uc3m Universidad Carlos III de Madrid	**UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID** EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO Curso **2023-2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	H

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cubicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:
a) (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.
b) (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (2, 7/3).
c) (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi: 3x-2y+z-5=0$ y la recta $s \equiv \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-0}{-1}$:
a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a *s* y paralela al plano π.
b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.
a) (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?
b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X-3Y=A$ y $3X+6Y=B$, con $A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}39 & 2\\ -15 & 13\end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1.5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.

b) (1 punto) Calcular A^{127}.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f\left(x\right)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$.

a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de *f(x)*.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y=\dfrac{1}{2}$ y la gráfica de *f(x)*.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B\left(3,1,0\right)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi:\begin{cases}x=2-\alpha\\ y=2+2\beta\\ z=\alpha-2\beta\end{cases},\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50% son cuentos infantiles, el 30%, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:

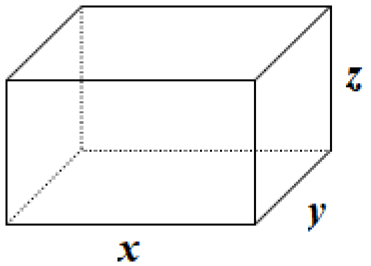
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.

b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tras una gran cosecha de sandías en una comarca, la producción se mete en cajas cubicas de 1m de lado que se amontonan en una gran pila compacta en forma de ortoedro. Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto. Pero el largo supera en 8m al ancho menos el alto. El perímetro de la base es 54m. ¿Cuántas cajas de sandías ha producido esta cosecha?

Tenemos el ortoedro del dibujo.



El largo es “x”, el ancho “y” y el alto es “z”.

“Al doble del largo de este ortoedro le faltan 2m para llegar a ser la suma del ancho y el alto” → $2x+2=y+z$.
“El largo supera en 8m al ancho menos el alto” → $x=y-z+8$.
“El perímetro de la base es 54m” → $2x+2y=54$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+2=y+z \\ x=y-z+8 \\ 2x+2y=54 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2=y+z \\ z=y-x+8 \\ x+y=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+2=y+y-x+8 \\ x+y=27 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-2y=6 \\ x+y=27 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x-2y=6 \\ x=27-y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(27-y)-2y=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 81-3y-2y=6 \Rightarrow -5y=-75 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-75}{-5}=15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=27-15=12} \Rightarrow \boxed{z=15-12+8=11}$$

El ortoedro tiene 12 metros de largo, 15 metros de ancho y 11 metros de alto.
El volumen del ortoedro es 12 · 15 · 11 = 1980 m^3. Se han producido 1980 cajas.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Hallar su dominio y estudiar las asíntotas de su gráfica.

b) (0.75 puntos) Calcular la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (2, 7/3).

c) (0.5 puntos) Encontrar, si es posible, algún punto x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(-1)^3-1}{(-1)^2-1}=\frac{-2}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{1^3-1}{1^2-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación=\dots$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & \boxed{0} \end{array} \Rightarrow x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

$$\dots=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}$$

$x=1$ no es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3-1}{x^2-1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-1}{x^3-x}=\frac{\frac{x^3}{x^3}-\frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{x}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-1-\cancel{x^3}+x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{\infty}=0$$

La asíntota oblicua tiene ecuación $y=x$.

b) La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (2, 7/3) tiene ecuación $y-\frac{7}{3}=f'(2)(x-2)$.

$$f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)(x+1)-1\cdot(x^2+x+1)}{(x+1)^2}=\frac{2x^2+2x+x+1-x^2-x-1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(2)=\dfrac{2^2+2\cdot 2}{(2+1)^2}=\dfrac{8}{9} \\ y-\dfrac{7}{3}=f'(2)(x-2)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{3}=\frac{8}{9}(x-2)\Rightarrow y-\frac{7}{3}=\frac{8}{9}x-\frac{16}{9}\Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{9}x+\frac{5}{9}}$$

La recta tangente a la gráfica de *f* en el punto (2, 7/3) tiene ecuación $y=\frac{8}{9}x+\frac{5}{9}$.

c) Para que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1 debe ser $f'(x_0)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0)=1 \\ f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow 1=\frac{x_0^2+2x_0}{(x_0+1)^2}\Rightarrow (x_0+1)^2=x_0^2+2x_0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_0^2+2x_0+1=x_0^2+2x_0\Rightarrow 1=0\rightarrow \text{¡Imposible!}$$

No existe ningún valor x_0 tal que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto $(x_0, f(x_0))$ sea 1.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el punto $P(-1,2,6)$, el plano $\pi: 3x-2y+z-5=0$ y la recta $s \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{-1}$:

a) (1.5 puntos) Halle una ecuación de la recta que pasa por P, es secante a *s* y paralela al plano π.

b) (1 punto) Halle el simétrico del punto P respecto al plano π.

a) La recta *r* paralela al plano π debe tener un vector director perpendicular al vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 3x-2y+z-5=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,-2,1)\\ \vec{v_r}=(a,b,c)\\ r \parallel \pi \rightarrow \vec{v_r} \perp \vec{n} \rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\} \Rightarrow (3,-2,1)(a,b,c)=3a-2b+c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c=2b-3a \Rightarrow \vec{v_r}=(a,b,2b-3a)$$

La recta *r* debe ser secante con la recta *s* por lo que los vectores directores no deben tener coordenadas proporcionales y el producto mixto $\left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{PQ_s}\right]$ debe ser nulo.

$$s \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{-1} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\vec{u_s}=(2,1,-1)\\ Q_s(-1,2,0)\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(a,b,2b-3a)\\ \vec{u_s}=(2,1,-1)\\ \overrightarrow{PQ_s}=(-1,2,0)-(-1,2,6)=(0,0,-6)\\ \left[\vec{v_r},\vec{u_s},\overrightarrow{PQ_s}\right]=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & 2b-3a\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 0 & -6\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -6a+12b=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-2b=0 \Rightarrow a=2b \Rightarrow \vec{v_r}=(2b,b,2b-6b)=(2b,b,-4b)$$

Tomamos $b = 1$ y el vector director de la recta *r* es $\vec{v_r}=(2,1,-4)$.

Los vectores $\vec{v_r}=(2,1,-4)$ y $\vec{u_s}=(2,1,-1)$ no tienen coordenadas proporcionales.

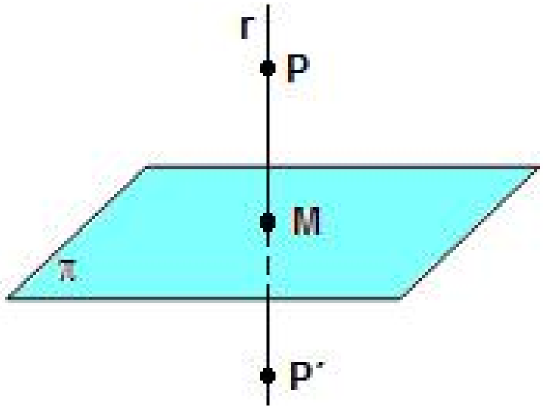
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(2,1,-4)\\ \vec{u_s}=(2,1,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{2}=\frac{1}{1}\neq\frac{-4}{-1}$$

Determinamos la ecuación de la recta *r* como la recta que pasa por $P(-1,2,6)$ y con vector director $\vec{v_r}=(2,1,-4)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(-1,2,6)\in r\\ \vec{v_r}=(2,1,-4)\end{array}\right\} \Rightarrow r: \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-4}$$

La recta r que pasa por P, es secante a s y paralela al plano π es: $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{-4}$

b) Para obtener las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de un plano π seguiremos el procedimiento descrito en el dibujo.



Hallamos la recta r perpendicular al plano $\pi: 3x-2y+z-5=0$ y que pasa por P. Por ser perpendicular el vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (3,-2,1) \\ P(-1,2,6) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l} x = -1+3\lambda \\ y = 2-2\lambda \\ z = 6+\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 3x-2y+z-5=0 \\ r \equiv \left.\begin{array}{l} x=-1+3\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=6+\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1+3\lambda)-2(2-2\lambda)+6+\lambda-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+9\lambda-4+4\lambda+6+\lambda-5=0 \Rightarrow 14\lambda=6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{14} = \frac{3}{7} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1+3\frac{3}{7} = \frac{2}{7} \\ y = 2-2\frac{3}{7} = \frac{8}{7} \\ z = 6+\frac{3}{7} = \frac{45}{7} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{2}{7}, \frac{8}{7}, \frac{45}{7}\right)$$

El punto P´ es el resultado de sumarle al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{7},\frac{8}{7},\frac{45}{7}\right) - (-1,2,6) = \left(\frac{2}{7}+1,\frac{8}{7}-2,\frac{45}{7}-6\right) = \left(\frac{9}{7},\frac{-6}{7},\frac{3}{7}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{2}{7},\frac{8}{7},\frac{45}{7}\right) + \left(\frac{9}{7},\frac{-6}{7},\frac{3}{7}\right) = \left(\frac{11}{7},\frac{2}{7},\frac{48}{7}\right)$$

El punto P' simétrico del punto P respecto al plano π tiene coordenadas $P'\left(\frac{11}{7},\frac{2}{7},\frac{48}{7}\right)$.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Para conocer la opinión de los usuarios sobre su servicio, la empresa de transporte público de una ciudad ha realizado una encuesta. De esa encuesta se desprende que la nota global otorgada al servicio por sus usuarios se puede considerar una normal de media 6.7 y de desviación típica 1.25. Si un usuario da una nota menor que 5 se considera que ve como insatisfactorio el servicio; si la nota está entre 5 y 7.5, que para el usuario el servicio es satisfactorio; y si la nota es mayor que 7.5, que el servicio es excelente.

a) (0.75 puntos) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente?

b) (1 punto) Elegido un usuario al azar, ¿qué probabilidad hay de que crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio?

c) (0.75 puntos) Para conocer de forma más directa la opinión de sus usuarios, de entre todos ellos la empresa convoca a 25 elegidos al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de entre los convocados consideren el servicio insatisfactorio?

X = La nota otorgada al servicio de transporte público por sus usuarios. X = N(6.7, 1.25)

a) Nos piden calcular $P(X > 7.5)$.

$$P(X > 7.5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{7.5-6.7}{1.25}\right) = P(Z > 0.64) =$$

$$= 1 - P(Z \le 0.64) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.7389 = \boxed{0.2611}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	[illegible]	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	[illegible]	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	[illegible]	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	[illegible]	0.63
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	[illegible]	0.67
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	[illegible]	0.70
0.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7389	0.74
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.77
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La probabilidad de que un usuario elegido al azar crea que el servicio de la empresa de transportes es excelente es de 0.2611.

b) Nos piden calcular $P(5 \le X \le 7.5)$.

$$P(5 \le X \le 7.5) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{5-6.7}{1.25} \le Z \le \frac{7.5-6.7}{1.25}\right) = P(-1.36 \le Z \le 0.64) =$$

$$= P(Z \le 0.64) - P(Z \le -1.36) = P(Z \le 0.64) - P(Z \ge 1.36) =$$

$$= P(Z \le 0.64) - [1 - P(Z \le 1.36)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.7389 - [1 - 0.9131] = \boxed{0.652}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0
1.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9131	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0

La probabilidad de que un usuario elegido al azar crea que el servicio de la empresa de transportes es satisfactorio es de 0.652.

c) Consideramos la variable aleatoria Y que cuenta el número de encuestados que considera el servicio insatisfactorio de un grupo de 25.
Como la probabilidad de que sea satisfactorio es 0.652, de que sea excelente es 0.2611, la probabilidad de que sea insatisfactorio es 1 – 0.652 – 0.2611 = 0.0869

Es una variable binomial de parámetros n = 25 y p = 0.0869. Y = B(25, 0.0869).

Debemos calcular $P(Y \geq 2)$.

$$P(Y \geq 2) = 1 - P(Y < 2) = 1 - \left[P(Y=0) + P(Y=1)\right] =$$

$$= 1 - \left[\binom{25}{0} \cdot 0.0869^0 \cdot 0.9131^{25} + \binom{25}{1} \cdot 0.0869^1 \cdot 0.9131^{24}\right] =$$

$$= 1 - \left[0.0869^0 \cdot 0.9131^{25} + 25 \cdot 0.0869^1 \cdot 0.9131^{24}\right] \simeq \boxed{0.6518}$$

La probabilidad de que al menos dos de entre los 25 convocados consideren el servicio insatisfactorio es de 0.6518.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X-3Y=A$ y $3X+6Y=B$, con $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}39&2\\-15&13\end{pmatrix}$. Se pide:
a) (1.5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.
b) (1 punto) Calcular A^{127}.

a) Resolvemos el sistema matricial.

$$\left.\begin{array}{l}5X-3Y=A\\3X+6Y=B\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{array}{r}(\times 2)\to 10X-6Y=2A\\3X+6Y=B\end{array}\Bigg\}$$

$$\overline{13X\qquad=2A+B}\Rightarrow\boxed{X=\frac{1}{13}(2A+B)=\frac{2}{13}A+\frac{1}{13}B}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{2}{13}A+\frac{1}{13}B\right)+6Y=B\Rightarrow\frac{6}{13}A+\frac{3}{13}B+6Y=B\Rightarrow 6Y=B-\frac{6}{13}A-\frac{3}{13}B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6Y=\frac{10}{13}B-\frac{6}{13}A\Rightarrow\boxed{Y=\frac{5}{39}B-\frac{3}{39}A=\frac{1}{39}(5B-3A)}$$

Hallamos las expresiones de las matrices X e Y.

$$Y=\frac{1}{39}(5B-3A)=\frac{1}{39}\left(5\begin{pmatrix}39&2\\-15&13\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}195&13\\-78&65\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1/3\\-2&5/3\end{pmatrix}$$

$$X=\frac{1}{13}(2A+B)=\frac{1}{13}\left(2\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}39&2\\-15&13\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}39&0\\-13&13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X=\begin{pmatrix}3&0\\-1&1\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}5&1/3\\-2&5/3\end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de la matriz X.

$$|X|=\begin{vmatrix}3&0\\-1&1\end{vmatrix}=3\neq 0$$

$$X^{-1}=\frac{Adj\left(X^T\right)}{|X|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3&-1\\0&1\end{pmatrix}}{3}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&0\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3&0\\1/3&1\end{pmatrix}$$

b) Calculamos las primeras potencias de la matriz A en busca de una regularidad.

$$A^2=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$$A^3 = AA^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = AA^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Hemos comprobado que $A^4 = I$. Como 127 = 31 · 4 + 3 lo aplicamos al cálculo de A^{127}.

$$A^{127} = A^{31\cdot 4+3} = \left(A^4\right)^{31} \cdot A^3 = \left(I\right)^{31} \cdot A^3 = A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sea $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$.

a) (1.5 puntos) Analice la monotonía y los extremos relativos de *f(x)*.

b) (1 punto) Halle el área de la región acotada delimitada por la recta $y=\dfrac{1}{2}$ y la gráfica de *f(x)*.

a) Buscamos los puntos críticos de la función viendo donde se anula la derivada.

$$f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}=\begin{cases}\dfrac{-x}{x^2+1} & si \;\; x<0\\[2mm] \dfrac{x}{x^2+1} & si \;\; x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-1\left(x^2+1\right)-2x(-x)}{x^2+1}=\dfrac{-x^2-1+2x^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2-1}{x^2+1} & si \;\; x<0\\[2mm] \dfrac{1\left(x^2+1\right)-2x(x)}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1-2x^2}{x^2+1}=\dfrac{-x^2+1}{x^2+1} & si \;\; x>0\end{cases}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x^2+1}=0\to x^2-1=0\to x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=-1\in(-\infty,0)\\[2mm] \dfrac{-x^2+1}{x^2+1}=0\to -x^2+1=0\to x^2=1\Rightarrow x=\sqrt{1}=1\in(0,+\infty)\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de –1, 0 y 1.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

  $f'(-2)=\dfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1}=\dfrac{3}{5}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,0)$ tomamos $x=-0.5$ y la derivada vale

  $f'(-0.5)=\dfrac{(-0.5)^2-1}{(-0.5)^2+1}=\dfrac{-0.75}{1.25}<0$. La función decrece en $(-1,0)$.

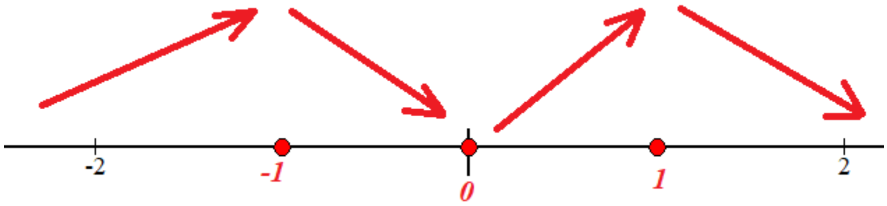
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$ y la derivada vale

  $f'(0.5)=\dfrac{-0.5^2+1}{0.5^2+1}=\dfrac{0.75}{1.25}>0$. La función crece en $(0,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x=2$ y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{-2^2+1}{2^2+1}=\dfrac{-3}{5}<0$.

  La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(0,1)$ y decrece en $(-1,0)\cup(1,+\infty)$.
La función presenta un máximo relativo en $x = -1$ y otro en $x = 1$. La función presenta un mínimo relativo en $x = 0$.

b) Buscamos los puntos de corte de las gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\dfrac{1}{2} \\ f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{x^2+1} & si\ \ x<0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & si\ \ x\geq 0 \end{cases} \\ y=f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \bullet \dfrac{-x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2} \to -2x=x^2+1 \to x^2+2x+1 \to \\ \qquad \to x=\dfrac{-2\pm\sqrt{2^2-4}}{2}=-1\in(-\infty,0) \\ \bullet \dfrac{x}{x^2+1}=\dfrac{1}{2} \to 2x=x^2+1 \to x^2-2x+1 \to \\ \qquad \to x=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4}}{2}=1\in(0,+\infty) \end{cases}$$

La región del plano limitada por las dos gráficas está situada entre –1 y 1. Debido al cambio de definición de $f(x)$ en $x = 0$ para el cálculo del valor del área la dividimos en dos partes que calculamos por separado.

Parte 1

$$\int_{-1}^{0} f(x)-\frac{1}{2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{-x}{x^2+1}-\frac{1}{2}dx=-\int_{-1}^{0}\frac{x}{x^2+1}dx-\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}dx=$$

$$=\frac{-1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0}=\frac{-1}{2}\left[\ln(1)-\ln(2)\right]-\left[0-\frac{1}{2}(-1)\right]=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\simeq -0.15$$

El área de la parte 1 tiene un valor de $\left|\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}\simeq 0.15$.

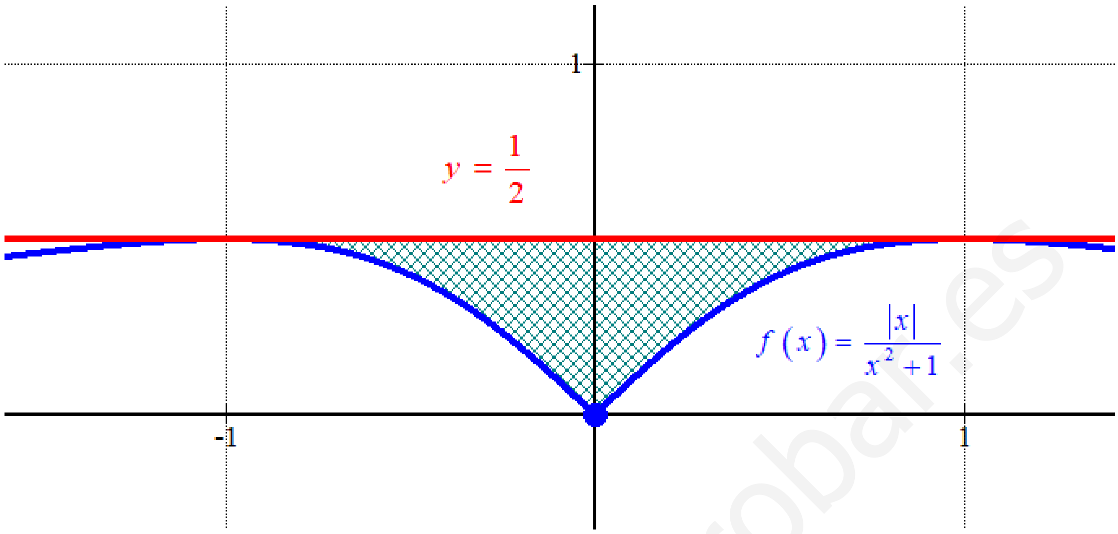
Parte 2

$$\int_{0}^{1} f(x)-\frac{1}{2}dx=\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{2}dx=\int_{0}^{1}\frac{x}{x^2+1}dx-\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx-\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_{0}^{1}-\left[\frac{1}{2}x\right]_{0}^{1}=\frac{1}{2}\left[\ln(2)-\ln(1)\right]-\left[\frac{1}{2}-0\right]=\frac{\ln 2}{2}-\frac{1}{2}\simeq -0.15$$

El área de la parte 2 tiene un valor de $\left|\dfrac{\ln 2}{2}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln 2}{2}\simeq 0.15$.

El área de la región acotada delimitada por la recta $y=\frac{1}{2}$ y la gráfica de *f(x)* es la suma de las dos áreas obtenidas: $2\left(\frac{1}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)=1-\ln 2\simeq 0.31$ unidades cuadradas.



B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En el punto $A(1,0,-1)$ se encuentra un emisor láser que dispara un rayo de luz (unidimensional) apuntando hacia el punto $B(3,1,0)$. Dicho rayo incide en un punto P del plano $\pi:\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=2+2\beta \\ z=\alpha-2\beta \end{cases}, \alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Llamamos al punto P el punto de incidencia del rayo de luz sobre el plano π. Se pide:

a) (1.25 puntos) Calcular una ecuación del plano de incidencia, es decir, el plano perpendicular a π que contiene al rayo de luz.

b) (0.75 puntos) Calcular la distancia que recorre el rayo de luz desde el emisor hasta el punto P.

c) (0.5 puntos) Calcular el ángulo que debería girar el emisor para que la distancia entre él y el nuevo punto de incidencia sobre π sea mínima.

a) El plano de incidencia π´ tiene como uno de sus vectores directores el vector que une los puntos A y B, pues los contiene. El otro vector director es el vector normal del plano π. Hallamos la ecuación implícita del plano π y su vector normal.

$$\pi:\begin{cases} x=2-\alpha \\ y=2+2\beta \\ z=\alpha-2\beta \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha=2-x \\ -2\beta=2-y \\ z=\alpha-2\beta \end{cases}\Rightarrow z=2-x+2-y\Rightarrow\pi: x+y+z-4=0\Rightarrow\vec{n}=(1,1,1)$$

Hallamos las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}=(3,1,0)-(1,0,-1)=(2,1,1)$$

Hallamos la ecuación del plano de incidencia π´.

$$\left.\begin{array}{l} u=\overrightarrow{AB}=(2,1,1) \\ \vec{v}=\vec{n}=(1,1,1) \\ B(3,1,0)\in\pi' \end{array}\right\}\Rightarrow\pi':\begin{vmatrix} x-3 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x-3}+y-1+2z-z-2(y-1)-\cancel{(x-3)}=0\Rightarrow y-1+2z-z-2y+2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi':-y+z+1=0}$$

El plano de incidencia tiene ecuación $\pi':-y+z+1=0$.

b) Hallamos el punto P de incidencia del rayo láser que será el punto de corte de la recta que une los puntos A y B con el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r=\overrightarrow{AB}=(2,1,1) \\ B(3,1,0)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1+\lambda \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

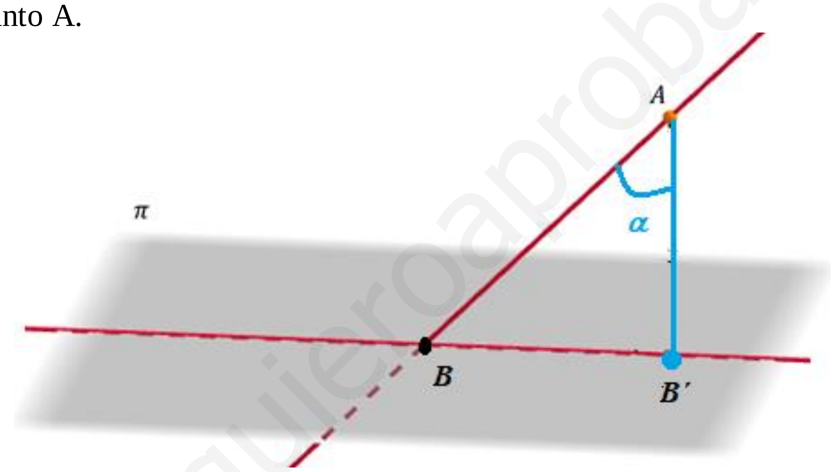
$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=3+2\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \pi: x+y+z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2\lambda+1+\lambda+\lambda-4=0 \Rightarrow 4\lambda=0 \Rightarrow \lambda=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \Rightarrow P(3,1,0) \\ z=0 \end{cases}$$

El punto P de incidencia del rayo en el plano π es el punto B, es decir, el punto B pertenece al plano π.
Como el punto P es el punto B la distancia que recorre el rayo es la distancia entre A y B, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=(2,1,1)$.

$$d(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}\simeq 2.45u$$

El rayo láser recorre una distancia aproximada de 2.45 unidades.

c) Debemos hallar la proyección ortogonal del punto A, que es el punto del plano π más cercano al punto A.



Hallamos la ecuación de la recta *r* perpendicular al plano que pasa por A. El vector director de la recta es el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \\ A(1,0,-1)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}$$

Hallamos el punto B´ de corte entre la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \\ \pi: x+y+z-4=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+\lambda+\lambda-1+\lambda-4=0 \Rightarrow 3\lambda=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{4}{3} \\ z = -1 + \frac{4}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Hallamos el ángulo α que debe girar el rayo láser como el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$.

$$\overrightarrow{AB'} = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) - (1,0,-1) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

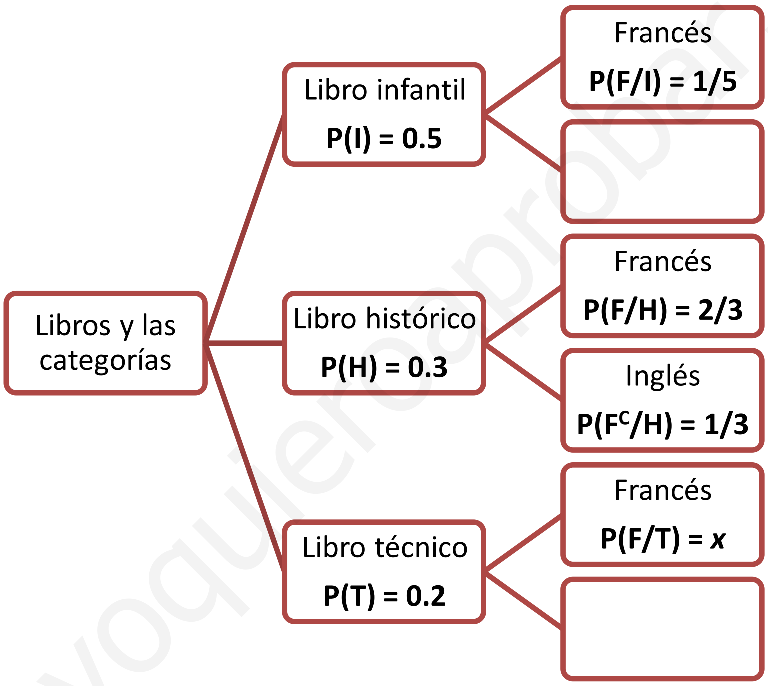
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (2,1,1) \\ \overrightarrow{AB'} = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AB'}\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) = \frac{(2,1,1)\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}\sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\frac{8}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}}{\sqrt{6}\sqrt{\frac{16}{3}}} = \frac{\frac{16}{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = 19.47^{\circ}$$

El rayo láser debería girar 19.47º.

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
En la sección de idiomas de una biblioteca municipal se tienen libros, en francés o inglés, de tres categorías: el 50% son cuentos infantiles, el 30%, novelas históricas y el resto, manuales técnicos. Uno de cada cinco de los cuentos está en francés y una de cada tres de las novelas, en inglés. Por otra parte, uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico. Se toma un libro al azar y se pide:
a) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté en francés si no es un manual técnico.
b) (1.25 puntos) Calcular la probabilidad de que esté escrito en francés, y la probabilidad de que si está en inglés sea una novela histórica.

Llamamos F al suceso "Libro escrito en francés", F^C = "Libro escrito en inglés", I a "el libro es infantil", H a "el libro es una novela histórica" y T a "el libro es un manual técnico". Realizamos un diagrama de árbol para organizar todas las probabilidades.



Nos dicen que uno de cada siete de los libros en francés es un manual técnico, lo que implica que $P(T/F)=\frac{1}{7}$. Aplicamos el teorema de Bayes para hallar $P(F/T)$.

$$P(F)=P(I)P(F/I)+P(H)P(F/H)+P(T)P(F/T)=0.5\cdot\frac{1}{5}+0.3\cdot\frac{2}{3}+0.2\cdot x$$

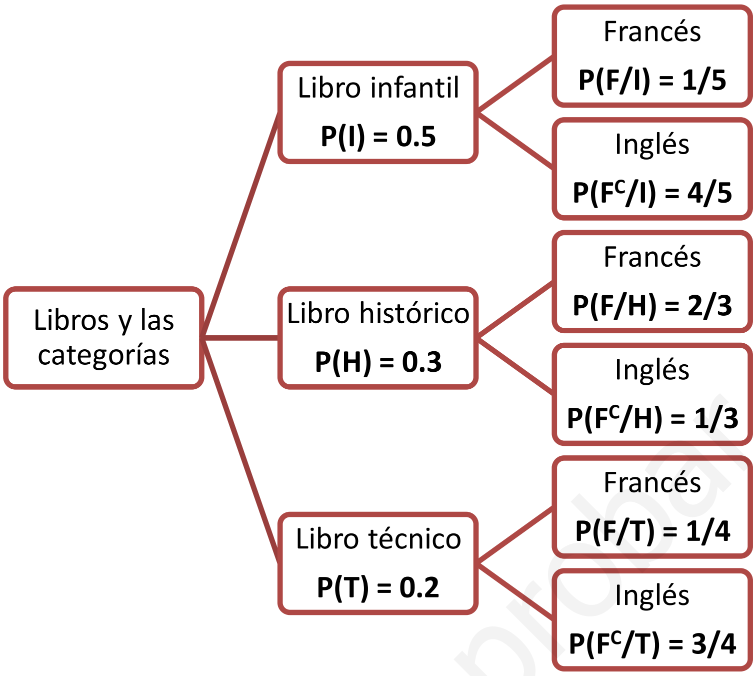
$$P(F)=0.3+0.2x$$

$$P(T/F)=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{P(T\cap F)}{P(F)}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{P(T)P(F/T)}{P(F)}=\frac{1}{7}\Rightarrow\frac{0.2\cdot x}{0.3+0.2x}=\frac{1}{7}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.4x=0.3+0.2x\Rightarrow 1.2x=0.3\Rightarrow x=\frac{0.3}{1.2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\boxed{P(F/T)=\frac{1}{4}}$$

Tenemos que $P(F/T)=\frac{1}{4}$ y que $P(F)=0.3+0.2\frac{1}{4}=0.35$.

Completamos el diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(F/T^C)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/T^C)=\frac{P(F\cap T^C)}{P(T^C)}=\frac{P(F)-P(F\cap T)}{1-P(T)}=\frac{P(F)-P(T)P(F/T)}{1-P(T)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(F/T^C)=\frac{0.35-0.2\cdot\frac{1}{4}}{1-0.2}=\frac{3}{8}=\boxed{0.375}$$

La probabilidad de que un libro esté en francés si no es un manual técnico es de 0.375.

b) Nos piden calcular $P(F)$, calculado previamente y tiene un valor $P(F)=0.35$.

También nos piden calcular $P(H/F^C)$.

$$P(H/F^C)=\frac{P(H\cap F^C)}{P(F^C)}=\frac{P(H)P(F^C/H)}{1-P(F)}=\frac{0.3\cdot\frac{1}{3}}{1-0.35}=\boxed{\frac{2}{13}\simeq 0.1538}$$

La probabilidad de que un libro si está en inglés sea una novela histórica es de 0.1538.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos proporcionados a valores absolutos. Consideramos que en la biblioteca hay $3\cdot 2\cdot 5\cdot 7\cdot 10=2100$ libros. Consideramos esta cifra para que los cálculos a realizar den un valor exacto.

Realizamos una tabla de contingencia.

	Infantiles	Novelas	Manuales	
Francés	$\frac{1050}{5}=210$		$\frac{x}{7}$	x
Inglés		$\frac{630}{3}=210$		$2100-x$
	$\frac{2100}{2}=1050$	$2100\cdot 0.30=630$		2100

De las 630 novelas 210 están en inglés, por lo que 630 – 210 = 420 están escritas en francés.

Resolvemos la ecuación que se nos plantea en la línea de la fila de francés.

$$210+420+\frac{x}{7}=x \Rightarrow 1470+2940+x=7x \Rightarrow 4410=6x \Rightarrow x=\frac{4410}{6}=735$$

Hay 735 libros escritos en francés.

Completamos la tabla.

	Infantiles	Novelas	Manuales	
Francés	210	420	$\frac{735}{7}=105$	735
Inglés	840	210	315	1365
	1050	630	420	2100

Respondemos a las preguntas del ejercicio aplicando la regla de Laplace.

a) Hay 1050 + 630 = 1680 libros que no son manuales técnicos.
De ellos hay 210 + 420 = 630 en francés.

$$P\left(F/T^C\right)=\frac{630}{1680}=\frac{3}{8}=\boxed{0.375}$$

b) Hay 735 libros en francés de un total de 2100 libros.

$$P(F)=\frac{735}{2100}=\boxed{\frac{7}{20}=0.35}$$

Hay 1365 libros en inglés, de los cuales 210 son novela histórica.

$$P\left(H/F^C\right)=\frac{210}{1365}=\boxed{\frac{2}{13}\simeq 0.1538}$$