	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real *a*:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+az=-a \\ x+2y+3z=-2 \\ ax+ay+2z=-8 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro *a*.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para *a = –10*.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ \ x<1 \\ e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

y se pide:
a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f* en *x = 1*.
b) (0.75 puntos) Calcular $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Los vértices de un triángulo son A(–1,0, 1), B(0,1,0) y un punto C situado sobre la recta

$$r\equiv\begin{cases} 2x-y=0 \\ x+z=-1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de *C* sabiendo que el área del triángulo es $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por P(2,1,–1) y es paralela a la recta dada *r*.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que $P(A\cup B\cup C)=1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A)=0.5$, $P(\overline{C})=0.3$, $P(B\cup C)=0.73$, $P(A\cap C)=0.21$ y $P(A\cap B\cap C)=0.06$, se pide:
a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B\cup C$ son independientes.
b) (1.5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C\cap(A\cup B))$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

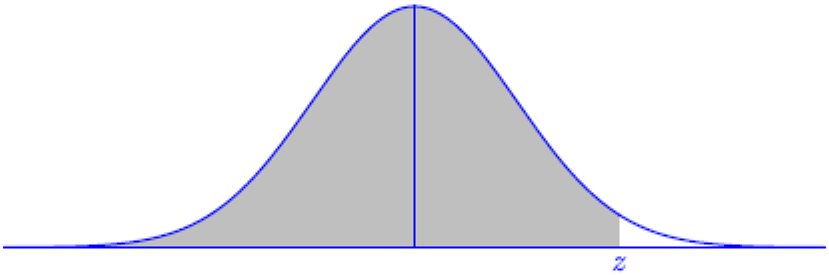
B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) (0.5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$
b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto (0, 0) y un mínimo relativo en el punto $(1,-1)$.
c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta *r* con el vector normal al plano $z=0$.
b) (1.25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta *r*. Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto P(1,1,3) y que π_2 no corta el eje OZ.
c) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta *r* y la recta *s* de ecuación $\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z-1}{3}$.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30% son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:
a) (1.5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable "*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*". Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.
b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $\mathrm{N}(0,1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependientes de un parámetro real a:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-y+az=-a \\ x+2y+3z=-2 \\ ax+ay+2z=-8 \end{array}\right\}$$

a) (2 puntos) Discuta el sistema en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resuelva el sistema para $a = -10$.

a) Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & a & -a \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ a & a & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 2 & 3 \\ a & a & 2 \end{vmatrix}=8-3a+a^2-2a^2+2-6a=-a^2-9a+10$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2-9a+10=0 \Rightarrow a=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-4\cdot(-1)(10)}}{2(-1)}=\frac{9\pm 11}{-2}=\begin{cases} \dfrac{9+11}{-2}=\boxed{-10=a} \\ \dfrac{9-11}{-2}=\boxed{1=a} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1$ **y** $a \neq -10$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 2 & -8 \\ -1 & -2 & -3 & 2 \\ \hline 0 & -1 & -1 & -6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2\cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & -6 & 4 \\ \hline 0 & -5 & -5 & 3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 5\cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -5 & -5 & 3 \\ 0 & 5 & 5 & 30 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 33 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & -5 & 3 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 33 \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $a = -10$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -10 & -10 & 2 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 5\cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -10 & -10 & 2 & -8 \\ 10 & -5 & -50 & 50 \\ \hline 0 & -15 & -48 & 42 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2\cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -10 & 10 \\ -2 & -4 & -6 & 4 \\ \hline 0 & -5 & -16 & 14 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ 0 & -15 & -48 & 42 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - 3\cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -15 & -48 & 42 \\ 0 & 15 & 48 & -42 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq 1$ **y** $a \neq -10$ el sistema es **compatible determinado**, para $a = -10$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $a = 1$ el sistema es **incompatible**.

a) Si $a=-10$ el sistema es compatible indeterminado (CASO 3).
Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -10 & 10 \\ 0 & -5 & -16 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-y-10z=10 \\ -5y-16z=14 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x-y-10z=10 \\ -5y=14+16z \to y=\dfrac{-14}{5}-\dfrac{16}{5}z \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+\frac{14}{5}+\frac{16}{5}z-10z=10 \Rightarrow 10x+14+16z-50z=50 \Rightarrow 10x-34z=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-17z=18 \Rightarrow 5x=18+17z \Rightarrow x=\frac{18}{5}+\frac{17}{5}z \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{5}+\dfrac{17}{5}\lambda \\ y=\dfrac{-14}{5}-\dfrac{16}{5}\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ z=\lambda \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{18}{5}+\dfrac{17}{5} \\ y=\dfrac{-14}{5}-\dfrac{16}{5} \Rightarrow \\ z=1 \end{cases} \begin{cases} x=7 \\ y=-6 \Rightarrow \{\lambda=5\alpha\} \Rightarrow \\ z=1 \end{cases} \begin{cases} x=7+17\alpha \\ y=-6-16\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z=1+5\alpha \end{cases}$$

Las soluciones del sistema son $x=7+17\alpha;\ y=-6-16\alpha;\ z=1+5\alpha;$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se considera la función

$$f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ \ x<1 \\ e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1} & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

y se pide:
a) (1 punto) Estudiar la continuidad y derivabilidad de *f* en *x = 1*.
b) (0.75 puntos) Calcular $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
c) (0.75 puntos) Calcular $\int_0^1 f(x)\,dx$.

a) Para que la función sea continua en *x = 1* deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(1)=e+\dfrac{1\cdot\ln 1}{1^2+1}=e$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} xe^x=1\cdot e^1=e$
- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} e+\dfrac{x\ln x}{x^2+1}=e$
- Los tres valores son iguales: $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=e$

La función es continua en *x = 1*.
Para que la función sea derivable en *x = 1* deben coincidir las derivadas laterales.
La derivada de la función en $\mathbb{R}-\{1\}$ es

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+xe^x & si\ \ x<1 \\ \dfrac{\left(\ln x+x\dfrac{1}{x}\right)(x^2+1)-2x(x\ln x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{(1+\ln x)(x^2+1)-2x^2\ln x}{(x^2+1)^2} & si\ \ x>1 \end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} f'(x)=\lim_{x\to 1^-} e^x+xe^x=e^1+e^1=2e$$

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+} f'(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(1+\ln x)(x^2+1)-2x^2\ln x}{(x^2+1)^2}=\frac{(1+\ln 1)(1^2+1)-2\cdot 1^2\ln 1}{(1^2+1)^2}=\frac{1}{2}$$

Tenemos que $f'(1^-)=2e\neq\dfrac{1}{2}=f'(1^+)$. La función no es derivable en *x = 1*.

b) Calculamos el limite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e+\frac{x\ln x}{x^2+1}=e+\lim_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x^2+1}=e+\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$= e + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + x\frac{1}{x}}{2x} = e + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x + 1}{2x} = e + \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} =$$

$$= e + \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2} = e + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = e + \frac{1}{\infty} = \boxed{e}$$

c) La función en el intervalo (0, 1) tiene la expresión $f(x) = xe^x$.

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int f(x)dx = \int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_0^1 = \left[e^1 - e^1 \right] - \left[0\cdot e^0 - e^0 \right] = 1$$

Hemos obtenido que $\int_0^1 f(x)dx = 1$.

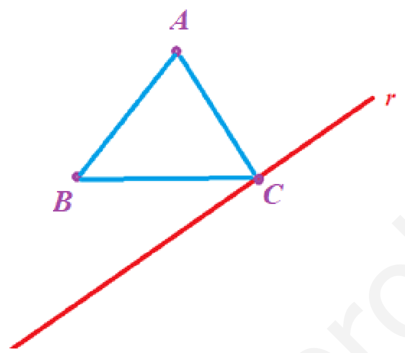
A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Los vértices de un triángulo son A(–1,0, 1), B(0,1,0) y un punto C situado sobre la recta

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases}$$

a) (1.5 puntos) Calcule las posibles coordenadas de *C* sabiendo que el área del triángulo es $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) (1 punto) Determine una ecuación de la recta que pasa por P(2,1,–1) y es paralela a la recta dada *r*.

a) La situación planteada es la del dibujo.



Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ z = -1 - x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -1 - \alpha \end{cases}$$

El punto C que pertenece a la recta *r* tendrá coordenadas $C(\alpha, 2\alpha, -1-\alpha)$.

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (0,1,0) - (-1,0,1) = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (\alpha, 2\alpha, -1-\alpha) - (-1,0,1) = (\alpha+1, 2\alpha, -2-\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ \alpha+1 & 2\alpha & -2-\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= i(-2-\alpha+2\alpha) + j(2+\alpha-\alpha-1) + k(2\alpha-\alpha-1) = (\alpha-2, 1, \alpha-1)$$

$$Área\ \ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(\alpha-2)^2 + 1^2 + (\alpha-1)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4 - 4\alpha + 1 + \alpha^2 + 1 - 2\alpha}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2\alpha^2 - 6\alpha + 6}}{2}$$

Como el área debe valer $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hallamos el valor de α para que se cumpla.

$$\left.\begin{array}{l} \acute{A}rea\ \ ABC=\dfrac{\sqrt{2\alpha^2-6\alpha+6}}{2} \\ \acute{A}rea\ \ ABC=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\sqrt{2\alpha^2-6\alpha+6}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow\sqrt{2\alpha^2-6\alpha+6}=\sqrt{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha^2-6\alpha+6=2\Rightarrow 2\alpha^2-6\alpha+4=0\Rightarrow\alpha^2-3\alpha+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\dfrac{3+1}{2}=\boxed{2=\alpha}\\ \dfrac{3-1}{2}=\boxed{1=\alpha}\end{cases}$$

Existen dos puntos de la recta *r* que cumplen lo pedido.

Si $\alpha=1$ el punto es $C(1,2,-2)$.

Si $\alpha=2$ el punto es $C(2,4,-3)$.

b) La recta *s* paralela a la recta *r* tiene el mismo vector director.

$$r\equiv\begin{cases}x=\alpha\\ y=2\alpha\\ z=-1-\alpha\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(1,2,-1)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s* que pasa por P(2,1,–1) y es paralela a la recta dada *r*.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,2,-1)\\ P(2,1,-1)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=2+\lambda\\ y=1+2\lambda;\ \ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-1-\lambda\end{cases}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un espacio muestral se consideran tres sucesos A, B y C, tales que $P(A\cup B\cup C)=1$. Sabiendo que los sucesos B y C son independientes y que $P(A)=0.5$, $P(\overline{C})=0.3$, $P(B\cup C)=0.73$, $P(A\cap C)=0.21$ y $P(A\cap B\cap C)=0.06$, se pide:
a) (1 punto) Estudiar si los sucesos A y $B\cup C$ son independientes.
b) (1.5 puntos) Calcular $P(B)$ y $P(C\cap(A\cup B))$.

a) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B\cup C)=1\Rightarrow P(A\cup(B\cup C))=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A)+P(B\cup C)-P(A\cap(B\cup C))=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.5+0.73-P(A\cap(B\cup C))=1\Rightarrow P(A\cap(B\cup C))=1.23-1=0.23$$

Para que los sucesos A y $B\cup C$ sean independientes se debe cumplir $P(A\cap(B\cup C))=P(A)P(B\cup C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)P(B\cup C)=0.5\cdot 0.73=0.365 \\ P(A\cap(B\cup C))=0.23 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A)P(B\cup C)=0.365\neq 0.23=P(A\cap(B\cup C))$$

Los sucesos A y $B\cup C$ no son independientes.

b) Sabemos que $P(A)=0.5$, $P(C)=1-P(\overline{C})=1-0.3=0.7$.

B y C son independientes, lo que implica que $P(B\cap C)=P(B)P(C)=0.7\cdot P(B)$.

Como $P(B\cup C)=0.73$ tenemos:

$$P(B\cup C)=0.73\Rightarrow P(B)+P(C)-P(B\cap C)=0.73\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(B)+0.7-0.7P(B)=0.73\Rightarrow 0.3P(B)=0.03\Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{0.03}{0.3}=0.1}$$

Calculamos $P(C\cap(A\cup B))$.

$$P(C\cap(A\cup B))=P(C\cap A)+P(C\cap B)-P(C\cap A\cap B)=$$

$$=0.21+0.7\cdot 0.1-0.06=0.22$$

Hemos visto que $P(B)=0.1$ y que $P(C\cap(A\cup B))=0.22$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Halle un número natural de tres cifras del que se conoce que: sus cifras suman 13; si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437; además, la cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras.

Llamamos "x" a la cifra de las centenas, "y" a la cifra de las decenas y "z" a la cifra de las unidades.
El número es *xyz*, por lo que $xyz = 100x + 10y + z$.
Sus cifras suman 13 → $x + y + z = 13$.
Si al número dado se le resta el doble del número que resulta de intercambiar las cifras de las centenas y de las unidades, el resultado es 437 →
$xyz - 2 \cdot zyx = 437 \Rightarrow (100x + 10y + z) - 2(100z + 10y + x) = 437$.
La cifra de las decenas excede en una unidad a la media aritmética de las otras dos cifras →
$y = \dfrac{x+z}{2} + 1$.
Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ (100x+10y+z)-2(100z+10y+x)=437 \\ y=\dfrac{x+z}{2}+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=13 \\ 100x+10y+z-200z-20y-2x=437 \\ 2y=x+z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=13-y-z \\ 98x-10y-199z=437 \\ 2y=x+z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 98(13-y-z)-10y-199z=437 \\ 2y=13-y-z+z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 1274-98y-98z-10y-199z=437 \\ 3y=15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -108y-297z=-837 \\ \boxed{y=\dfrac{15}{3}=5} \end{array}\right\} \Rightarrow -108 \cdot 5 - 297z = -837 \Rightarrow -297z = -297 \Rightarrow \boxed{z=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 13-5-1 = 7}$$

El número de tres cifras que cumple todo lo pedido es el 751.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (0.5 puntos) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$. Escriba también un ejemplo de una función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x = 0$

b) (1 punto) Escriba un ejemplo de una función polinómica de grado 3 que tenga un máximo relativo en el punto (0, 0) y un mínimo relativo en el punto $(1,-1)$.

c) (1 punto) Justifique si la gráfica de una función polinómica de grado 3 puede no cortar al eje de las abscisas.

a) Una función polinómica cuya gráfica corta al eje de las abscisas en $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ es la función $f(x)=(x-0)(x-1)(x-2)=x(x-1)(x-2)=x(x^2-2x-x+2)=x^3-3x^2+2x$.

Un ejemplo de función polinómica de grado 3 cuya gráfica corte al eje de las abscisas solo en los puntos $x = 1$ y $x=0$ puede ser $f(x)=(x-0)^2(x-1)=x^2(x-1)=x^3-x^2$.

b) La función polinómica de grado 3 tiene la expresión $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Como tiene un máximo relativo en el punto (0, 0) se cumple que $f(0)=0$, $f'(0)=0$ y que $f''(0)<0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \\ f(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{d=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=c}$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6ax+2b \\ f''(0)<0 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b<0 \Rightarrow \boxed{b<0}$$

La función queda $f(x)=ax^3+bx^2$. Como tiene un mínimo relativo en el punto $(1,-1)$ se debe cumplir que $f(1)=-1$, $f'(1)=0$ y que $f''(1)>0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^3+bx^2 \\ f(1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b=-1$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3ax^2+2bx \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a+2b=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6ax+2b \\ f''(1)>0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6a+2b>0 \Rightarrow \boxed{3a+b>0}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} a+b=-1 \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a=-1-b \\ 3a+2b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1-b)+2b=0 \Rightarrow -3-3b+2b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{b=-3} \Rightarrow \boxed{a=-1+3=2}$$

Se cumple que $3a+b=6-3=3>0$.

La función buscada es $f(x)=2x^3-3x^2$.

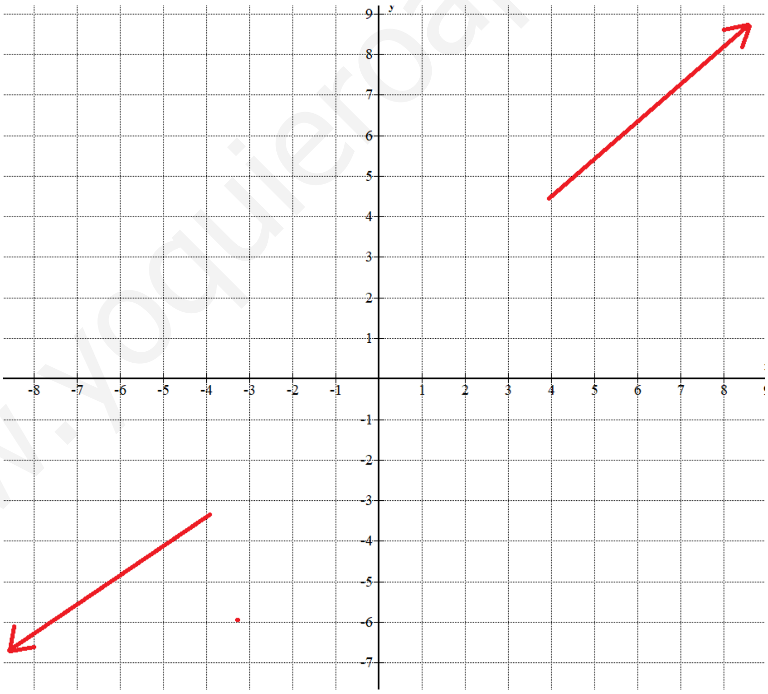
c) Una función polinómica de grado 3 es del tipo $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

Supongamos *a* > *0*, calculamos los límites de la función cuando *x* tiende a +∞ y cuando *x* tiende a –∞.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^3+bx^2+cx+d = \lim_{x\to-\infty} ax^3 = \{a>0\} = a\cdot(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ax^3+bx^2+cx+d = \lim_{x\to+\infty} ax^3 = \{a>0\} = a\cdot(+\infty) = +\infty$$

La función es continua y por tanto debe cortar el eje de abscisas al menos en un punto de dicho eje.



Se puede razonar de forma similar si *a* < *0*.

Conclusión: Toda función polinómica de grado 3 debe cortar el eje en 1, 2 o 3 puntos.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=2 \end{cases}$

a) (0.5 puntos) Calcule el ángulo que forma la recta *r* con el vector normal al plano $z=0$.

b) (1.25 puntos) Sean π_1 y π_2 dos planos que se cortan en la recta *r*. Calcule unas ecuaciones de ambos planos sabiendo que π_1 pasa por el punto P(1,2,3) y que π_2 no corta el eje OZ.

c) (0.75 puntos) Estudie la posición relativa de la recta *r* y la recta *s* de ecuación $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3}$.

a) Hallamos un vector director de la recta y un vector normal al plano.

$$z=0 \Rightarrow \vec{n}=(0,0,1)$$

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z=2 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-2y-z \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow 2-2y-z+y+2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y+z=0 \Rightarrow z=y \Rightarrow x=2-2y-y=2-3y \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(-3,1,1) \\ P_r(2,0,0) \end{cases}$$

Hallamos el ángulo formado entre estos vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(0,0,1) \\ \vec{v_r}=(-3,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{v_r}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_r}\right|}=\frac{(0,0,1)(-3,1,1)}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}\sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)=72.4^{\circ}$$

El ángulo que forma la recta *r* con el vector normal al plano $z=0$ es de 72.4º.

b) El plano π_1 contiene a la recta *r* y pasa por el punto P(1,2,3).

$$r \equiv \begin{cases} x=2-3\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(-3,1,1) \\ P_r(2,0,0) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v_r}=(-3,1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rP}=(1,2,3)-(2,0,0)=(-1,2,3) \\ P_r(2,0,0)\in\pi_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x-6-y-6z+z+9y-2x+4=0 \Rightarrow \boxed{\pi_1 \equiv x+8y-5z-2=0}$$

El plano π_1 tiene ecuación $\pi_1 \equiv x+8y-5z-2=0$.

El plano π_2 contiene a la recta *r* y no corta el eje OZ. Para no cortar el eje OZ debe ser paralelo a él, por lo que el vector director del eje OZ es un vector director del plano.

Como el eje OZ es la recta con las ecuaciones implícitas $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\}$ ningún punto del plano debe tener de forma simultánea estas dos coordenadas nulas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v_r}=(-3,1,1) \\ eje\,OZ \rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=(0,0,1) \\ P_r(2,0,0)\in\pi_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2+3y=0 \Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv x+3y-2=0}$$

El plano π_2 tiene ecuación $\pi_2 \equiv x+3y-2=0$.

c) Hallamos un punto y un vector director de la recta *s*.

$$s \equiv \frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s}=(1,-2,3) \\ Q_s(-2,1,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de ambas rectas no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(-3,1,1) \\ \vec{u_s}=(1,-2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3}{1} \neq \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{3}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(-2,1,1)-(2,0,0)=(-4,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}=(-3,1,1) \\ \vec{u_s}=(1,-2,3) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(-4,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=6-12+1-8-1+9=-5\neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Entre los procesadores que utiliza cierta marca de ordenadores portátiles para un modelo, un 30% son de una nueva tecnología que promete una mayor efectividad. Se utilizan todos los procesadores, se empaquetan los ordenadores fabricados en palés de 10 portátiles y se envían 20 palés a cada una de sus tiendas. Se pide:

a) (1.5 puntos) Determinar la distribución, la media y la desviación típica de la variable "*número de portátiles con los procesadores de la nueva tecnología en un palé*". Calcular la probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología.

b) (1 punto) Calcular, aproximando por la distribución normal adecuada, la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología.

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de portátiles con procesadores de nueva tecnología.
Esta variable es binomial pues el procesador que lleva cada portátil es independiente del que lleva otro portátil y solo hay dos posibilidades "lleva procesador de nueva tecnología" o no lo lleva.
Los parámetros de esta binomial es Número de repeticiones = n = 10 y probabilidad de que un portátil lleve un procesador de nueva tecnología es p = 0.3.
X = B(10, 0.3)

La media es $np = 10 \cdot 0.3 = 3$ portátiles.

La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{10 \cdot 0.3 \cdot 0.7} = \frac{\sqrt{210}}{10} \simeq 1.45$ portátiles.

Nos piden calcular $P(X = 2)$.

$$P(X = 2) = \binom{10}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} 0.3^2 \cdot 0.7^8 = \frac{10 \cdot 9}{2} 0.3^2 \cdot 0.7^8 \simeq \boxed{0.2335}$$

La probabilidad de que en un palé haya exactamente dos portátiles con la nueva tecnología tiene un valor aproximado de 0.2335.

b) Cada tienda recibe 20 · 10 = 200 portátiles.
Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de portátiles que no llevan procesadores de nueva tecnología. La probabilidad de no llevar un procesador de nueva tecnología es p = 0.7.
La nueva variable es X = B(200, 0.7).
Como el número de repeticiones es muy alto el cálculo de la probabilidad pedida la hallamos aproximando esta variable binomial a una normal Y de media $\mu = np = 200 \cdot 0.7 = 140$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.7 \cdot 0.3} = \sqrt{42} \simeq 6.48$.
Nos piden calcular la probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología, como 0.75 · 200 = 150, nos piden calcular $P(X \geq 150)$.

$$P(X \geq 150) = \{Corrección\,de\,Yates\} = P(Y \geq 149.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{149.5-140}{\sqrt{42}}\right) = P(Z \geq 1.47) = 1 - P(Z \leq 1.47) = 1 - 0.9292 = \boxed{0.0708}$$

La probabilidad de que al menos el 75% de los portátiles recibidos en una tienda no lleven los procesadores de la nueva tecnología es de 0.0708.