OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Sean las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Resuelve la ecuación $X\,A\,B - X\,C = 2\,C$.

Solución:

La ecuación a resolver es: $X\,A\,B - X\,C = 2\,C$

Por la propiedad distributiva del producto respecto de la resta de matrices:

$X\,(\,A\,B - C\,) = 2\,C$ *(a)*

Llamamos $M = A\,B - C$

Obtengamos la matriz M,

$$M = AB - C = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1.2+2.1 & 1.(-1)+2.2\\ 0.2+3.1 & 0.(-1)+3.2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 3\\ 3 & 6\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}$$

Obtengamos la inversa de la matriz M, M^{-1}

$$|M| = \begin{vmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\end{vmatrix} = 16 - 8 = 8 \neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, M^{-1}$$

$$M = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix}4 & 4\\ 2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix}4 & -4\\ -2 & 4\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 4\end{pmatrix}$$

$$Y,\quad M^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -4 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4/8 & -2/8\\ -4/8 & 4/8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & -1/4\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

De lo obtenido en (a): $X\,M = 2\,C$, *multiplicando por* M^{-1} *por la derecha:* $X\,M\,M^{-1} = 2\,C\,M^{-1}$, *operando:* $X\,I = 2\,C\,M^{-1}$, *por lo tanto:* $X = 2\,C\,M^{-1}$

Calculemos la matriz X,

$$X = 2CM^{-1} = 2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2 & -1/4\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}0.\frac{1}{2}+1.\left(\frac{-1}{2}\right) & 0.\left(\frac{-1}{4}\right)+1.\frac{1}{2}\\ -1.\frac{1}{2}+2.\left(\frac{-1}{2}\right) & -1.\left(\frac{-1}{4}\right)+2.\frac{1}{2}\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}-1 & \frac{1}{4}+1\end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix}\frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-3}{2} & \frac{5}{4}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 5/2\end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -3 & 5/2\end{pmatrix}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dos matrices A y B satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Calcula A y B.
b) Calcula la matriz X sabiendo que $A\,X\,A = B$

Solución:
a) Debemos resolver el sistema matricial:

$$\begin{cases} A+B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ A-B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \textit{Sumando ambas ecuaciones,} \quad 2A=\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejando B en la 1ª ecuación: $B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

b) Buscamos una matriz X / $A\,X\,A = B$
Veamos si existe A^{-1},

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-2=-2\neq 0 \rightarrow \exists\, A^{-1}$$

Calculemos A^{-1},

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Finalmente $A^{-1}=\dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$

Calculemos la matriz X,
$A\,X\,A = B$, multiplicando por A^{-1} por la izquierda: $A^{-1}A\,X\,A = A^{-1}B$, como $A^{-1}A = I$, $I\,X\,A = A^{-1}B$,
$X\,A = A^{-1}B$
Multiplicando, ahora, por A^{-1} por la derecha: $X\,A\,A^{-1} = A^{-1}B\,A^{-1}$, luego $X = A^{-1}B\,A^{-1}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$

Finalmente, $X=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1/4 & -11/4 \end{pmatrix}$

Problema 1. Se dan las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$.

a) Halla la matriz X que satisface la ecuación $A\,X - B\,C\,X = 3\,C$.
b) Calcula la matriz inversa de $A^t + B$, donde A^t representa la matriz traspuesta de A.

Solución:
a) ¿Matriz X / A X – B C X = 3 C?
A X – B C X = 3 C, sacando factor X por la derecha,
(A – B C) X = 3 C, si existe $(A - B\,C)^{-1}$ entonces $X = (A - B\,C)^{-1}\, 3\,C$

Calculemos A – B C,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\,.\,1+2\,.\,1 & 2\,.(-1)+2\,.(-3)\\ 1\,.\,1-1\,.\,1 & 1\,.(-1)-1\,.(-3)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & -8\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-6+10=4\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\;(A-B\,C)^{-1}$

Cálculo de $(A - B\,C)^{-1}$,

$$A-B\,C=\begin{pmatrix}-3 & 10\\ -1 & 2\end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix}2 & -1\\ 10 & -3\end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix}2 & 1\\ -10 & -3\end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Luego, $(A-B\,C)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz X,

$$X=(A-B\,C)^{-1}\,3\,C=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}3\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}2 & -10\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\frac{3}{4}\begin{pmatrix}-8 & 28\\ -2 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 21\\ -3/2 & 6\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-6 & 21\\ -3/2 & 6\end{pmatrix}$

b) $(A^t + B)^{-1}$.

$$A^t+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=9-3=6\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\;(A^t+B)^{-1}$

Cálculo de $(A^t + B)^{-1}$,

$$A^t + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\{traspuesta\} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ (A^t + B)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A^t + B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/6 \\ -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, calcula:

a) $(A-I)^2$.
b) $A\cdot B^t$
c) $A-B^{-1}$

siendo I la matriz identidad y B^t y B^{-1} las matrices traspuesta e inversa de B, respectivamente.

Solución:

a) $(A-I)^2$.

$$A-I=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}$$

$$(A-I)^2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -8\\ 4 & 14\end{pmatrix}$$

Solución: $(A-I)^2=\begin{pmatrix}-2 & -8\\ 4 & 14\end{pmatrix}$

b) $A\,.\,B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -10 & -6\end{pmatrix}$$

Solución: $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}7 & 4\\ -10 & -6\end{pmatrix}$

c) $A-B^{-1}$.

Cálculo de B^{-1},

Como $|B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\; B^{-1}$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\rightarrow\{menores\}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\{adjuntos\}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\{traspuesta\}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Luego, $B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$

Finalmente, $A-B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 7/2\\ -1 & -7/2\end{pmatrix}$

Solución: $A-B^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 7/2\\ -1 & -7/2\end{pmatrix}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal si tiene inversa y dicha inversa coincide con su matriz traspuesta. Dada la matriz

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a) Calcula el determinante de A *(3 puntos)*

b) Comprueba que A es una matriz ortogonal. *(3 puntos)*

c) Resuelve el sistema de ecuaciones $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $|A|$.

$$|A|=\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}=\left\{ sacando\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ cada\ fila \right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^3\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=$$

$$=\frac{1}{27}(4+4+4++8+8-1)=\frac{1}{27}\cdot 27=1$$

Solución: $|A|=1$.

b)¿A es ortogonal?

La matriz A es ortogonal si $\exists A^{-1}$ *y* $A^{-1}=A^t$

En el apartado anterior obtuvimos que $|A|=1\neq 0$*, por lo tanto* $\exists A^{-1}$.

Comprobemos que $A^{-1}=A^t$ *, lo haremos calculando* $A\,.\,A^t$ ($=A\,.\,A^{-1}=I$)

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}=\left\{ sacamos\ el\ factor\ \frac{1}{3}\ de\ las\ dos\ matrices \right\}=$$

$$=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1\cdot 1-2\cdot(-2)+2\cdot 2 & 1\cdot 2-2\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot(-2)-2\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 1+2\cdot(-2)+1\cdot 2 & 2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot(-2)+2\cdot 1+1\cdot 2 \\ -2\cdot 1+1\cdot(-2)+2\cdot 2 & -2\cdot 2+1\cdot 2+2\cdot 1 & -2\cdot(-2)+1\cdot 1+2\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad c.q.c.$$

Solución: la matriz A es ortogonal.

c) Resolver el sistema:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por la izquierda por A^{-1} ,

$$A^{-1}\,A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad I\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

Del apartado anterior sabemos que $A^{-1} = A^t$, *luego*
{utilizaremos la matriz A^t *como la escribimos en el apartado b)}, es decir:*

$$A^t = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 - 2\cdot 1 \\ -2\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 3/5 \end{pmatrix}$$

La solución del sistema es: $x = \dfrac{1}{3}, \quad y = \dfrac{1}{3} \quad y \quad z = \dfrac{3}{5}.$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Halla la matriz inversa de A. *(3 puntos)*
b) Explica porque la matriz B no tiene inversa. *(2 puntos)*
c) Razona porque la matriz $A\,B$ no tiene inversa. *(2 puntos)*
d) Resuelve la ecuación matricial $A\,B - A\,X = B\,A$. *(3 puntos)*

Solución:
a) A^{-1}.

Como $|A|=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-5=-1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\; A^{-1}$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Luego, $A^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

b) ¿No existe B^{-1}*?*

Como $|B|=\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-4=0 \;\rightarrow\;$ *No existe* B^{-1}

c) ¿No existe $(AB)^{-1}$*?*
A y B son matrices cuadradas de orden 2, luego AB también es cuadrada de orden 2.
El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de ellas,
$|AB|=|A|\,|B| = -1\cdot 0 = 0$, *por lo que no existe* $(AB)^{-1}$.

d) Resolver $A\,B - A\,X = B\,A$.
Despejemos X,
$A\,B - A\,X = B\,A;\quad A\,B - B\,A = A\,X,$ *como existe* A^{-1}
Multiplicando, por la izquierda por A^{-1}
$A^{-1}(A\,B - B\,A) = A^{-1}A\,X$
$A^{-1}A\,B - A^{-1}B\,A = A^{-1}A\,X \quad \{$ *como* $A^{-1}A = I\}$
$B - A^{-1}B\,A = X;$

Calculemos $A^{-1}B\,A$

$$B\,A=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2+4\cdot 1 & 2\cdot 5+4\cdot 2\\ 1\cdot 2+2\cdot 1 & 1\cdot 5+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8 & 18\\ 4 & 9\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B\,A=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 18\\ 4 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 9\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 9\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}$

a) Calcula la inversa de la matriz $A-B$. *(3 puntos)*

b) Calcula la matriz X de dimensión 2x3, que satisface la ecuación $X\,A + C = X\,B$. *(4 puntos)*

c) ¿Es posible hacer el producto $B\,C$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. ¿Es posible hacer el producto $C\,B$? Si la respuesta es afirmativa calcula dicho producto; en caso contrario, justifica el porqué. *(3 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de $(A-B)^{-1}$.

$$A-B=\begin{pmatrix}2&3&4\\1&1&3\\1&3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Calculemos $/A-B/$, $\quad |A-B|=\begin{vmatrix}2&3&2\\0&0&2\\1&0&0\end{vmatrix}=6\neq 0$

Como $/A/\neq 0 \;\rightarrow\;$ *existe* $(A-B)^{-1}$. *Procedamos a su cálculo,*

$$A-B \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&2\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}3&2\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\0&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&3\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-2&0\\0&-2&-3\\6&4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&2&0\\0&-2&3\\6&-4&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}$$

$$\textit{Finalmente,}\quad (A-B)^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1/3&-1/3&-2/3\\0&1/2&0\end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X*? /* $X\,A + C = X\,B$

Veamos si podemos despejar X,

$X\,A - X\,B = -C$; $\quad X\,(A-B) = -C$

Como existe $(A-B)^{-1}$, *multiplicando por la derecha por* $(A-B)^{-1}$, $\quad X\,(A-B)\,(A-B)^{-1} = -C\,(A-B)^{-1}$

Como $(A-B)\,(A-B)^{-1}=I$, $\quad X\,I = -C\,(A-B)^{-1} \;\rightarrow\; X = -C\,(A-B)^{-1}$

Procedamos al cálculo de X,

$$C\,(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\frac{1}{6}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&6\\2&-2&-4\\0&3&0\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 2+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot(-2)+0\cdot 3 & 5\cdot 6+3\cdot(-4)+0\cdot 0\\ 2\cdot 0+1\cdot 2+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot(-2)+2\cdot 3 & 2\cdot 6+1\cdot(-4)+2\cdot 0\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}$$

Finalmente, $X=-C\,(A-B)^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-6&18\\2&4&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$

Por tanto, $X=\begin{pmatrix}-1&1&-3\\-1/3&-2/3&-4/3\end{pmatrix}$.

c) ¿Es posible hacer el producto B C?

B es una matriz 3 x 3 y C es 2 x 3, el producto B C no puede realizarse porque el número de columnas de B (3) es distinto del número de filas de C (2).

¿Es posible hacer el producto C B?

C es una matriz 2 x 3 y B es 3 x 3, el producto C B puede efectuarse porque nº de columnas de C = nº de filas de B = 3 y el resultado será una matriz 2 x 3.

$$C\,B=\begin{pmatrix}5&3&0\\2&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&2\\1&1&1\\0&3&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 0 & 5\cdot 0+3\cdot 1+0\cdot 3 & 5\cdot 2+3\cdot 1+0\cdot 1\\ 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 1+2\cdot 3 & 2\cdot 2+1\cdot 1+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$$

Solución: $C\,B=\begin{pmatrix}3&3&13\\1&7&7\end{pmatrix}$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Consideramos las matrices $A=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}$.

a) Justifica cuales de las siguientes operaciones se pueden realizar y efectúa las que sean realizables.

a.1) $B + 2CA$ *(1 punto)*

a.2) $A - (BC)^T$, siendo $(BC)^T$ la matriz traspuesta de BC. *(2 puntos)*

a.3) CAB *(2 puntos)*

b) Resuelve la ecuación matricial

$$\frac{1}{5}\left(B+AX\right)=C^T,$$

siendo C^T la matriz traspuestas de C. *(5 puntos)*

Solución:

a) Para sumar o restar dos matrices, ambas deben ser del mismo orden. Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda.

a.1) B + 2CA

$\underset{1x2}{C}\cdot\underset{2x2}{A}$, *el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 1x2 {filas de C x columnas de A}*

$\underset{2x1}{B}+2\underset{1x2}{CA}$, ***la operación no puede efectuarse***.

a.2) A – (BC)^T

$\underset{2x1}{B}\cdot\underset{2x2}{C}$, *el producto se puede efectuar y el resultado es una matriz 2x2 {filas de B x columnas de C}*

$\underset{2x2}{BC} \rightarrow \underset{2x2}{(BC)^T}$; $\underset{2x2}{A}-\underset{2x2}{(BC)^T}$, ***la operación puede efectuarse***.

$$BC=\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 & 8 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \rightarrow (BC)^T=\begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$A-(BC)^T=\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & -12 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

Solución: $A-(BC)^T\begin{pmatrix} -2 & 12 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$

a.3) CAB

$\underset{1x2}{C}\cdot\underset{2x2}{A}\cdot\underset{2x1}{B}$, *el producto CA se puede efectuar y el resultado es una matriz 1x2.* $\underset{1x2}{CA}\cdot\underset{2x1}{B}$, *este producto puede realizarse y el resultado es una matriz 1x1. Por tanto,* ***la operación CAB puede efectuarse.***

$$CAB=\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}=\left[\begin{pmatrix} -2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -16 & -8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 16 \end{pmatrix}$$

Solución: CAB = (16)

b) Resolver la ecuación matricial $\frac{1}{5}(B + AX) = C^T$

$$\frac{1}{5}(B + AX) = C^T; \quad B + AX = 5C^T; \quad AX = 5C^T - B$$

$$\text{Como} \quad |A| = \begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 24 \neq 0 \quad \to \quad \exists \ A^{-1}$$

Multiplicando la expresión $AX = 5C^T - B$ *por* A^{-1} *por la izquierda,*

$$A^{-1}AX = A^{-1}(5C^T - B) \quad \to \quad IX = A^{-1}(5C^T - B) \quad \to \quad X = A^{-1}(5C^T - B)$$

Cálculo de A^{-1},

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to \{menores\} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \to \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Luego, \ A^{-1} = \frac{1}{24}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix}$$

Continuemos con el cálculo de X,

$$5C^T - B = 5 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}(5C^T - B) = \begin{pmatrix} 4/24 & 0 \\ -2/24 & 6/24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -1 \\ -7/2 \end{pmatrix}$

Problema 1. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) Calcular la matriz A^2 y su inversa *(5 puntos)*

b) Resolver la ecuación matricial $2\,A^2\,X = 4\,B$ *(2 puntos)*

Solución:

a) Cálculo de A^2.

$$A^2=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1) & 1\cdot 1+1\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot(-2)+0\cdot 1 \\ 0\cdot 1+2\cdot 0+(-2)\cdot(-1) & 0\cdot 1+2\cdot 2+(-2)\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot(-2)+(-2)\cdot 1 \\ -1\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot(-1) & -1\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 0 & -1\cdot 0+0\cdot(-2)+1\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculo de la inversa de A^2,

$$\left|A^2\right|=\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4+4+36-16-6-6=16\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\left(A^2\right)^{-1}$$

$$A^2 \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & -6 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 6 \\ 1 & -3 & 5 \\ -10 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} -2 & 10 & 6 \\ -1 & -3 & -5 \\ -10 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, $$\left(A^2\right)^{-1}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2/16 & -1/16 & -10/16 \\ 10/16 & -3/16 & 2/16 \\ 6/16 & -5/16 & -2/16 \end{pmatrix}$$

b) ¿Matriz X? / 2 $A^2\,X = 4\,B$

Despejemos X,

$$A^2X=\frac{4}{2}B; \quad A^2X=2B$$

Como existe $\left(A^2\right)^{-1}$, *multiplicando por la izquierda por* $\left(A^2\right)^{-1}$,

$$\left(A^2\right)^{-1}A^2X=\left(A^2\right)^{-1}2B; \quad como \quad \left(A^2\right)^{-1}A^2=I \;\rightarrow\; I\,X=2\left(A^2\right)^{-1}B; \quad X=2\left(A^2\right)^{-1}B$$

Procedamos al cálculo de X,

$$X = 2\,\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & -1 & -10 \\ 10 & -3 & 2 \\ 6 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -2\cdot 3 + (-1)\cdot(-1) + (-10)\cdot 0 & -2\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 + (-10)\cdot 0 & -2\cdot 1 + (-1)\cdot 2 + (-10)\cdot 1 \\ 10\cdot 3 + (-3)\cdot(-1) + 2\cdot 0 & 10\cdot(-2) + (-3)\cdot 4 + 2\cdot 0 & 10\cdot 1 + (-3)\cdot 2 + 2\cdot 1 \\ 6\cdot 3 + (-5)\cdot(-1) + (-2)\cdot 0 & 6\cdot(-2) + (-5)\cdot 4 + (-2)\cdot 0 & 6\cdot 1 + (-5)\cdot 2 + (-2)\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6+1 & 4-4 & -2-2-10 \\ 30+3 & -20-12 & 10-6+2 \\ 18+5 & -12-20 & 6-10-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -5 & 0 & -14 \\ 33 & -32 & 6 \\ 23 & -32 & -6 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -5/8 & 0 & -7/4 \\ 33/8 & -4 & 3/4 \\ 23/8 & -4 & -3/4 \end{pmatrix}$

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad y \quad C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Analiza si la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2\,X\,C=B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $C\,D=D\,C$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿$A\,B-2\,I$ es invertible?

Cálculos:

$$A\,B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 3 \\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 4+1\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 3 \\ -1\cdot(-1)+3\cdot 0 & -1\cdot 4+3\cdot 2 & -1\cdot 0+3\cdot 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A\,B-2I=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$A\,B-2\,I$ será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$|A\,B-2I|=\begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix}=12+18=30\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\,(A\,B-2I)^{-1}$$

Solución: la matriz A B – 2 I es invertible.

b) ¿Matriz X? / $A+2\,X\,C=B^t$

Despejemos X,

$2\,X\,C=B^t-A$; $X\,C=\frac{1}{2}(B^t-A)$; *si existe* C^{-1} *entonces, multiplicando por* C^{-1} *por la derecha*

$$X\,C\,C^{-1}=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X\,I=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1};\quad X=\frac{1}{2}(B^t-A)C^{-1}$$

Como $|C|=\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\, C^{-1}$

Cálculo de C^{-1},

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de X,

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^t - A\right)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 0 + 0\cdot 1 & -2\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 4\cdot 0 + 1\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $X = \dfrac{1}{2}\left(B^t - A\right)C^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Valor de z? / C D = D C

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Estas dos matrices serán iguales si $\begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases}$ *que es la misma ecuación, por tanto resolvamos:* $-3+z=1;\ \ z=1+3=4$

Solución: la matriz D cumple la condición C D = D C para z = 4.

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dada la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

, obtener de forma razonada los valores de x, y, z.

Solución:
Efectuando las operaciones indicadas:

$$\begin{pmatrix} 3x-2y \\ -2x+y \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3x-2y+x \\ -2x+y+y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4x-2y \\ -2x+2y \\ y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Esta última igualdad podemos expresarla como la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{que podemos escribir como} \quad AX = B$$

La solución será: $X = A^{-1} B$ *. Calculemos la matriz* A^{-1}*, por Gauss o por adjuntos el resultado será*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la solución será: $x = -2$, $y = 1$, $z = 2$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad y \qquad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la matriz X que verifica AXB = 2C

Solución:

Para despejar la matriz X debemos efectuar, en la expresión AXB = 2C, las siguientes operaciones:
- multiplicar por la izquierda por A^{-1} *:* $A^{-1}AXB = A^{-1}\ 2C$ *, como* $A^{-1}A = I$*, queda* $XB = A^{-1}\ 2C$
- multiplicar por la derecha por B^{-1} *:* $XB\,B^{-1} = A^{-1}\ 2C\,B^{-1}$ *, como* $B\,B^{-1} = I$*, queda* $X = A^{-1}\ 2C\,B^{-1}$

Por tanto para calcular la matriz X necesitamos calcular las inversas de las matrices A y B.

Cálculo de A^{-1}*:*

1) *Cálculo de* $|A|$,

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \textit{como no es nulo podemos calcular} \quad A^{-1}$$

2) *Cálculo de* A^{-1}

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{*\frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Cálculo de B^{-1}*:*

1) *Cálculo de* $|B|$,

$$|B| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0, \textit{como no es nulo podemos calcular} \quad B^{-1}$$

2) *Cálculo de* B^{-1}

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{*\frac{1}{-4}} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

Luego,

$$X = A^{-1}2CB^{-1} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 1/4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1/2 \\ 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Sea $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ la matriz de sus términos independientes. Se pide:

a) Escribir las tres ecuaciones que forman el sistema.
b) Obtener todas las soluciones del sistema.

Solución:

La expresión matricial del sistema es: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Las tres ecuaciones que forman el sistema son

$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + 5y + z = 1 \end{cases}$$

b) Para encontrar las soluciones del sistema, estudiamos los rangos de la matriz de coeficientes (A) y de la ampliada (A´),

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (como\ C_1 = 2C_3) = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \leq 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) = 2$$

Orlamos el menor de orden 2 usando la columna de términos independientes de A´,

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = (como\ C_1 = 2C_3) = 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') \leq 2$$ *pero como ran(A)=2, entonces ran(A´)=2*

Por lo tanto hemos obtenido que ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas (3), es un sistema compatible indeterminado. Para obtener las soluciones usaremos las ecuaciones e incógnitas correspondientes al menor de orden 2 no nulo, es decir

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 - z \\ 2x + 3y = 1 - z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 2 \\ 1-z & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3 - 3z - 2 + 2z}{2} = \frac{1-z}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{2} = \frac{2(1-z) - 2(1-z)}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \dfrac{1-\lambda}{2} \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula A . A^t – 5 A^{-1}, siendo A^t y A^{-1} las matrices traspuesta e inversa de A, respectivamente.

Solución:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 2 = 5 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{i\,j}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{i\,j}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{j\,i}} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$A\,A^t - 5\,A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+2.2 & 1(-1)+2.3 \\ -1.1+3.2 & -1(-1)+3.3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Determina la matriz X que verifica A X + I = A B^t , siendo I la matriz identidad, A = $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y B^t la traspuesta de la matriz B.

Solución:

$A\,X + I = A\,B^t$

$A\,X = A\,B^t - I$, *si existe* A^{-1} *podremos despejar X como sigue:*

$X = A^{-1}\,(A\,B^t - I) = A^{-1}\,A\,B^t - A^{-1}\,I = B^t - A^{-1}$

$$Como \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; B^t = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cálculo de A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{i\,j}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{i\,j}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{j\,i}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$luego \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$X = B^t - A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. Obtén la matriz X que verifica:

$$2\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Efectuamos las operaciones indicadas, número por matriz y producto de matrices { (2x3) x (3x1) }.

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,.\,1+0\,.\,5-1\,.\,(-3) \\ 4\,.\,1-1\,.\,5+3\,.\,(-3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix}$$

pasamos sumando la matriz $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

efectuando la suma de matrices

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix} \qquad (a)$$

Para obtener la matriz X, hay que utilizar la inversa de $A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$ *; veamos si existe.*

Como $|A| = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = -24+8 = -16 \neq 0 \;\rightarrow\; \exists\, A^{-1}$

Calculemos A^{-1}*,*

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow\; A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix}$$

Multiplicando en la expresión (a) por la izquierda por A^{-1}*,*

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} \frac{6}{16} & \frac{4}{16} \\ \frac{-2}{16} & \frac{-4}{16} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$I\ X = \begin{pmatrix} \frac{48}{16} - \frac{32}{16} \\ \frac{-16}{16} + \frac{32}{16} \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

PROBLEMA 1. Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

a) Calcula la matriz inversa de la matriz C.
b) Obtén la matriz X que verifica $A\,X + B^t = C$, siendo B^t la matriz traspuesta de B.

Solución:
a) Cálculo de la matriz inversa de C,

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\qquad |\,C\,|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-3-2=-5\neq 0\quad\Rightarrow\quad \exists\, C^{-1}$$

Calculamos la matriz inversa de C:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{adjuntos}:\begin{pmatrix}-1 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{traspuesta}:\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$C^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}$$

$$\text{Comprobación}:\ \begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5}+\frac{2}{5} & \frac{3}{5}-\frac{3}{5}\\ \frac{2}{5}-\frac{2}{5} & \frac{2}{5}+\frac{3}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I$$

Por lo que: $C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & \frac{-3}{5}\end{pmatrix}$

b) ¿X? / $A\,X + B^t = C$,

Veamos si la matriz A tiene inversa, $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4-2=2\neq 0\quad\Rightarrow\quad\exists\, A^{-1}$

Multiplicando la expresión $A\,X + B^t = C$ *por* A^{-1} *por la izquierda,*
$A^{-1}\ (A\,X + B^t\,) = A^{-1}\ C$; *efectuando el paréntesis,*
$A^{-1}\,A\,X + A^{-1}\ B^t\ = A^{-1}\ C$;
$I\ X + A^{-1}\ B^t\ = A^{-1}\ C$;
$X + A^{-1}\ B^t\ = A^{-1}\ C$;
$X = A^{-1}\ C - A^{-1}\ B^t\ = A^{-1}\,(C - B^t\,)$
Necesitamos calcular A^{-1},

$$\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}\text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 1\end{pmatrix}\quad\text{adjuntos}:\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\quad\text{traspuesta}:\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Y, finalmente:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Procedamos al calculo de la matriz X:

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

BLOQUE B

PROBLEMA 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, obtén todas las matrices de la forma $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ que satisfacen la relación $A\,X - X\,A = B$.

Solución:
$A\,X - X\,A = B$, sustituyendo cada letra por su matriz,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \textit{operando}$$

$$\begin{pmatrix} x+2y & 2z \\ -x+3y & 3z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x & 2x \\ y-z & 2y+3z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2y & 2z-2x \\ -x+2y+z & -2y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al siguiente sistema,

$$\begin{cases} 2y=2 \\ 2z-2x=-6 \\ -x+2y+z=-1 \\ -2y=-2 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos: $2y = 2$; $y = 1$ y de la 3ª, $-2y = -2$; $y = 1$. Como hemos obtenido el mismo valor, sabemos que $y = 1$. Sustituyendo el valor de y en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} 2z-2x=-6 \\ -x+2+z=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2z-2x=-6 \\ -x+z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z-x=-3 \\ -x+z=-3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x+z=-3 \\ -x+z=-3 \end{cases}$$

Luego, sólo tenemos una ecuación: $-x + z = -3$; $z = x - 3$

Hemos obtenido que el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones son:

$$\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda-3 \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

Por lo que las matrices pedidas serán: $X(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda-3 \end{pmatrix} \quad \forall\,\lambda\in\Re$

OPCIÓN A

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Calcula las matrices X e Y sabiendo que $X+Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}$ y $2X-Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\-7 & -3\end{pmatrix}$.

b) Obtén la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}$.

c) Obtén la matriz X tal que $XA=\begin{pmatrix}1 & 0\\8 & 6\end{pmatrix}$.

Solución:

a) Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases}X+Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}\\ 2X-Y=\begin{pmatrix}0 & 5\\-7 & -3\end{pmatrix}\end{cases}$$ *Por reducción, sumando ambas ecuaciones,*

$$3X=\begin{pmatrix}3 & 6\\-3 & 0\end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3 & 6\\-3 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

Sustituyendo el valor de la matriz X *en la primera ecuación:* $\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}$

$$Y=\begin{pmatrix}3 & 1\\4 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 3\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\-1 & 0\end{pmatrix}$ *e* $Y=\begin{pmatrix}2 & -1\\5 & 3\end{pmatrix}$

b)

$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{vmatrix}=6-4=2\neq 0$, *por lo que existe* A^{-1}

Calculemos A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}$$

Finalmente $A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -2\\-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\-1 & 3/2\end{pmatrix}$

c) Buscamos una matriz $X \ / \ X \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

Como conocemos A^{-1}*, multiplicando la expresión anterior por la derecha por* A^{-1}

$X \cdot A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$*, como* $A \ A^{-1} = I$

$X \cdot I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$*, como* $X \ I = X$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+0.(-1) & 1.(-1)+0.\frac{3}{2} \\ 8.1+6.(-1) & 8.(-1)+6.\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 1. Determina las matrices X e Y que satisfacen las relaciones siguientes:

$$X + 2\,Y = A^t + B$$
$$X - Y = A\,B$$

donde A^t representa la matriz traspuesta de A y las matrices A y B son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad y \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Calculemos $C = A^t + B$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \to \quad A^t = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A^t + B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos $D = A\,B$

$$D = A\,B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4-2+12 & 2-4+4 & -2 \\ 8+3 & -4+6 & 3 \\ 4+6 & -2+2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para encontrar las matrices X e Y, debemos resolver el sistema: $\begin{cases} X + 2Y = C \\ X - Y = D \end{cases}$

Lo resolvemos por reducción.

Multiplicando la segunda ecuación por 2, $\begin{cases} X + 2Y = C \\ 2X - 2Y = 2D \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones, $3\,X = C + 2\,D \quad \to \quad X = \frac{1}{3}(C + 2D)$

Partimos del sistema inicial, cambiamos de signo la segunda ecuación: $\begin{cases} X + 2Y = C \\ -X + Y = -D \end{cases}$

Sumando las dos ecuaciones, $3\,Y = C - D \quad \to \quad Y = \frac{1}{3}(C - D)$

Calculemos las matrices X e Y:

$$X = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 & 4 & -4 \\ 22 & 4 & 6 \\ 20 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 15 & 4 & -3 \\ 21 & 9 & 7 \\ 27 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & \frac{4}{3} & -1 \\ 7 & 3 & \frac{7}{3} \\ 9 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$Y = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 10 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix} -3 & -2 & 3 \\ -12 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & 1 \\ -4 & 1 & -\frac{2}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 4/3 & -1 \\ 7 & 3 & 7/3 \\ 9 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

Por tanto, las matrices buscadas son:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & -2/3 & 1 \\ -4 & 1 & -2/3 \\ -1 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

OPCIÓN B

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 1. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. *(3 puntos)*
b) Calcula $A\,B^t - A^t\,B$. *(3 puntos)*
c) Resolver la ecuación $B^t X + A^t B = A^t$. *(4 puntos)*

siendo A^t y B^t las matrices traspuestas de A y B, respectivamente.

Solución:

a) $(A\,B)^{-1}$.

$$C = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Cálculo de C^{-1},

$$Como\quad |C| = \begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = -4+8=4\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\ C^{-1}$$

$$C=\begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -8 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ C^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Solución: $(A\,B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1/4 & -1/4 \end{pmatrix}$

b) $A\,.\,B^t - A^t\,.\,B$

$$A\cdot B^t - A^t\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución: $A\cdot B^t - A^t\cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $B^t X + A^t B = A^t$.

Despejemos X,

$B^t X = A^t - A^t B$

$$comprobemos\ que\ \exists\left(B^t\right)^{-1},\quad |B^t| = |B| = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\left(B^t\right)^{-1}$$

Multiplicando por la izquierda por $\left(B^t\right)^{-1}$,

$$\left(B^t\right)^{-1} B^t X = \left(B^t\right)^{-1}\left[A^t - A^t B\right]$$

$$X = \left(B^t\right)^{-1}\left[A^t - A^t B\right]$$

Calculo de $\left(B^t\right)^{-1}$*, sabemos que su determinante es* 2*,*

$$B^t=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \{menores\}\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \{adjuntos\}\ \begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \{traspuesta\}\ \begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

$$Luego,\ \left(B^t\right)^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

En el apartado a) ya calculamos $A^t\,B$*,*

$$A^t-A^t\,B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -3\end{pmatrix}$$

$$Y,\ X=\begin{pmatrix}1 & 1/2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -7\\ 2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & -17/2\\ -4 & 7\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}5 & -17/2\\ -4 & 7\end{pmatrix}$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^t A = A A^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $A X = B^t X - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}. \qquad (6\ puntos)$$

Solución:

a) ¿x? / $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ *sea normal.*

La matriz debe cumplir $A^t A = A A^t$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

Esta igualdad de matrices da lugar al sistema:

$$\begin{cases} 5 = 5 \quad identidad \\ 2-x = -2+x \rightarrow 2+2 = x+x \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2 \\ 2-x = -2+x \rightarrow x = 2 \\ 1+x^2 = 1+x^2 \quad identidad \quad (se\ cumple\ para\ cualquier\ valor\ de\ x) \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = 2$.

Solución: la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ ***es normal para*** $x = 2$.

b) $X / A X = B^t X - C$

Despejemos X de la ecuación matricial dada.

$A X - B^t X = -C$; $(A - B^t) X = -C$, *si existe* $(A - B^t)^{-1}$ $\rightarrow$ *multiplicando por* $(A - B^t)^{-1}$ *por la izquierda:* $(A - B^t)^{-1} (A - B^t) X = (A - B^t)^{-1} (-C) \rightarrow X = -(A - B^t)^{-1} C$

Comprobemos que existe $(A - B^t)^{-1}$,

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad como \quad |A - B^t| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists\ (A - B^t)^{-1}$$

$$A - B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Luego, \quad (A - B^t)^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente, \quad X = -\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1\cdot 1 + (-1)\cdot(-3) & -1\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) \\ 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) & 1\cdot 2 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Obtener de forma razonada la matriz X que verifica A • X = 2 B – C, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución:

Partimos de A X = 2 B – C, si existe A^{-1} podemos obtener la matriz X de la siguiente forma, multiplicando la expresión anterior por A^{-1} por la izquierda

$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,(2B - C)$

$I\,X = A^{-1}\,(2B - C)$

$X = A^{-1}\,(2B - C)$

Veamos si podemos calcular A^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \quad \textit{luego } \exists\, A^{-1}$$

Cálculo de A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Antes de calcular la matriz X, calculemos 2 B – C,

$$2B - C = 2\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 13 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -13 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix}$$

y finalmente

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{5} \\ 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 + \frac{1}{5}15 & 0.(-1) - \frac{1}{5}.0 \\ 1.8 - \frac{2}{5}15 & 1.(-1) + \frac{2}{5}.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Obtener la matriz X que verifica   A X – B = 3 X, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad y \qquad B=\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}.$$

Solución:
Despejamos la matriz X de la expresión A X – B = 3 X
A X – 3 X = B
(A – 3 I) X = B; si existe la inversa de la matriz (A – 3 I), multiplicamos por la izquierda
$(A – 3 I)^{-1}$ (A – 3 I) X = $(A – 3 I)^{-1}$ B; efectuando las operaciones,
X = $(A – 3 I)^{-1}$ B ; obteniendo la matriz X buscada.

Calculamos la matriz A – 3 I,

$$A-3I=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 3 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de la matriz A – 3 I,

$$\left|A-3I\right|=\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=0-3+4-6=-5\neq 0$$

como es distinto de cero podemos calcular $(A – 3 I)^{-1}$,

$$\begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 3 & -3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\alpha_{ij}}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & -3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 9\\ 1 & 2 & -4\\ -1 & 3 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ij}}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 9\\ -1 & 2 & 4\\ -1 & -3 & -6\end{pmatrix}\xrightarrow{A_{ji}}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 9 & 4 & -6\end{pmatrix}$$

$$(A-3I)^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & -3\\ 9 & 4 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}$$

Finalmente calculamos el valor de la matriz X,

$$X=(A-3I)^{-1}B=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{-2}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5}\\ \frac{-9}{5} & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{5}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\\ \frac{4}{5}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\\ \frac{18}{5}+\frac{4}{5}+\frac{6}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{-2}{5}\\ \frac{9}{5}\\ \frac{28}{5}\end{pmatrix}$$

$$El\ resultado\ final\ es,\quad X=\begin{pmatrix}-2/5\\ 5/9\\ 28/5\end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Calcular la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ que verifica la ecuación matricial A X B = C, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}.$$

Solución:

La ecuación matricial A X B = C podremos resolverla si existen las inversas de las matrices A y B.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$$

Calculemos A^{-1} y B^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\alpha_{ij}} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ij}} \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{ji}} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz X,

A X B = C

A^{-1} A X B B^{-1} = A^{-1} C B^{-1}

X = A^{-1} C B^{-1}

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3+2 & -2+2 \\ -6+6 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución $\quad X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 1. Determina la matriz A que verifica la ecuación A B + A = 2 B^t, donde
$B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y B^t representa la matriz traspuesta de B.

Solución:

$A\,B + A = 2\,B^t$

$A\,(B + I) = 2\,B^t$

Si existe $(B + I)^{-1}$ *entonces* $A = 2\,B^t\,(B + I)^{-1}$

$$B+I=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=12\neq 0 \quad luego\ \exists\,(B+I)^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa de (B + I)

$$B+I=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\overset{\alpha_{ij}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 4\end{pmatrix}\overset{A_{ij}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3 & 0\\ 1 & 4\end{pmatrix}\overset{A_{ji}}{\rightarrow}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}\rightarrow (B+I)^{-1}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$Como\quad B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\quad luego,\quad B^t=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

Finalmente, calculemos la matriz A, $A = 2\,B^t\,(B + I)^{-1}$

$$A=2\begin{pmatrix}3 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{12}\\ 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}3\,\frac{1}{4}-0\,.\,0 & 3\,\frac{1}{12}-0\,.\,\frac{1}{3}\\ \frac{-1}{4}+2\,.\,0 & \frac{-1}{12}+2\,\frac{1}{3}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{12}\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12}+\frac{2}{3}\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{12}\\ \frac{-1}{4} & \frac{-1}{12}+\frac{8}{12}\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}\frac{3}{4} & \frac{3}{12}\\ \frac{-1}{4} & \frac{7}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{6}{4} & \frac{6}{12}\\ \frac{-2}{4} & \frac{14}{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

$$Luego,\ A=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{7}{6}\end{pmatrix}$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 1. Dada la matriz A = $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Halla su inversa.

b) Resuelve la ecuación $X\,A^2 + 5\,A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$.

Solución:

a) Cálculo de A^{-1}

La obtendremos por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) F_2 - 4xF_1 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right) F_1 + \frac{3}{10}F_2 \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/10 & 3/10 \\ 0 & -10 & -4 & 1 \end{array}\right) F_2/(-10)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/10 & 3/10 \\ 0 & 1 & 4/10 & -1/10 \end{array}\right)$$

Cálculos auxiliares	
$F_2 - 4\ F_1$	$F_1 + \frac{3}{10}\ F_2$
$4 - 4\ 1 = 0$	$1 + \frac{3}{10}\ 0 = 1$
$2 - 4\ 3 = -10$	$3 + \frac{3}{10}\ (-10) = 0$
$0 - 4\ 1 = -4$	$1 + \frac{3}{10}\ (-4) = 1 - \frac{12}{10} = \frac{-2}{10}$
$1 - 4\ 0 = 1$	$0 + \frac{3}{10}\ 1 = \frac{3}{10}$

Luego $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix}$

b)

Sea $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix}$

La ecuación a resolver es $X\,A^2 + 5\,A = B$, *multiplicando por A^{-1} por la izquierda,*

$X\,A\,A\,A^{-1} + 5\,A\,A^{-1} = B\,A^{-1}$, *como $A\,A^{-1} = I$,*

$X\,A\,I + 5\,I = B\,A^{-1}$

$X\,A + 5\,I = B\,A^{-1}$, *despejamos $X\,A$*

$X\,A = B\,A^{-1} - 5\,I$, *multiplicando por A^{-1} por la izquierda,*

$X\,A\,A^{-1} = (\,B\,A^{-1} - 5\,I\,)\,A^{-1}$, *y finalmente*

$X = (\,B\,A^{-1} - 5\,I\,)\,A^{-1}$

Procedamos al cálculo de la matriz X

$$B\ A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & -20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{-12}{10} + \dfrac{32}{10} & \dfrac{18}{10} - \dfrac{8}{10} \\ \dfrac{-20}{10} - \dfrac{80}{10} & \dfrac{30}{10} + \dfrac{20}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B\ A^{-1} - 5I = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -10 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B\ A^{-1} - 5I\right) A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -10 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2/10 & 3/10 \\ 4/10 & -1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6}{10} + \dfrac{4}{10} & \dfrac{-9}{10} - \dfrac{1}{10} \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución $\quad X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

BLOQUE A

PROBLEMA A1. Obtén todas las matrices columna $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ que sean soluciones de la ecuación matricial $A\,X = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¿Cuáles de esas matrices X tienen la primera fila nula?

Solución:

La ecuación matricial a resolver es $A\,X = B$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ecuación matricial que da lugar la siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = -1 \\ x + 2y \quad = 0 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por el método de Gauss,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{c} \\ \\ F_3 - F_1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Como $F_3 = F_2$, podemos eliminar F_3, ya que es la misma ecuación que F_2. Nos quedamos con las dos primeras filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Por debajo de la diagonal principal tenemos los ceros, pero en la diagonal principal quedan dos elementos no nulos. El sistema tenía tres incógnitas por lo que es Compatible Indeterminado.

Para resolverlo utilizamos x e y como incógnitas principales.

De la última matriz nos queda el sistema,

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad y - z = -1 \end{cases}$$

pasamos la incógnita z a la derecha,

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ \quad y = -1 + z \end{cases}$$

sustituyendo el valor de y en la 1^a ecuación,

$x + (- 1 + z) = 1 - z$, efectuando operaciones

$x - 1 + z = 1 - z$, despejamos x

$x = 1 - z + 1 - z$

$x = 2 - 2z$

La solución del sistema será,

$$\begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

En forma matricial, la solución será: $X = \begin{pmatrix} 2-2\lambda \\ -1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \qquad \lambda \in \Re$

De estas matrices solución, aquella que tiene la primera fila nula será:

$$2 - 2\lambda = 0$$

$$2 = 2\lambda$$

$$\lambda = 1$$

Sustituyendo este valor en la matriz solución,

$$\begin{pmatrix} 2-2.1 \\ -1+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

que es la matriz solución que tiene la primera fila nula.

OPCIÓN B

PROBLEMA 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}\quad y\quad D=\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 3\end{pmatrix}$$

a) Calcula $A\,B + 3\,C$

b) Determina la matriz X que verifica $A\,X + I = D$, donde I es la matriz identidad.

Solución:

a)

$$AB+3C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 7\\ -2 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -3\\ 3 & -6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

b) $A\,X + I = D$

$A\,X = D - I$, *si conocemos* A^{-1},

$A^{-1}\,A\,X = A^{-1}\,(D - I)$

$X = A^{-1}\,(D - I)$

Cálculo de la matriz inversa de A,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\qquad |\,A\,|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12-2=10\neq 0\quad\Rightarrow\quad\exists\, A^{-1}$$

Calculemos la matriz inversa de A:

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}\text{cálculo de menores}:\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{adjuntos}:\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}\quad\text{traspuesta}:\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

Y finalmente:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}$$

Luego,

$$X=A^{-1}(D-I)=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}8 & 8\\ 8 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}\frac{4}{10} & \frac{-1}{10}\\ \frac{-2}{10} & \frac{3}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & 8\\ 8 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\frac{20}{10} & \frac{30}{10}\\ \frac{10}{10} & \frac{-10}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

OPCIÓN A

Problema 1. Plantea y escribe el sistema de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y cuyo término independiente es $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Resuelve el sistema.

Solución:

El sistema será: $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Efectuando el producto matricial, $\begin{pmatrix} 2x+3y-z \\ -4x+2y+z \\ 2x+2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Y, finalmente, el sistema es: $\begin{cases} 2x+3y-z=3 \\ -4x+2y+z=0 \\ 2x+2y-z=1 \end{cases}$

Resolvamos el sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2+2xF_1 \\ F_3-F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 8 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

Esta preparado para resolver,

de $F_3 \rightarrow -y=-2 \rightarrow y=2$

de $F_2 \rightarrow 8y-z=6$*, sustituyendo el valor obtenido de* y

$8 \cdot 2-z=6;\quad 16-z=6;\quad 16-6=z;\quad z=10$

de $F_1 \rightarrow 2x+3y-z=3$*, sustituyendo los valores obtenidos de* z *e* y

$2x+3\cdot 2-10=3;\quad 2x+6-10=3;\quad 2x-4=3;\quad 2x=3+4;\quad 2x=7;\quad x=\dfrac{7}{2}$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x=\dfrac{7}{2} \\ y=2 \\ z=10 \end{cases}$

* * *

Resolvamos el sistema por el método de Cramer.
Calculemos el determinante de la matriz de coeficientes,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -4+8+6+4-12-4 = 18-20 = -2 \neq 0$$

Aplicando la regla de Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-6+3+2-6}{-2} = \frac{5-12}{-2} = \frac{-7}{-2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4+6-2-12}{-2} = \frac{10-14}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{4-24-12+12}{-2} = \frac{-20}{-2} = 10$$

La solución del sistema es: $\begin{cases} x = \dfrac{7}{2} \\ y = 2 \\ z = 10 \end{cases}$

Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II Septiembre 2020

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 4. Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1- \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, se pide:

a) Calcula $(AB)^{-1}$. *(4 puntos)*
b) Calcula $C + A\,B$. *(2 puntos)*
c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$ y $(C + A\,B)^{-1}$? *(4 puntos)*

Solución:

a) $(AB)^{-1}$.

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot(-1) & 1\cdot 0+2\cdot 2+3\cdot(-1) \\ 2\cdot(-1)+1\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 0+1\cdot 2+1\cdot(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Como \quad |AB|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=0-(-1)=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\ (AB)^{-1}$$

Cálculo de $(AB)^{-1}$

$$AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ (AB)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) ¿C + AB?

$$C+AB=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=I$$

***Solución:* $C + AB = I$**

c) ¿Son iguales las matrices $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$ *y* $(C + A\,B)^{-1}$*?*

En el apartado anterior hemos obtenido que $C + A\,B = I$, *por tanto* $(C + A\,B)^{-1} = I^{-1} = I$

Calculemos $C^{-1} + (A\,B)^{-1}$

Cálculo de C^{-1}

$$Como \quad |C|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=0-(-1)=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad \exists\ C^{-1}$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \{menores\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{adjuntos\} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \{traspuesta\} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Luego,\ C^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} + (A\,B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que $C^{-1} + (A\ B)^{-1} = I = (C + A\ B)^{-1}$*. Por lo que,* ***las dos matrices dadas son iguales***.