19 & 8/19 & -3/19 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2/19 & -7/19 & 5/19 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ 8 & 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} & \frac{35+8-24}{19} \\ -7-1+8 & -4+1+4 & -1-4+6 \\ \frac{-14-7+40}{19} & \frac{-8+7+20}{19} & \frac{-2-28+30}{19} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problema 2. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$. *(4 puntos)*

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)\,Y - A\,Y = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3 *(4 puntos)*

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A\,Z\,A^{-1} = I$. *(2 puntos)*

Solución:

a) *¿Matriz X? /* $X^{-1} A + A = B$.

$X^{-1} A + A = B \;\rightarrow\; X^{-1} A = B - A$; *multiplicando por la izquierda por X:* $X\,X^{-1} A = X\,(B - A)$

$\{como\ X\,X^{-1} = I\} \;\rightarrow\; I\,A = X\,(B - A) \;\rightarrow\; A = X\,(B - A)$

Si existe $(B - A)^{-1} \;\rightarrow$ *multiplicando por la derecha por* $(B - A)^{-1}$: $A\,(B - A)^{-1} = X\,(B - A)\,(B - A)^{-1}$

$\{como\ (B - A)\,(B - A)^{-1} = I\} \;\rightarrow\; A\,(B - A)^{-1} = X$

Cálculos:

$$B-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}; \qquad |B-A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\,(B-A)^{-1}$$

Cálculo de la inversa de $(B - A)$,

$$B-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad (B-A)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X=A(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 0\\ 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

b) ¿Matriz Y? / $(A - B)\,Y - A\,Y = I$

Despejemos Y,

$A\,Y - B\,Y - A\,Y = I$; $\quad -B\,Y = I$; $\quad B\,Y = -I$; si existe B^{-1} entonces, multiplicando por B^{-1} la izquierda

$B^{-1}\,B\,Y = B^{-1}\,(-I)$; $\quad I\,Y = -B^{-1}\,I$; $\quad Y = -B^{-1}$

$$\text{Como } |B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$$

Cálculo de B^{-1},

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalmente}: \quad Y = -B^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $$Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

c) ¿Matriz Z? / $A\,Z\,A^{-1} = I$

$$\text{Como } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

Despejemos Z, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1}\,A\;\,Z\;\,A^{-1} = A^{-1}\;\,I$; $\quad I\;\,Z\;\,A^{-1} = A^{-1}$; $\quad Z\;\,A^{-1} = A^{-1}$; multiplicando por A por la derecha: $Z\;\,A^{-1}\,A = A^{-1}\,A$; $\quad Z\,I = I$; $\quad Z = I$

***Solución:* $Z = I$**

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Obtén todas las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=-1\\ 2x-y+z&=0\\ -2x+7y+z&=-4 \end{aligned}\right\}$$

Solución:
Resolveremos el sistema por el método de Gauss. Utilizaremos la matriz ampliada del sistema,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ -2 & 7 & 1 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2-2.F_1\\ F_3+2.F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 9 & 3 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ F_3+3.F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -3 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es un sistema compatible indeterminado, lo resolvemos utilizando la 1ª y 2ª ecuación y como incógnitas principales x e y.
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x+y=-1-z\\ -3y=2+z \end{cases}$$

Lo resolvemos por Cramer,
Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1\\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-3$$

Las soluciones del último sistema,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1\\ 2+z & -3 \end{vmatrix}}{-3}=\frac{3+3z-2-z}{-3}=\frac{1+2z}{-3}=\frac{-1-2z}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z\\ 0 & 2+z \end{vmatrix}}{-3}=\frac{2+z}{-3}=\frac{-2-z}{3}$$

El sistema planteado tiene por soluciones,

$$\begin{cases} x=\dfrac{-1-2\lambda}{3}\\ y=\dfrac{-2-\lambda}{3} & \lambda\in\Re\\ z=\lambda \end{cases}$$

OPCIÓN A

Problema 1. Plantea y escribe el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y cuyo término independiente es $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema.

Solución:

El sistema será: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto matricial, $\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ -4x+2y+z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Y, finalmente, el sistema es: $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -4x+2y+z=0 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2+2xF_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Esta preparado para resolver,

de $F_3 \rightarrow -y=-2 \rightarrow y=2$

de $F_2 \rightarrow 8y-z=6$, *sustituyendo el valor obtenido de* y

$8 \cdot 2 - z = 6;\quad 16 - z = 6;\quad 16 - 6 = z;\quad z = 10$

de $F_1 \rightarrow 2x+3y-z=3$, *sustituyendo los valores obtenidos de* z *e* y

$2x + 3 \cdot 2 - 10 = 3;\quad 2x + 6 - 10 = 3;\quad 2x - 4 = 3;\quad 2x = 3 + 4;\quad 2x = 7;\quad x = \frac{7}{2}$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$

* * *

Resolvamos el sistema por el método de Cramer.
Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+8+6+4-12-4 = 18-20 = -2 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6+3+2-6}{-2} = \frac{5-12}{-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4+6-2-12}{-2} = \frac{10-14}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4-24-12+12}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1- \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. *(4 puntos)*
b) Calcula $C + A\,B$. *(2 puntos)*
c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$ y $(C + A\,B)^{-1}$? *(4 puntos)*

Solución:
a) $(AB)^{-1}$.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Como \quad |AB|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0-(-1)=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists \ (AB)^{-1}$$

Cálculo de $(AB)^{-1}$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{menores\} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{adjuntos\} \ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{traspuesta\} \ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Luego, \ (AB)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) ¿C + AB?

$$C+AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

***Solución:* $C + AB = I$**

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$ *y* $(C + A\,B)^{-1}$*?*

En el apartado anterior hemos obtenido que $C + A\,B = I$, *por tanto* $(C + A\,B)^{-1} = I^{-1} = I$

Calculemos $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$

Cálculo de C^{-1}

$$Como \quad |C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-(-1)=1\neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists \ C^{-1}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{menores\} \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{adjuntos\} \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ \{traspuesta\} \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Luego, \ C^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (A\,B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que $C^{-1} + (A\ B)^{-1} = I = (C + A\ B)^{-1}$. *Por lo que,* ***las dos matrices dadas son iguales***.