UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:

a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x=5$.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y=x$ en el punto (0, 0).

b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1, 1).

c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los puntos P(1,−1, 3) y Q(2, 1,−1):

a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3=\overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1)=P(B|A_2)$ y $P(B|A_3)=2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2)=0.3$ y $P(C|A_3)=0.6$. Con estos datos se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1)=0.25$.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$det(A+B)=detA+detB$$

no es cierta en general.

a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B)=detA+detB$, pruebe que entonces

$$\det\left((A+B)^2\right)=\det\left(A^2\right)+\det\left(B^2\right)+2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \alpha & 1 & 0\\ 2 & -1 & \alpha\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $det(C+D)=detC+detD$

c) (0.75 puntos) Para el valor α = −1, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=x^3-3x$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de *f(x)* y de $g(x)=x(x-3)$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{1},\qquad s\equiv\begin{cases}x-y=5\\ x+z=3\end{cases}$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

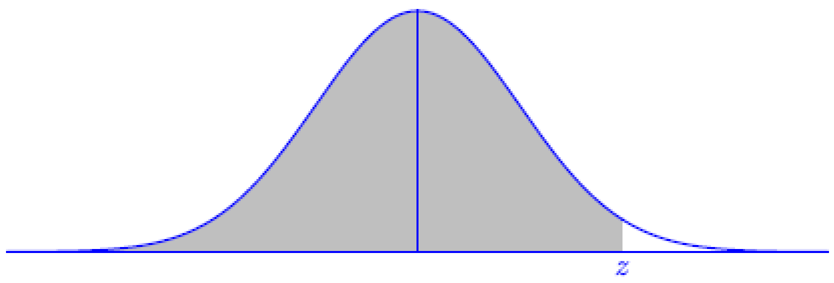
b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta *r*.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Distribución Normal



Ejemplo: si Z tiene distribución $N(0, 1)$, $P(Z < 0{,}45) = 0{,}6736$.

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro λ,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1.5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de λ.
b) (1 punto) Resolver el sistema en el caso λ = 1 y encontrar, si es posible, una solución con $x=5$.

a) El sistema queda

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = 0+\cancel{1}+(\lambda-1)^2-\cancel{1}-\lambda+1+0=$$

$$=\lambda^2+1-2\lambda-\lambda+1=\lambda^2-3\lambda+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow \lambda^2-3\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\cdot(1)(2)}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=\boxed{2=\lambda} \\ \frac{3-1}{2}=\boxed{1=\lambda} \end{cases}$$

Estudiamos tres casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq 2$ **y** $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&2\\1&1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&0\\-1&-1&-1&-2\\ \hline 0&0&0&-2\end{array}\to\text{Nueva Fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&1&1&2\\0&0&0&-2\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{Fila\,2^{\text{a}}\leftrightarrow Fila\,1^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&1&2\\0&1&1&1\\ \underbrace{0\quad 0\quad 0}_{A}&&&-2\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. $\lambda=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 2}^{\text{a}}-\text{Fila 1}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}0&1&1&1\\0&-1&-1&-1\\ \hline 0&0&0&0\end{array}\to\text{Nueva Fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&0&0\\1&0&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{Fila\,2^{\text{a}}\leftrightarrow Fila\,3^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{Fila\,2^{\text{a}}\leftrightarrow Fila\,1^{\text{a}}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}1&0&1&0\\0&1&1&1\\ \underbrace{0\quad 0\quad 0}_{A}&&&0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 al igual que el de la matriz A/B, menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $\lambda\neq 2$ y $\lambda\neq 1$ el sistema es **compatible determinado**, para $\lambda=1$ el sistema es **compatible indeterminado** y para $\lambda=2$ el sistema es **incompatible**.

b) Si $\lambda=1$ el sistema es compatible indeterminado.
Buscamos las soluciones a partir del sistema equivalente obtenido en el apartado anterior.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+z=0 \\ y+z=1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-z \\ y=1-z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-\lambda \\ y=1-\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son $x=-\lambda;\ y=1-\lambda;\ z=\lambda,$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Buscamos una posible solución con $x=5$.

$$\begin{cases} x=-\lambda=5 \rightarrow \lambda=-5 \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=6 \\ z=-5 \end{cases}$$

La solución del sistema es *x = 5; y = 6; z = –5.*

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
a) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y=x$ en el punto (0, 0).
b) (1 punto) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto (1, 1).
c) (0.5 puntos) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en $\mathbb{R}$.

a) La función pedida tiene la expresión $f(x)=ax^2+bx+c$.
Si la recta $y=x$ es tangente a la gráfica de la función en el punto (0, 0) implica que la función pasa por (0, 0), es decir, $f(0)=0$ y que la pendiente de la recta tangente vale 1, es decir, $f'(0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(x)=ax^2+bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c \Rightarrow \boxed{c=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \\ f'(0)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2a\cdot 0+b \Rightarrow \boxed{b=1}$$

La función polinómica que cumple lo pedido tiene la expresión $f(x)=ax^2+x$.
Tomamos *a* = *1* y tenemos la función $f(x)=x^2+x$ como ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y=x$ en el punto (0, 0).

b) La función pedida tiene la expresión $f(x)=ax^2+bx+c$.
Si la función tiene un máximo relativo en (1, 1) implica que la función pasa por (1, 1), es decir, $f(1)=1$, que la derivada se anula en *x* = *1*, es decir, $f'(1)=0$ .y que la segunda derivada toma valor negativo en *x* = *1*, es decir $f''(1)<0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1 \\ f(x)=ax^2+bx+c \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{1=a+b+c}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax^2+bx+c \Rightarrow f'(x)=2ax+b \\ f'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=2a+b}$$

$$f'(x)=2ax+b \Rightarrow f''(x)=2a \Rightarrow f''(1)=2a<0 \Rightarrow \boxed{a<0}$$

Deben cumplirse las tres condiciones.

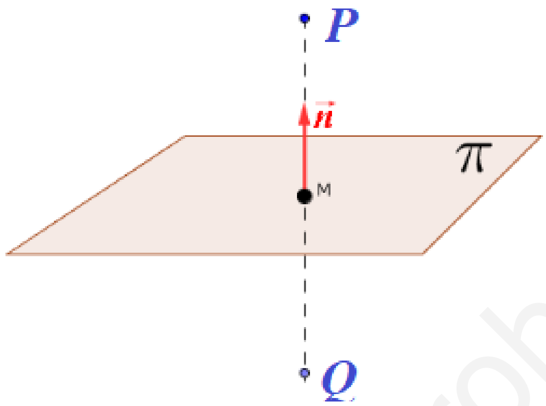
$$\left.\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ 2a+b=0 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ b=-2a \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2a+c=1 \Rightarrow -a+c=1 \Rightarrow c=1+a$$

La función queda $f(x) = ax^2 - 2ax + 1 + a$. Tomamos $a = -1 < 0$ y tenemos a la función $f(x) = -x^2 + 2x$ como ejemplo de función polinómica de grado 2 que tiene un máximo relativo en el punto (1, 1).

c) Una función polinómica de grado 2 tiene la expresión $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su derivada es $f'(x) = 2ax + b$ que se anula para un único valor de *x*. Solo puede tener un punto crítico y por tanto un único máximo o mínimo relativo.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean los puntos P(1,−1, 3) y Q(2, 1,−1):
a) (1 punto) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.
b) (1.5 puntos) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la recta $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

a) El plano debe pasar por el punto medio M del segmento PQ.



$$M=\frac{(1,-1,3)+(2,1,-1)}{2}=(3/2,0,1)$$

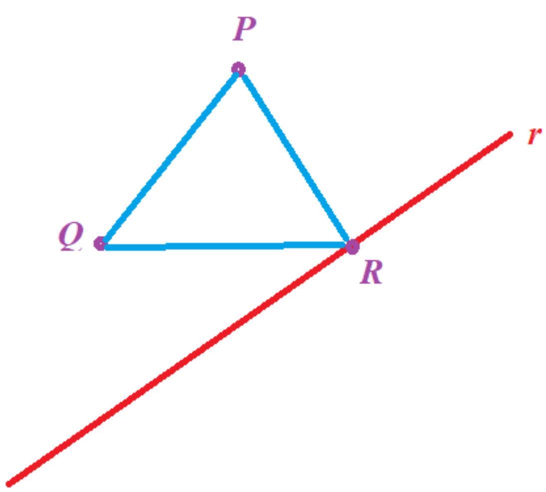
El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,1,-1)-(1,-1,3)=(1,2,-4)$.
Hallamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} M(3/2,0,1)\in\pi \\ \vec{n}=\overrightarrow{PQ}=(1,2,-4)\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} M(3/2,0,1)\in\pi \\ \pi: x+2y-4z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{3}{2}+0-4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=\frac{5}{2}\Rightarrow \pi: x+2y-4z+\frac{5}{2}=0\Rightarrow \boxed{\pi: 2x+4y-8z+5=0}$$

La ecuación del plano respecto del cual los puntos P y Q son simétricos es $\pi: 2x+4y-8z+5=0$.

b) La situación es la del dibujo.



Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*.

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,1,1) \\ P_r(2,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

El punto R pertenece a la recta y tiene coordenadas $R(2+\lambda, \lambda, \lambda)$.
Hallamos las longitudes de los lados del triángulo.

$$\overrightarrow{PQ} = (1,2,-4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{QR} = (2+\lambda,\lambda,\lambda)-(2,1,-1) = (\lambda,\lambda-1,\lambda+1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{QR}\right| = \sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2+\lambda^2-\cancel{2\lambda}+1+\lambda^2+\cancel{2\lambda}+1} = \sqrt{3\lambda^2+2}$$

$$\overrightarrow{PR} = (2+\lambda,\lambda,\lambda)-(1,-1,3) = (1+\lambda,1+\lambda,\lambda-3) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(1+\lambda)^2+(1+\lambda)^2+(\lambda-3)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2+2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1+\lambda^2-6\lambda+9} = \sqrt{3\lambda^2-2\lambda+11}$$

La suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34.

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2+\left|\overrightarrow{QR}\right|^2+\left|\overrightarrow{PR}\right|^2 = 34 \Rightarrow \left(\sqrt{21}\right)^2+\left(\sqrt{3\lambda^2+2}\right)^2+\left(\sqrt{3\lambda^2-2\lambda+11}\right)^2 = 34 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 21+3\lambda^2+2+3\lambda^2-2\lambda+11 = 34 \Rightarrow 6\lambda^2-2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\lambda(3\lambda-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 3\lambda-1 = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Tenemos dos puntos de la recta *r* que cumplen lo pedido.
Si $\lambda = 0 \Rightarrow R(2,0,0)$ y si $\lambda = \frac{1}{3} \Rightarrow R\left(2+\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow R\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
Como el tercer vértice R no debe tener ninguna de sus coordenadas nula solo es válido el punto $R\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0.4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0.2). De cierto suceso B se sabe que $P(B|A_1) = P(B|A_2)$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Y de un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C|A_2) = 0.3$ y $P(C|A_3) = 0.6$. Con estos datos se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de B si $P(B|A_1) = 0.25$.
b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Sabemos que $P(A_1) = P(A_2) = 0.4$.

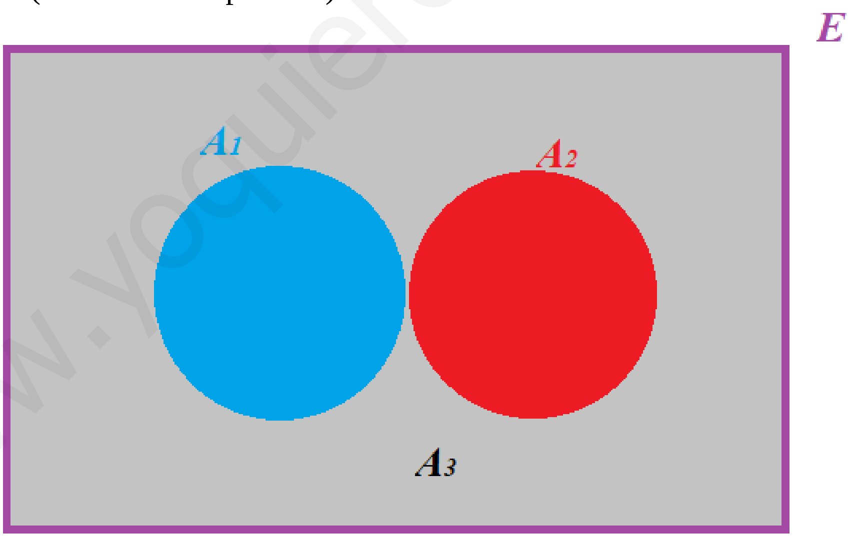
Nos dicen que $P(A_3) = P\left(\overline{A_1 \cup A_2}\right) = 0.2$.

$$P\left(\overline{A_1 \cup A_2}\right) = 0.2 \Rightarrow 1 - P(A_1 \cup A_2) = 0.2 \Rightarrow P(A_1 \cup A_2) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.4 + 0.4 - P(A_1 \cap A_2) = 0.8 \Rightarrow \boxed{P(A_1 \cap A_2) = 0}$$

Los sucesos A_1 y A_2 son incompatibles ($A_1 \cap A_2 = \varnothing$).
Reflejamos en el diagrama de Venn que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = E$ y además las intersecciones entre ellos son vacías (sucesos incompatibles).



a) Sabemos que $P(B|A_1) = P(B|A_2) = 0.25$ y $P(B|A_3) = 2P(B|A_1)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B|A_1) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_1)}{P(A_1)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_1)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap A_1) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

$$P(B|A_2) = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_2)}{P(A_2)} = 0.25 \Rightarrow \frac{P(B \cap A_2)}{0.4} = 0.25 \Rightarrow P(B \cap A_2) = 0.4 \cdot 0.25 = 0.1$$

$$P(B|A_3)=2P(B|A_1)=2\cdot 0.25=0.5\Rightarrow \frac{P(B\cap A_3)}{P(A_3)}=0.5\Rightarrow P(B\cap A_3)=0.5\cdot 0.2=0.1$$

Como $P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)=0.1+0.1+0.1=0.3$.

b) Sabemos que C es independiente de A_1 por lo que $P(C\cap A_1)=P(C)P(A_1)=0.4P(C)$
También sabemos que $P(C|A_2)=0.3$ y $P(C|A_3)=0.6$.

$$P(C|A_2)=0.3\Rightarrow \frac{P(C\cap A_2)}{P(A_2)}=0.3\Rightarrow \frac{P(C\cap A_2)}{0.4}=0.3\Rightarrow P(C\cap A_2)=0.4\cdot 0.3=0.12$$

$$P(C|A_3)=0.6\Rightarrow \frac{P(C\cap A_3)}{P(A_3)}=0.6\Rightarrow \frac{P(C\cap A_3)}{0.2}=0.6\Rightarrow P(C\cap A_3)=0.2\cdot 0.6=0.12$$

Como sabemos que $P(C)=P(C\cap A_1)+P(C\cap A_2)+P(C\cap A_3)$ tenemos que:

$$P(C)=0.4P(C)+0.12+0.12\Rightarrow P(C)-0.4P(C)=0.24\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.6P(C)=0.24\Rightarrow \boxed{P(C)=\frac{0.24}{0.6}=0.4}$$

¿C es independiente de A_2?
Para que lo sean debe cumplirse la igualdad $P(A_2\cap C)=P(A_2)P(C)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A_2\cap C)=0.12 \\ P(A_2)P(C)=0.4\cdot 0.4=0.16 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A_2\cap C)=0.12\neq 0.16=P(A_2)P(C)$$

No se cumple la igualdad y los sucesos C y A_2 no son independientes.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Como es bien sabido, la siguiente igualdad de determinantes

$$det(A+B)=detA+detB$$

no es cierta en general.

a) (0.75 puntos) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B)=detA+detB$, pruebe que entonces

$$\det\left((A+B)^2\right)=\det\left(A^2\right)+\det\left(B^2\right)+2\det(AB).$$

b) (1 punto) Dadas las matrices

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \alpha & 1 & 0\\ 2 & -1 & \alpha\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix},$$

determine el único valor de α con el que sí se cumple la igualdad $det(C+D)=detC+detD$

c) (0.75 puntos) Para el valor α = −1, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

a) Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$\det\left((A+B)^2\right)=\det\left((A+B)(A+B)\right)=\det(A+B)\det(A+B)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Sabemos que}\\ det(A+B)=detA+detB\end{matrix}\right\}=(detA+detB)(detA+detB)=$$

$$=\det A\cdot\det A+\det A\cdot\det B+\det B\cdot\det A+\det B\cdot\det B=$$

$$=(\det A)^2+2\det A\cdot\det B+(\det B)^2=\det\left(A^2\right)+2\det(AB)+\det\left(B^2\right)$$

b) Hallamos la expresión de C + D y su determinante.

$$C+D=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ \alpha & 1 & 0\\ 2 & -1 & \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ \alpha+2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & \alpha+1\end{pmatrix}$$

$$\det(C+D)=\begin{vmatrix}2 & 0 & 0\\ \alpha+2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & \alpha+1\end{vmatrix}=4(\alpha+1)+0+0-0-0-4=4\alpha+4-4=4\alpha$$

Hallamos la expresión de $detC+detD$.

$$\det C+\det D=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ \alpha & 1 & 0\\ 2 & -1 & \alpha\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=(\alpha+0+\alpha+2-0-0)+\left(1+0+\cancel{4}+1-0-\cancel{4}\right)=$$

$$=2\alpha+2+2=2\alpha+4$$

Buscamos cuando $det(C+D) = detC + detD$.

$$det(C+D) = detC + detD \Rightarrow 4\alpha = 2\alpha + 4 \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2}$$

La igualdad $det(C+D) = detC + detD$ se cumple cuando $\alpha = 2$.

c) Para el valor α = −1 la matriz C queda $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Se nos pide resolver el sistema $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Obtenemos el sistema y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = z \\ -x + y = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} -z + y = 0 \\ 2z - y - z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -z + y = 0 \\ z - y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuaciones proporcionales}\} \Rightarrow z - y = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = y \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = \lambda \end{cases}$$

Las soluciones son $x = \lambda,\ y = \lambda,\ z = \lambda$ para cualquier valor $\lambda \in \mathbb{R}$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=x^3-3x$, se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.
b) (1.75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de *f(x)* y de $g(x)=x(x-3)$.

a) Obtenemos la expresión de $f(-x)$ y la comparamos con *f(x)*.

$$f(-x)=(-x)^3-3(-x)=-x^3+3x=-\left(x^3-3x\right)=-f(x)$$

La función es impar.
Hallamos la derivada de la función y buscamos cuando se anula.

$$f(x)=x^3-3x \Rightarrow f'(x)=3x^2-3$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2-3=12-3=9>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=3\cdot 0^2-3=-3<0$. La función decrece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=3\cdot 2^2-3=12-3=9>0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y decrece en $(-1,1)$.

b) Averiguamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x \\ g(x)=x(x-3)=x^2-3x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x=x^2-3x \Rightarrow x^3-x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-1=0 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

El área de la región acotada delimitada por las gráficas de *f(x)* y de $g(x)=x(x-3)$ es el valor de la integral definida entre 0 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

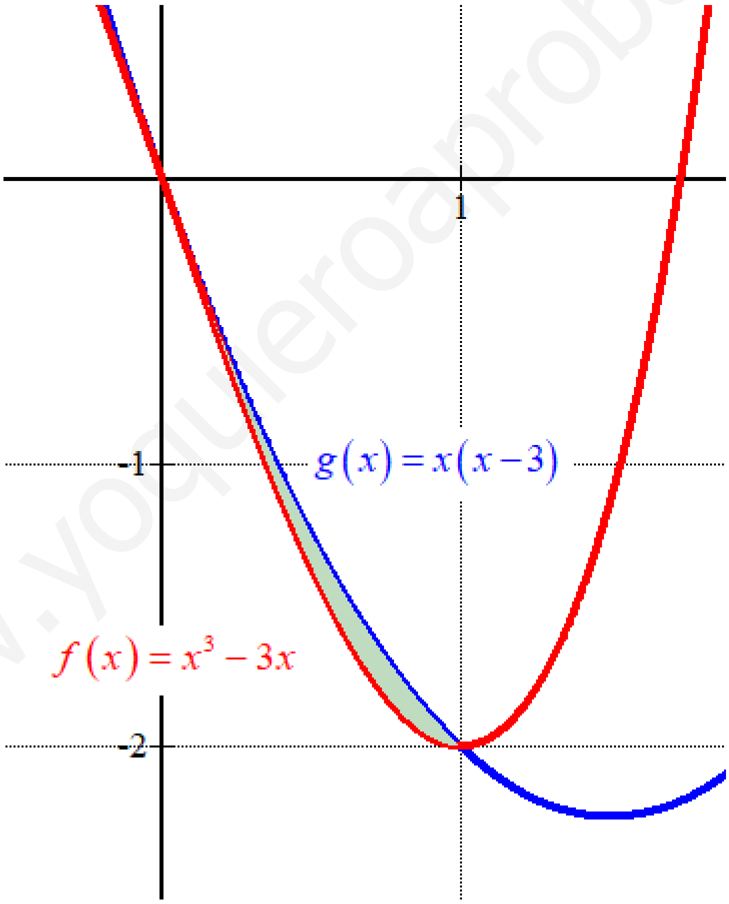
Como $\left.\begin{array}{l} f(0.5)=0.5^3-3\cdot 0.5=-1.375 \\ g(0.5)=0.5(0.5-3)=-1.25 \end{array}\right\} \Rightarrow g(0.5)>f(0.5)$

Calculamos el valor del área.

$$Área=\int_0^1 g(x)-f(x)dx=\int_0^1 x^2-3x-\left(x^3-3x\right)dx=\int_0^1 -x^3+x^2dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\left[-\frac{1^4}{4}+\frac{1^3}{3}\right]-\left[-\frac{0^4}{4}+\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{12}\simeq 0.0833u^2}$$

El área de la región acotada delimitada por las gráficas de *f(x)* y de $g(x)=x(x-3)$ tiene un valor de $\frac{1}{12}\simeq 0.0833$ unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}, \qquad s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$$

se pide:
a) (1 punto) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.
b) (1.5 puntos) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta *r*.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (3,-1,1) \\ P_r(2,-1,0) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-5+x \\ z=3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-5+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \\ Q_s(0,-5,3) \end{cases}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-5,3)-(2,-1,0) = (-2,-4,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (-2,-4,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9-2-4+2+3-12 = -4 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).

Utilizamos la fórmula de la distancia $d(r,s) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}$.

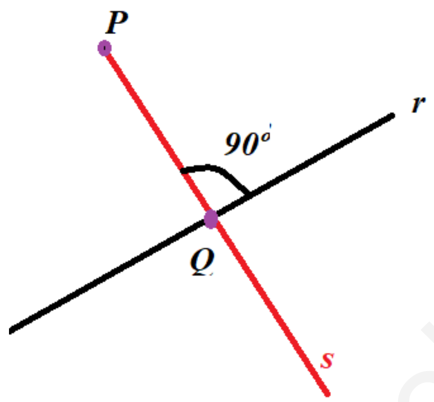
Calculamos el producto vectorial $\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (3,-1,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = i+j+3k+k+3j-i = 4j+4k = (0,4,4)$$

Calculamos la distancia entre las rectas.

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_rQ_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{|-4|}{\sqrt{0^2+4^2+4^2}}=\frac{4}{\sqrt{32}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\simeq 0.7\,unidades$$

b) Seguimos los pasos indicados en el dibujo.



Hallamos el punto Q de la recta r tal que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular al vector director de la recta (producto escalar nulo).

$$r\equiv\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-0}{1}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{u_r}=(3,-1,1)\\ P_r(2,-1,0)\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=2+3\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow Q(2+3\lambda,-1-\lambda,\lambda)$$

$$\overrightarrow{PQ}=(2+3\lambda,-1-\lambda,\lambda)-(5,-1,2)=(-3+3\lambda,-\lambda,\lambda-2)$$

$$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{u_r}\Rightarrow\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{u_r}=0\Rightarrow(-3+3\lambda,-\lambda,\lambda-2)(3,-1,1)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9+9\lambda+\lambda+\lambda-2=0\Rightarrow 11\lambda=11\Rightarrow\lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=2+3=5\\ y=-1-1=-2\\ z=1\end{cases}\Rightarrow Q(5,-2,1)$$

Hallamos la recta s que pasa por P y Q.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{PQ}=(5,-2,1)-(5,-1,2)=(0,-1,-1)\\ P(5,-1,2)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=5\\ y=-1-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

La recta s que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r tiene ecuación

$$s\equiv\begin{cases}x=5\\ y=-1-\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}.\\ z=2-\lambda\end{cases}$$

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta el centro de la diana en el 25% de sus lanzamientos y Benito en el 30%, se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.
b) (1.5 puntos) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Llamamos A a "Antonio acierta en un lanzamiento de dardo" y B a "Benito acierta en un lanzamiento de dardo".

a) Si hay 5 lanzamientos para que se decida quien friega antes del cuarto lanzamiento deben de haber acertado uno de ellos 3 lanzamientos y el otro debe de fallar los tres lanzamientos.

Calculamos la probabilidad de que Antonio acierte 3 veces en 3 lanzamientos y Benito falle los tres lanzamientos.

$$P\left(AAA\overline{B}\overline{B}\overline{B}\right)=P(A)P(A)P(A)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)P\left(\overline{B}\right)=0.25^3\cdot 0.7^3=\frac{343}{64000}$$

Calculamos la probabilidad de que Benito acierte 3 veces en 3 lanzamientos y Antonio falle en los tres lanzamientos.

$$P\left(\overline{A}\overline{A}\overline{A}BBB\right)=P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)P\left(\overline{A}\right)P(B)P(B)P(B)=0.75^3\cdot 0.3^3=\frac{729}{64000}$$

La probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega es la suma de las dos probabilidades anteriores: $\frac{343}{64000}+\frac{729}{64000}=\frac{67}{4000}=\boxed{0.1675}$.

b) Llamamos X = "número de fallos de Antonio al lanzar 60 veces el dardo".
Esta variable es una binomial de parámetros n = 60 y p = 0.75.
X = B(60, 0.75)
El número de lanzamientos es alto aproximamos esta variable binomial a una normal Y de media $\mu=np=60\cdot 0.75=45$ y desviación típica $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{60\cdot 0.75\cdot 0.25}=\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

$$Y=N\left(45,\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)$$

Fallar al menos las dos terceras partes de 60 lanzamientos es fallar al menos 40 lanzamientos.
Nos piden calcular $P(X\geq 40)$.

$$P(X\geq 40)=\{Corrección\ de\ Yates\}=P(Y\geq 39.5)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-45}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\end{matrix}\right\}=$$

$$= P\left(Z \geq \frac{39.5-45}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}\right) = P(Z \geq -1.64) = P(Z \leq 1.64) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9495}$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	[illegible]	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	[illegible]	0,
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	[illegible]	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	[illegible]	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	[illegible]	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	[illegible]	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	[illegible]	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	[illegible]	0,
1,6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9495	0,
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos es de 0.9495.