UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2023-2024**
MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**

CALIFICACIÓN: Cada pregunta se calificará sobre 2.5 puntos.
TIEMPO: 90 minutos.

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Para la función $f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=\pi$.
b) (1 punto) Probar que *f(x)* tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi,0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
c) (1 punto) Si $g(x)=f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)* en el intervalo $[0,\pi]$.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los puntos A(0,0,1) y B(1,1,0), se pide:
a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano z = 0.
b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(\overline{A})=\frac{11}{20}$, $P(A/B)-P(B/A)=\frac{1}{24}$ y $P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{10}$, se pide:
a) (1.5 puntos) Calcular $P(A\cap B)$ y $P(B)$.
b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A\cup C)=\frac{14}{25}$.

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de *b* para los que se verifica $BCB^{-1}=A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para *b = 1*.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Calcule:

a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2)\ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,\ a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es V = 1. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de *a*.

b) (1 punto) Dado el punto Q(3, 3, 3), se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

SOLUCIONES

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Llamamos "x" a la longitud del listón largo, "y" a la del intermedio y "z" a la del corto.

Nos dicen "Puestos uno tras otro, tanto con dos listones largos y cuatro intermedios como con tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total" → $2x+4y=3y+15z$.
Nos dicen "Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto" → $x=y+z+17$.
Por último, nos dicen "con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por uno largo" → $9z+7=y+x$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+4y=3y+15z \\ x=y+z+17 \\ 9z+7=y+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+y=15z \\ x=y+z+17 \\ 9z+7=y+x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2(y+z+17)+y=15z \\ 9z+7=y+y+z+17 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+2z+34+y=15z \\ 8z=2y+10 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+34=13z \\ 4z=y+5 \rightarrow y=4z-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(4z-5)+34=13z \Rightarrow 12z-15+34=13z \Rightarrow \boxed{19=z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=4\cdot 19-5=71} \Rightarrow \boxed{x=71+19+17=107}$$

El listón largo mide 107 cm, el intermedio 71 cm y el corto 19 cm.

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Para la función $f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4$, se pide:
a) (0.5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en $x=\pi$.
b) (1 punto) Probar que *f(x)* tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi,0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.
c) (1 punto) Si $g(x)=f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de *f(x)* y *g(x)* en el intervalo $[0,\pi]$.

a) La recta tangente en $x=\pi$ tiene ecuación $y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)$.

$$f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4 \Rightarrow f(\pi)=\pi^4+\pi\cdot\pi^3+\pi^2\cdot\pi^2+\pi^3\cdot\pi+\pi^4=5\pi^4$$

$$f'(x)=4x^3+3\pi x^2+2\pi^2x+\pi^3 \Rightarrow f'(\pi)=4\cdot\pi^3+3\pi\cdot\pi^2+2\pi^2\cdot\pi+\pi^3=10\pi^3$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\pi)=5\pi^4 \\ f'(\pi)=10\pi^3 \\ y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi) \end{array}\right\} \Rightarrow y-5\pi^4=10\pi^3(x-\pi)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-5\pi^4=10\pi^3x-10\pi^4 \Rightarrow \boxed{y=10\pi^3x-5\pi^4}$$

La recta tangente tiene ecuación $y=10\pi^3x-5\pi^4$.

b) La función *f(x)* es una función polinómica y por tanto es continua y derivable en el intervalo $(-\pi,0)$. También se cumple que:
$f(-\pi)=(-\pi)^4+\pi(-\pi)^3+\pi^2(-\pi)^2+\pi^3(-\pi)+\pi^4=\pi^4-\pi^4+\pi^4-\pi^4+\pi^4=\pi^4$ y
$f(0)=0^4+\pi\cdot0^3+\pi^2\cdot0^2+\pi^3\cdot0+\pi^4=\pi^4$, por lo que $f(-\pi)=f(0)$.
Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle y debe existir un valor $c\in(-\pi,0)$ donde $f'(c)=0$.

La derivada de la función *f(x)* es una función polinómica y por tanto es continua y derivable en el intervalo $(-\pi,0)$. Tenemos que
$f'(-\pi)=4\cdot(-\pi)^3+3\pi\cdot(-\pi)^2+2\pi^2\cdot(-\pi)+\pi^3=-4\pi^3+3\pi^3-2\pi^3+\pi^3=-2\pi^3<0$ y
$f'(0)=4\cdot0^3+3\pi\cdot0^2+2\pi^2\cdot0+\pi^3=\pi^3>0$.
La función derivada es continua en el intervalo $(-\pi,0)$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo por lo que según el teorema de Bolzano debe existir $c\in(-\pi,0)$ donde la función derivada se anule, es decir, tal que $f'(c)=0$.

c) La función *g(x)* queda:

$$g(x)=f(-x)=(-x)^4+\pi(-x)^3+\pi^2(-x)^2+\pi^3(-x)+\pi^4=x^4-\pi x^3+\pi^2x^2-\pi^3x+\pi^4$$

Hallamos los posibles puntos de corte de las funciones f(x) y g(x).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4 \\ g(x)=x^4-\pi x^3+\pi^2x^2-\pi^3x+\pi^4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{x^4}+\pi x^3+\cancel{\pi^2x^2}+\pi^3x+\cancel{\pi^4}=\cancel{x^4}-\pi x^3+\cancel{\pi^2x^2}-\pi^3x+\cancel{\pi^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi x^3+2\pi^3x=0 \Rightarrow 2\pi x\left(x^2+\pi^2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2+\pi^2=0 \rightarrow \text{¡Imposible!} \end{cases}$$

Las funciones se cortan en x = 0, por lo que el recinto encerrado entre las dos gráficas en el intervalo $[0,\pi]$ es el valor absoluto de la integral definida entre 0 y π de la diferencia de las dos funciones.

$$\int_0^\pi f(x)-g(x)\,dx=\int_0^\pi x^4+\pi x^3+\pi^2x^2+\pi^3x+\pi^4-\left(x^4-\pi x^3+\pi^2x^2-\pi^3x+\pi^4\right)dx=$$

$$=\int_0^\pi 2\pi x^3+2\pi^3x\,dx=\left[\frac{2\pi}{4}x^4+\frac{2\pi^3}{2}x^2\right]_0^\pi=\left[\frac{\pi}{2}x^4+\pi^3x^2\right]_0^\pi=$$

$$=\left[\frac{\pi}{2}\cdot\pi^4+\pi^3\cdot\pi^2\right]-\left[\frac{\pi}{2}\cdot 0^4+\pi^3\cdot 0^2\right]=\frac{\pi^5}{2}+\pi^5=\frac{3\pi^5}{2}\simeq 459.03$$

El área tiene un valor aproximado de 459.03 unidades cuadradas.

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Dados los puntos A(0,0,1) y B(1,1,0), se pide:
a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano z = 0.
b) (1.5 puntos) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

a) Si el plano π´ es perpendicular al plano π: z = 0 el vector normal de este plano es un vector director del plano que buscamos. El otro vector director es el vector $\overrightarrow{AB}$ que une los puntos A y B pertenecientes al plano.

$$\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,0)-(0,0,1)=(1,1,-1)$$

$$\pi: z=0 \Rightarrow \vec{n}=(0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)\\ \vec{v}=\vec{n}=(0,0,1)\\ A(0,0,1)\in\pi´\end{array}\right\}\Rightarrow \pi´:\begin{vmatrix}x & y & z-1\\ 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow \boxed{\pi´: x-y=0}$$

El plano que cumple lo pedido tiene ecuación $\pi´: x-y=0$.

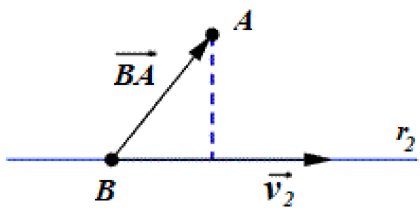
b) El plano $x+z=1$ tiene como vector normal $\vec{n}=(1,0,1)$. Las rectas por ser paralelas tienen el mismo vector director y por pertenecer al plano sus vectores directores deben ser perpendiculares a dicho vector normal.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=(a,b,c)\\ \vec{n}=(1,0,1)\\ \vec{v_1}\perp\vec{n}\to\vec{v_1}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow (a,b,c)(1,0,1)=0\Rightarrow a+c=0\Rightarrow c=-a$$

$$r_1 \parallel r_2 \Rightarrow \vec{v_1}=\vec{v_2}=(a,b,-a)$$

La distancia entre las dos rectas paralelas es 1, por lo que la distancia del punto A de la recta r_1 a la recta r_2 debe ser 1. Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto A a una recta r_2.

$$d(A,r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{v_2}\right|}{\left|\vec{v_2}\right|}$$



Hallamos el producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\vec{v_2}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(1,1,-1)\\ \vec{v_2}=(a,b,-a)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\vec{v_2}=\begin{vmatrix}i & j & k\\ 1 & 1 & -1\\ a & b & -a\end{vmatrix}=-ai-aj+bk-ak+aj+bi=$$

$$=(-a+b)i+0j+(b-a)k \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v_2}=(b-a,0,b-a)$$

Su módulo es $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v_2}\right|=\sqrt{(b-a)^2+0^2+(b-a)^2}=\sqrt{2(b-a)^2}$.

Sustituimos en la expresión de la distancia.

$$d(A,r_2)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{v_2}\right|}{\left|\overrightarrow{v_2}\right|}=\frac{\sqrt{2(b-a)^2}}{\sqrt{a^2+b^2+(-a)^2}}=\frac{\sqrt{2(b-a)^2}}{\sqrt{2a^2+b^2}}=1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{2(b-a)^2}=\sqrt{2a^2+b^2}\Rightarrow\left(\sqrt{2(b-a)^2}\right)^2=\left(\sqrt{2a^2+b^2}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(b-a)^2=2a^2+b^2\Rightarrow 2\left(b^2+a^2-2ab\right)=2a^2+b^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2b^2+\cancel{2a^2}-4ab=\cancel{2a^2}+b^2\Rightarrow b^2-4ab=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b(b-4a)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{b=0}\\ b-4a=0\Rightarrow\boxed{b=4a}\end{cases}$$

Existen dos posibles soluciones.

Si *b = 0* entonces el vector director es $\overrightarrow{v_2}=(a,0,-a)$. Podemos tomar *a = 1* y el vector sería $\overrightarrow{v_2}=(1,0,-1)$. Determinamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_2}=(1,0,-1)\\ A(0,0,1)\in r_1\end{array}\right\}\Rightarrow r_1:\begin{cases}x=\lambda\\ y=0 \quad ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_2}=(1,0,-1)\\ B(1,1,0)\in r_2\end{array}\right\}\Rightarrow r_2:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1 \quad ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-\lambda\end{cases}$$

Si *b = 4a* entonces el vector director es $\overrightarrow{v_2}=(a,4a,-a)$. Podemos tomar *a = 1* y el vector sería $\overrightarrow{v_2}=(1,4,-1)$. Determinamos las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{v_2}=(1,4,-1)\\ A(0,0,1)\in r_1\end{array}\right\}\Rightarrow r_1:\begin{cases}x=\lambda\\ y=4\lambda \quad ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1-\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_2}=(1,4,-1)\\ B(1,1,0)\in r_2\end{array}\right\}\Rightarrow r_2:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1+4\lambda ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=-\lambda\end{cases}$$

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(\overline{A})=\frac{11}{20}$, $P(A/B)-P(B/A)=\frac{1}{24}$ y $P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{10}$, se pide:

a) (1.5 puntos) Calcular $P(A\cap B)$ y $P(B)$.

b) (1 punto) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que verifica que $P(A\cup C)=\frac{14}{25}$.

a) Sabemos que $P(\overline{A})=\frac{11}{20} \rightarrow P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{11}{20}=\frac{9}{20}$.

También que $P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{10}$ y que $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B})$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap\overline{B}) \\ P(A)=\frac{9}{20} \\ P(A\cap\overline{B})=\frac{3}{10}=\frac{6}{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{9}{20}=P(A\cap B)+\frac{6}{20} \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)=\frac{3}{20}}$$

Utilizamos el teorema de Bayes en la igualdad $P(A/B)-P(B/A)=\frac{1}{24}$.

$$P(A/B)-P(B/A)=\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}-\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{\frac{3}{20}}{P(B)}-\frac{\frac{3}{20}}{\frac{9}{20}}=\frac{1}{24} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{20P(B)}-\frac{3}{9}=\frac{1}{24} \Rightarrow \frac{3}{20P(B)}=\frac{1}{24}+\frac{1}{3}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8} \Rightarrow 20P(B)=8 \Rightarrow \boxed{P(B)=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}}$$

b) Si A y C son independientes se cumple que $P(A\cap C)=P(A)P(C)=\frac{9}{20}P(C)$.

Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup C)=\frac{14}{25} \\ P(A\cap C)=\frac{9}{20}P(C) \\ P(A)=\frac{9}{20} \\ P(A\cup C)=P(A)+P(C)-P(A\cap C) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{14}{25}=\frac{9}{20}+P(C)-\frac{9}{20}P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{14}{25}-\frac{9}{20}=P(C)\left(1-\frac{9}{20}\right) \Rightarrow \frac{11}{100}=\frac{11}{20}P(C) \Rightarrow \boxed{P(C)=\frac{\frac{11}{100}}{\frac{11}{20}}=0.2}$$

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Consideremos las matrices reales $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$, con $b\neq 0$. Se pide:

a) (1.25 puntos) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1}=A$.

b) (0.75 puntos) Calcular el determinante de AA^t.

c) (0.5 puntos) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ para $b = 1$.

a) Si $BCB^{-1}=A$ entonces $BCB^{-1}B=AB \Rightarrow BC=AB$.
Sustituimos las matrices y resolvemos la ecuación matricial.

$$BC=AB\Rightarrow \begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2b & b\\ 2b & 3b & b\\ b & b & b\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\begin{pmatrix}2 & 4 & 3\\ 4 & 6 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}=b\begin{pmatrix}3-2+1 & 6-3+1 & 3-1+1\\ 1+2+1 & 2+3+1 & 1+1+1\\ 1-2+3 & 2-3+3 & 1-1+3\end{pmatrix}$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor de b. La única condición es que b no puede ser cero para que su determinante no se anule y exista su inversa B^{-1}.
Se cumple para cualquier valor de b distinto de cero.

b) Como el determinante de la matriz traspuesta A^t es igual al determinante de A tenemos que:

$$\left|AA^t\right|=|A|\cdot\left|A^t\right|=|A|\cdot|A|=|A|^2$$

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3\end{vmatrix}=9-1-1-1+3+3=12\Rightarrow \left|AA^t\right|=12^2=144$$

El determinante de AA^t vale 144.

c) Obtenemos la expresión del sistema y lo resolvemos.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+z=-1 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=3 \\ 2x+3y+z=-1 \\ z=1-x-y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+1-x-y=3 \\ 2x+3y+1-x-y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \boxed{y=2} \\ x+2y=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow x+4=-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=-6} \Rightarrow \boxed{z=1+6-2=5}$$

La solución del sistema es $x = -6$, $y = 2$, $z = 5$.

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Calcule:

a) (1.25 puntos) $\int_1^e (x+2)\ln x dx$.

b) (1.25 puntos) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

a) Calculamos primero la integral indefinida utilizando el método de integración por partes.

$$\int (x+2)\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u=\ln x \to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=(x+2)dx \to v=\int (x+2)dx=\frac{x^2}{2}+2x \end{array} \right\} =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\frac{1}{x}dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int x\left(\frac{x}{2}+2\right)\frac{1}{x}dx =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \int \left(\frac{x}{2}+2\right)dx = \left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x + C$$

Aplicamos este resultado al cálculo de la integral definida pedida.

$$\int_1^e (x+2)\ln x dx = \left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\ln x - \frac{x^2}{4} - 2x\right]_1^e =$$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\ln e - \frac{e^2}{4} - 2e\right] - \left[\left(\frac{1^2}{2}+2\right)\ln 1 - \frac{1^2}{4} - 2\right] =$$

$$=\frac{e^2}{2}+\cancel{2e}-\frac{e^2}{4}-\cancel{2e}+\frac{1}{4}+2=\boxed{\frac{e^2}{4}+\frac{9}{4}}$$

b) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)} = \left(tg\frac{\frac{\pi}{2}}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}\right)} = \left(tg\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación}$$

Si llamamos $L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$ tomamos logaritmos para resolver la indeterminación.

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}\Rightarrow \ln L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos x}\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(tg\frac{x}{2}\right)}{\cos x}=\frac{\ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\cos\frac{\pi}{2}}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\frac{1/2}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{tg\frac{x}{2}}}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1/2}{tg\frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{-\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1/2}{-\sin x tg\frac{x}{2}\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}=$$

$$=\frac{1/2}{-\sin\frac{\pi}{2}tg\frac{\pi}{4}\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}=\boxed{-1}$$

Como hemos obtenido que $\ln L=-1\Rightarrow L=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

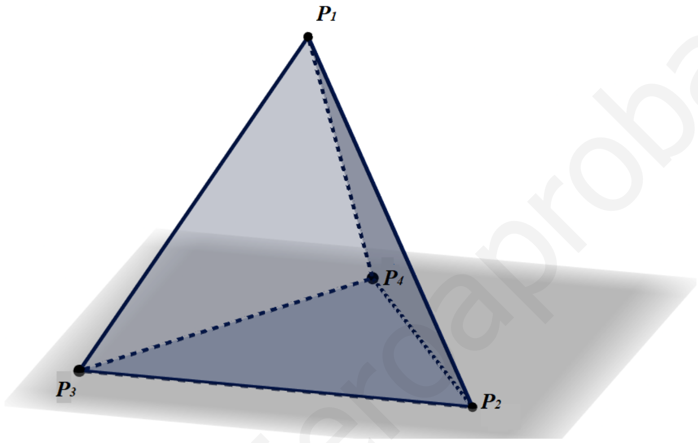
Tenemos que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}=\boxed{\frac{1}{e}}$

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,\ a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) (1.5 puntos) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es V = 1. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de *a*.

b) (1 punto) Dado el punto Q(3, 3, 3), se quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

a) El volumen del tetraedro es la sexta parte del producto mixto de los vectores que unen un punto del tetraedro con el resto.



$$\left.\begin{array}{l} P_1(1,1,1) \\ P_2(2,1,0) \\ P_3(1,3,2) \\ P_4(3,\ a,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} = (2,1,0)-(1,1,1) = (1,0,-1) \\ \overrightarrow{P_1P_3} = (1,3,2)-(1,1,1) = (0,2,1) \\ \overrightarrow{P_1P_4} = (3,a,3)-(1,1,1) = (2,a-1,2) \end{cases}$$

$$\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{vmatrix} = 4+0+0+4-0-a+1 = 9-a$$

$$\left.\begin{array}{l} Volumen = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right]\right|}{6} \\ Volumen = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|9-a|}{6} = 1 \Rightarrow |9-a| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 9-a=6 \to 3=a \\ 9-a=-6 \to 15=a \end{cases}$$

Comprobamos que sus aristas no superan la longitud 10.
Si $a = 3$ entonces quedan $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0), P_3(1,3,2), P_4(3,\ 3,3)$, hallamos los vectores que forman sus aristas y su longitud.

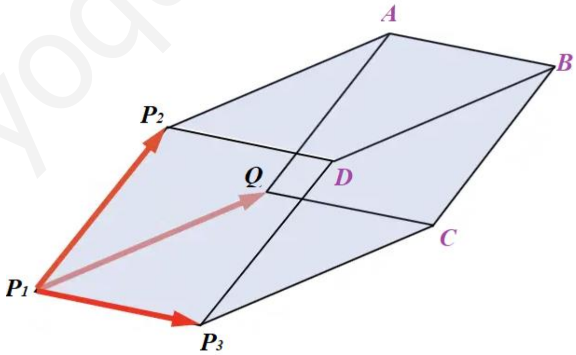
$$\left\{\begin{array}{l}
\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,0)-(1,1,1)=(1,0,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{2}<10\\
\overrightarrow{P_1P_3}=(1,3,2)-(1,1,1)=(0,2,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|=\sqrt{5}<10\\
\overrightarrow{P_1P_4}=(3,3,3)-(1,1,1)=(2,2,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|=\sqrt{12}<10\\
\overrightarrow{P_2P_3}=(1,3,2)-(2,1,0)=(-1,2,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=3<10\\
\overrightarrow{P_2P_4}=(3,3,3)-(2,1,0)=(1,2,3)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right|=\sqrt{14}<10\\
\overrightarrow{P_3P_4}=(3,3,3)-(1,3,2)=(2,0,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{5}<10
\end{array}\right. \quad \text{¡Se cumple!}$$

Si $a = 15$ entonces quedan $P_1(1,1,1), P_2(2,1,0), P_3(1,3,2), P_4(3,\ 15,3)$, hallamos los vectores que forman sus aristas y su longitud.

$$\left\{\begin{array}{l}
\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,0)-(1,1,1)=(1,0,-1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{2}<10\\
\overrightarrow{P_1P_3}=(1,3,2)-(1,1,1)=(0,2,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|=\sqrt{5}<10\\
\overrightarrow{P_1P_4}=(3,15,3)-(1,1,1)=(2,14,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|=\sqrt{204}>10\\
\overrightarrow{P_2P_3}=(1,3,2)-(2,1,0)=(-1,2,2)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|=3<10\\
\overrightarrow{P_2P_4}=(3,15,3)-(2,1,0)=(1,14,3)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_2P_4}\right|=\sqrt{206}>10\\
\overrightarrow{P_3P_4}=(3,15,3)-(1,3,2)=(2,12,1)\rightarrow\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|=\sqrt{149}>10
\end{array}\right. \quad \text{¡No se cumple!}$$

El único valor que cumple lo pedido es a = 3.

b) Dibujamos el paralelepípedo para entender mejor la situación planteada.



Hallamos las coordenadas de los vectores que definen las tres aristas básicas del paralelepípedo.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(1,1,1)\\ P_2(2,1,0)\\ P_3(1,3,2)\\ Q(3,3,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}
\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,0)-(1,1,1)=(1,0,-1)\\
\overrightarrow{P_1P_3}=(1,3,2)-(1,1,1)=(0,2,1)\\
\overrightarrow{P_1Q}=(3,3,3)-(1,1,1)=(2,2,2)
\end{array}\right.$$

Por tener caras paralelas podemos obtener los puntos A, B, C y D sumando a un vértice el vector adecuado.

$$A = P_2 + \overrightarrow{P_1Q} = (2,1,0) + (2,2,2) = (4,3,2)$$

$$B = A + \overrightarrow{P_1P_3} = (4,3,2) + (0,2,1) = (4,5,3)$$

$$C = P_3 + \overrightarrow{P_1Q} = (1,3,2) + (2,2,2) = (3,5,4)$$

$$D = P_3 + \overrightarrow{P_1P_2} = (1,3,2) + (1,0,-1) = (2,3,1)$$

Los cuatro vértices restantes del paralelepípedo son A(4,3,2), B(4,5,3), C(3,5,4) y D(2,3,1).

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:
a) (1 punto) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.
b) (1.5 puntos) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

a) Si sacamos un 2 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 4.
Si sacamos un 4 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 3.
Si sacamos un 6 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 2.

Si sacamos un 1 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 9. ¡Imposible!.
Si sacamos un 3 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 7. ¡Imposible!.
Si sacamos un 5 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar 10 debo sacar un 5.

Como hay 36 posibles resultados al lanzar dos dados y de ellos 4 resultados nos dan una puntuación de 10, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de sacar una puntuación de 10 es 4/36 =1/9.

Si sacamos un 2 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.
Si sacamos un 4 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.
Si sacamos un 6 (par) en el dado azul le sumamos el doble de lo que saquemos en el dado rojo. La suma es par.

Si sacamos un 1 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades).
Si sacamos un 3 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades)
Si sacamos un 5 (impar) en el dado azul le sumamos lo que saquemos en el dado rojo. Para sacar suma impar debo sacar número par con el dado rojo (3 posibilidades).

Como hay 36 posibles resultados al lanzar dos dados y 9 resultados nos permiten obtener puntuación impar, aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de sacar una puntuación impar es 9/36 =1/4.

b) Si la puntuación ha sido 8 esto ha podido ocurrir de una de las siguientes maneras:
(2, 3), (4, 2), (6, 1) o bien (3, 5), (5, 3).

Puede haber ocurrido de 5 formas distintas y de ellas solo hay 3 con el primer resultado (dado azul) par. Aplicando la regla de Laplace tenemos que la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 es de 3/5.

Si la puntuación final es par esto puede haber ocurrido de las siguientes formas:
(2, 1), (2,2), (2, 3), (2, 4) (2, 5), (2, 6)
Igual número de casos sacando 4 con el dado azul.
Igual número de casos sacando 6 con el dado azul.
(1, 1), (1, 3), (1, 5)
Igual número de casos sacando 3 con el dado azul.
Igual número de casos sacando 5 con el dado azul.
Puede haber ocurrido de 6 +6 + 6 + 3 + 3 + 3 = 27 formas distintas. De todas ellas solo tienen resultado impar en el segundo lanzamiento (dado rojo) en 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 18.
La probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par es 18/27 = 2/3.