Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA DE 2024
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Justifica los pasos realizados para llegar a la solución obtenida.

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\frac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a y b.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de b para que, en el punto con $x=\frac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y=\frac{\pi}{2}x$.

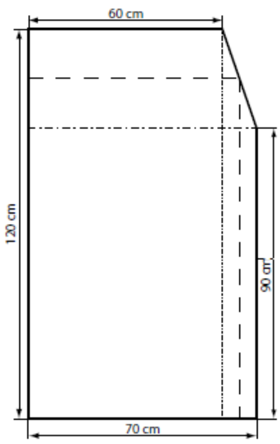
2. Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}$$

3. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+6$ y

$$g(x)=\begin{cases} -2x & si\ x<0 \\ x^2 & si\ x\ge 0 \end{cases}$$

4. En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



5. De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B,$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

6. Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix},\ m \in \mathbb{R}.$$

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A \cdot X = B$ para el valor $m = 2$.

7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1g de M_1	10	10	20
para 1g de M_2	10	20	30
para 1g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

9. Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.
(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente independientes.
(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

10. El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.
(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?
(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIONES

1. Dada la siguiente función

$$f(x)=\begin{cases} a-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad a,b\in\mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a y b.

(b) (1 punto) Para $a = 1$, calcula el valor de b para que, en el punto con $x=\dfrac{\pi}{2}$, la función tenga tangente $y=\dfrac{\pi}{2}x$.

a) La función en el intervalo $(-\infty,0)$ es $f(x)=a-\cos(x)$ que es una función continua.

La función en el intervalo $(0,+\infty)$ es $f(x)=x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ que es una función continua.

Estudiamos la continuidad en el cambio de definición: $x=0$.

Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función y los límites laterales de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a-\cos(x)=a-\cos(0)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} a-\cos(x)=a-1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)=0^2-bsen\left(0+\dfrac{\pi}{2}\right)=-b \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) \end{array}\right\}\Rightarrow a-1=-b\Rightarrow \boxed{b=1-a}$$

La función es continua en $x = 0$ cuando $b = 1-a$.

La función es continua en $\mathbb{R}$ cuando $b = 1-a$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{0\}$ cuando $b \neq 1-a$.

b) Para $a = 1$ la función queda $f(x)=\begin{cases} 1-\cos(x) & x\le 0 \\ x^2-bsen\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right) & x>0 \end{cases},\quad b\in\mathbb{R}$.

La ecuación de la recta tangente en $x=\dfrac{\pi}{2}$ es $y-f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=f´\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$f(x)=x^2-bsen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-bsen\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4}-bsen(\pi)=\frac{\pi^2}{4}$$

$$f´(x)=2x-b\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow f´\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\frac{\pi}{2}-b\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi-b\cos\pi=\pi+b$$

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{4} \\ f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi+b \\ y-f\left(\frac{\pi}{2}\right)=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{\pi^2}{4}=(\pi+b)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{2}-b\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}\Rightarrow y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}$$

La ecuación de la recta tangente en $x=\frac{\pi}{2}$ es $y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}$.

Como la recta tangente queremos que sea $y=\frac{\pi}{2}x$ deben cumplirse:

$$\left.\begin{array}{l} y=(\pi+b)x-\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2} \\ y=\frac{\pi}{2}x \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \pi+b=\frac{\pi}{2}\to \boxed{b=\frac{\pi}{2}-\pi=\frac{-\pi}{2}} \\ -\frac{\pi^2}{4}-b\frac{\pi}{2}=0\to -\pi^2-2b\pi=0\to -\pi-2b=0\to \boxed{b=\frac{-\pi}{2}} \end{array}\right.$$

El valor buscado es $b=\frac{-\pi}{2}$.

2. Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo en caso de existir:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}$$

Intentamos calcular el límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\cdot\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2x^2\right)+\left(\cos(x)\right)^2+\log(x+5)}}=$$

$$=\frac{(2-2)\cdot\left(3\cdot 2^5+5\cdot 2^4-7\cdot 2^3+2\cdot 2^2-2+3\right)+2}{3-\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{sen\left(2\cdot 2^2\right)+\left(\cos(2)\right)^2+\log(2+5)}}=$$

$$=\frac{0\cdot 129+2}{3-0\cdot\sqrt{sen(8)+\left(\cos(2)\right)^2+\log 7}}=\frac{2}{3-0\cdot\sqrt{1.983}}=\boxed{\frac{2}{3}}$$

El límite existe pues el radicando de la raíz del denominador existe en un entorno de $x = 2$. La función está definida en un entorno de $x = 2$ y es continua. El valor del límite es 2/3.

3. Calcula el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x+6$ y $g(x)=\begin{cases}-2x & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}$

Hallamos los puntos de corte de sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x+6\\ g(x)=\begin{cases}-2x & si\ x<0\\ x^2 & si\ x\geq 0\end{cases}\\ f(x)=g(x)\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -2x=x+6 \to -3x=6 \to x=\dfrac{6}{-3}=\boxed{-2\in(-\infty,0)}\\ x^2=x+6 \to x^2-x-6=0 \to x=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-6)}}{2}= \\ =\dfrac{1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+5}{2}=\boxed{3\in[0,+\infty)}\\ \dfrac{1-5}{2}=-2\notin[0,+\infty)\end{cases}\end{cases}$$

Las gráficas de las funciones se cortan en $x=-2$ y en $x=3$. El área encerrada por sus gráficas la dividimos en dos partes: una entre –2 y 0 y otra entre 0 y 3.
Área de la zona 1.

$$\int_{-2}^{0} f(x)-g(x)dx=\int_{-2}^{0} x+6-(-2x)dx=\int_{-2}^{0} 3x+6dx=$$

$$=\left[3\frac{x^2}{2}+6x\right]_{-2}^{0}=\left[3\frac{0^2}{2}+6\cdot 0\right]-\left[3\frac{(-2)^2}{2}+6(-2)\right]=-6+12=6$$

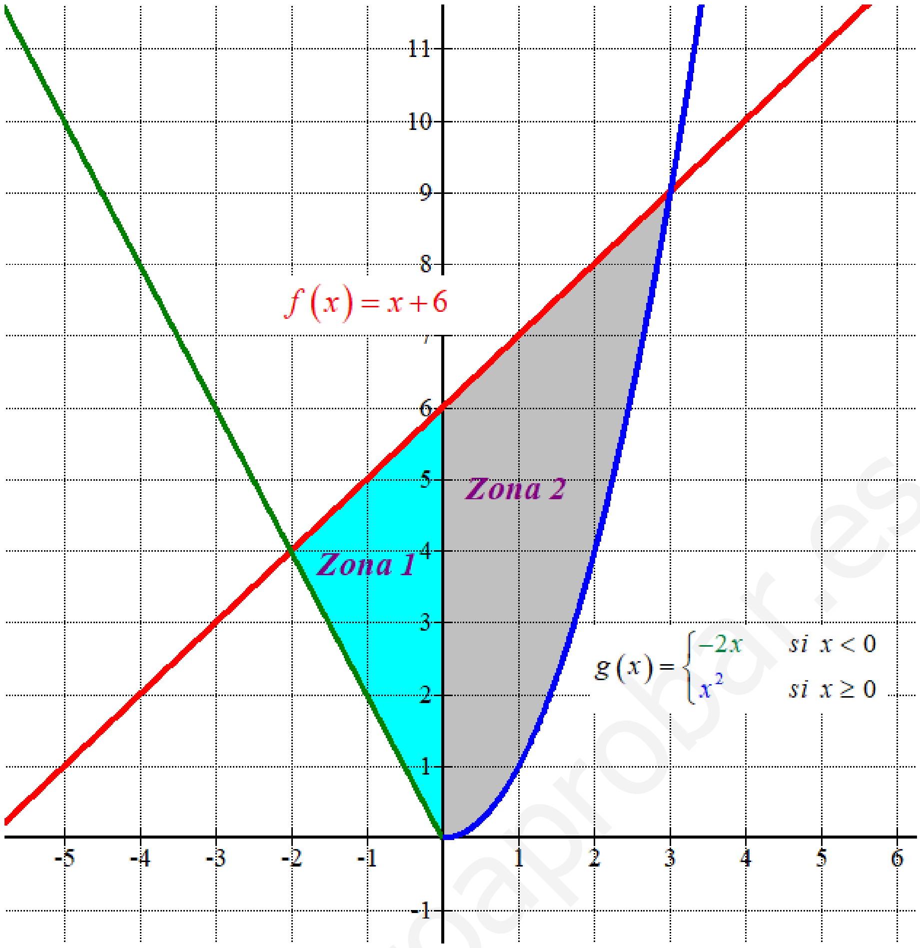
El área de la zona 1 tiene un valor de 6 unidades cuadradas.
Área de la zona 2.

$$\int_{0}^{3} f(x)-g(x)dx=\int_{0}^{3} x+6-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}+6x-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{3}=$$

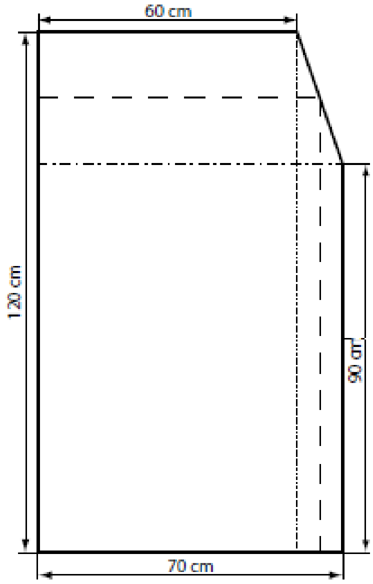
$$=\left[\frac{3^2}{2}+6\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}+6\cdot 0-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{9}{2}+18-9=13.5$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 13.5 unidades cuadradas.
El área encerrada por las gráficas de las dos funciones es la suma de lo obtenido.

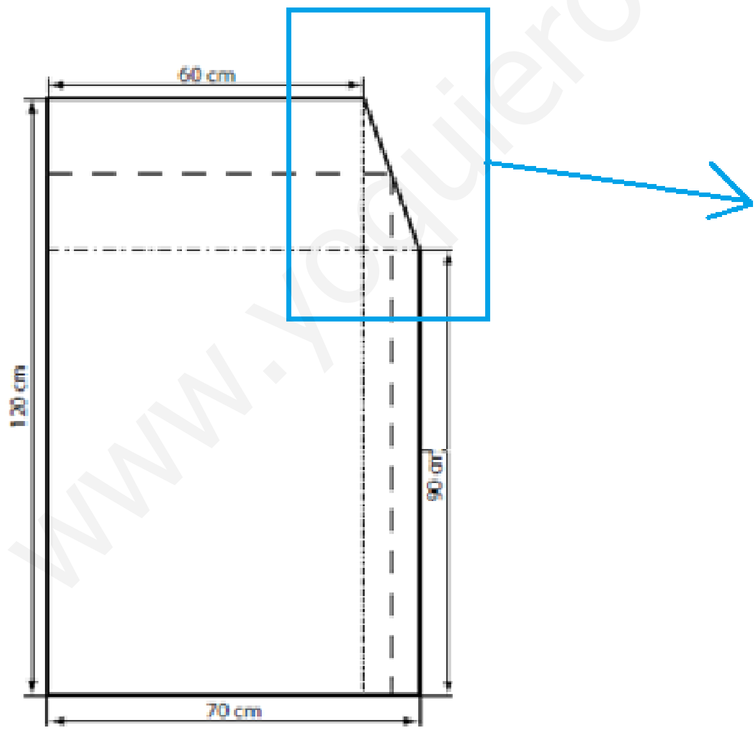
$$Área=6+13.5=19.5\ u^2$$

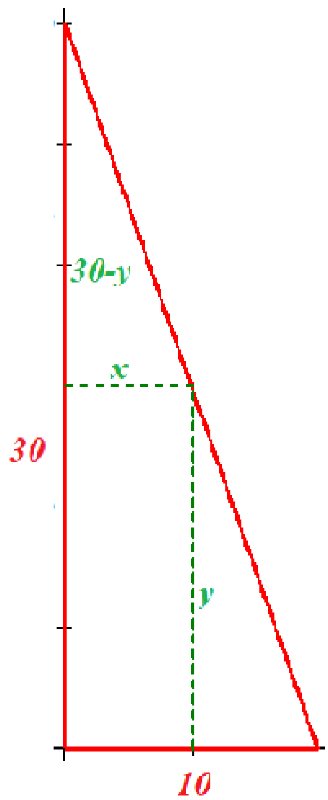

$f(x) = x + 6$
Zona 1
Zona 2
$g(x) = \begin{cases} -2x & si\ x < 0 \\ x^2 & si\ x \geq 0 \end{cases}$
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

4. En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



Queremos cortar un rectángulo de base "*x*" y altura "*y*".
La situación es la del dibujo.

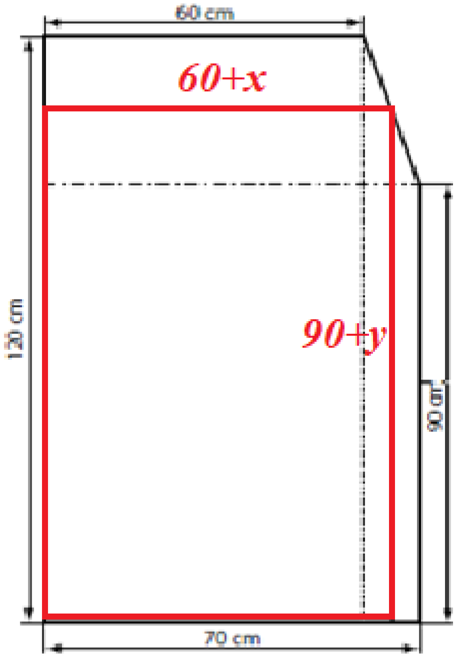




Como el triángulo rojo de catetos 10 y 30 es semejante al de catetos "*30 – y*" y "*x*" tenemos:

$$\frac{30-y}{30}=\frac{x}{10}\Rightarrow\frac{30-y}{3}=x\Rightarrow 30-y=3x\Rightarrow 30-3x=y$$

El rectángulo que queremos cortar tiene de lados “*60 +x*” y “*90 + y*”.



El área del rectángulo es $A(x,y)=(x+60)(y+90)$, siendo $0\le x\le 10;\ 0\le y\le 30$.
El área del nuevo rectángulo queda:

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=(x+60)(y+90) \\ y=30-3x \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=(x+60)(30-3x+90)=(x+60)(120-3x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x)=120x-3x^2+7200-180x=-3x^2-60x+7200$$

Buscamos los puntos críticos de la función área.

$$A(x)=-3x^2-60x+7200\Rightarrow A'(x)=-6x-60$$

$$A'(x)=0\Rightarrow -6x-60=0\Rightarrow x+10=0\Rightarrow x=-10\notin[0,10]$$

El punto crítico obtenido no pertenece al intervalo [0, 10].
La función área solo está definida entre 0 y 10, siendo la derivada negativa en todo el intervalo, por lo que el valor más alto lo alcanza en el extremo inferior del intervalo: *x = 0*.

La función área en el intervalo [0, 10] tiene un valor máximo en *x = 0*.
Para este valor tenemos que $y=30-0=30$.
Las dimensiones del rectángulo de área máxima son 60 + 0 = 60 y 90 + 30 = 120.
El nuevo cristal rectangular recortado con área máxima tiene dimensiones 60 × 120 cm.

5. De una matriz B sabemos que cumple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B,$$

donde I_3 es la matriz identidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B.

Despejamos B en la igualdad planteada.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} \cdot B + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} \right] \cdot B = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix} \cdot B = I_3 \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$$

Existe la inversa de B y tiene la expresión $B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$.

6. Dadas las siguientes matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 4 & 4 & 2m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 12\end{pmatrix},\ m\in\mathbb{R}.$$

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.
(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $A\cdot X=B$ para el valor $m=2$.

(a) Usamos el método de Gauss para obtener una matriz triangular equivalente a la matriz A para establecer su rango.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & m & m\\ 4 & 4 & 2m\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{ccc}1 & m & m\\ -1 & -1 & -1\\ \hline 0 & m-1 & m-1\rightarrow Nueva\ Fila\,2^a\end{array}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-4\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{ccc}4 & 4 & 2m\\ -4 & -4 & -4\\ \hline 0 & 0 & 2m-4\rightarrow Nueva\ Fila\,3^a\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & m-1 & m-1\\ 0 & 0 & 2(m-2)\end{pmatrix}$$

Existen tres posibilidades.

1ª posibilidad. $m-1=0\rightarrow m=1$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

2ª posibilidad. $m-2=0\rightarrow m=2$

En este caso la matriz equivalente queda $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$. El rango de A es 2.

3ª posibilidad. $m\neq 1$ y $m\neq 2$

En este caso la matriz equivalente tiene tres filas no nulas. El rango de A es 3.

(b) Cuando $m=2$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}$. Obtenemos el sistema y lo resolvemos.

$$A\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2\\ 4 & 4 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 5\\ 12\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\\ 4x+4y+4z=12\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\\ x+y+z=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{Ecuación\,1^a=Ecuación\,3^a\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+z=3\\ x+2y+2z=5\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=3-y-z\\ x+2y+2z=5\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-y-z+2y+2z=5 \Rightarrow y+z=2 \Rightarrow \boxed{y=2-z} \Rightarrow \boxed{x=3-2+z-z=1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

Cuando $m = 2$ las soluciones del sistema son: $\begin{cases} x=1 \\ y=2-\lambda;\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$

7. En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento:

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
para 1g de M_1	10	10	20
para 1g de M_2	10	20	30
para 1g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3? En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Llamamos "x" a los gramos del medicamento M_1, "y" a los gramos del medicamento M_2 y "z" a los gramos de M_3.

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
x g de M_1	10x	10x	20x
y g de M_2	10y	20y	30y
z g de M_3	20z	30z	50z
TOTALES	$10x+10y+20z$	$10x+20y+30z$	$20x+30y+50z$

Se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2 y 160 gramos del activo A_3 → $10x+10y+20z=70000$, $10x+20y+30z=90000$, $20x+30y+50z=160000$.

Planteamos un sistema con las tres ecuaciones e intentamos resolverlo.

$$\left.\begin{array}{r}10x+10y+20z=70000\\10x+20y+30z=90000\\20x+30y+50z=160000\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y+2z=7000\\x+2y+3z=9000\\2x+3y+5z=16000\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x=7000-y-2z\\x+2y+3z=9000\\2x+3y+5z=16000\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}7000-y-2z+2y+3z=9000\\2(7000-y-2z)+3y+5z=16\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}y+z=2000\\14000-2y-4z+3y+5z=16000\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}y+z=2000\\y+z=2000\end{array}\right\}\Rightarrow y+z=2000\Rightarrow\boxed{y=2000-z}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=7000-2000+z-2z=5000-z}\Rightarrow\begin{cases}x=5000-\lambda\\y=2000-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$$

Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio, por ejemplo dando el valor $\lambda=0$ se consigue fabricando 5000 gramos del medicamento M_1, 2000 gramos de M_2 y 0 gramos de M_3.

Existen muchas formas posibles de hacerlo, dando valores de λ que hagan que la solución sea positiva (gramos), lo que implica que el valor de λ debe estar entre 0 y 2000.

8. Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases}$ y además pasa por el punto (3, 2, 1).

Hallamos el vector director de la recta.

$$\begin{cases} 2x+y-z=0 \\ x-y+z=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+y-z=0 \\ z=-3+y-x \end{cases} \Rightarrow 2x+y+3-y+x=0 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-3}{3}=-1 \Rightarrow z=-3+y+1=-2+y \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=\lambda \\ z=-2+\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$$

El vector normal del plano es el vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$. Hallamos la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(0,1,1) \\ (3,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: y+z+D=0 \\ (3,2,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow 2+1+D=0 \Rightarrow D=-3 \Rightarrow \pi: y+z-3=0$$

La ecuación de un plano que es perpendicular a la recta y además pasa por el punto (3, 2, 1) es el plano de ecuación $\pi: y+z-3=0$.

9. Sean A(1, 2, 3), B(1, 0, –1) y C(2, 2, 2) tres puntos en el espacio y $\vec{v_1}$ el vector que va de A a B; $\vec{v_2}$ el vector que va de B a C y $\vec{v_3}$ el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

(a) Hallamos las coordenadas de los vectores.

$$\vec{v_1} = \overrightarrow{AB} = (1,0,-1)-(1,2,3) = (0,-2,-4)$$

$$\vec{v_2} = \overrightarrow{BC} = (2,2,2)-(1,0,-1) = (1,2,3)$$

$$\vec{v_3} = \overrightarrow{CA} = (1,2,3)-(2,2,2) = (-1,0,1)$$

Para que los vectores sean linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\right]$ debe ser no nulo.

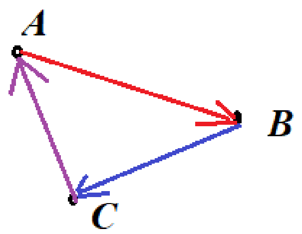
$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=(0,-2,-4)\\ \vec{v_2}=(1,2,3)\\ \vec{v_3}=(-1,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\right] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+6+0-8+2+0 = 0$$

El producto mixto es nulo y los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo es pensar que los tres puntos definen un plano y los tres vectores pertenecen al mismo plano, por lo que los vectores son linealmente dependientes.

Otra forma de razonarlo:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_1}=\overrightarrow{AB}\\ \vec{v_2}=\overrightarrow{BC}\\ \vec{v_3}=\overrightarrow{CA}\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2}+\vec{v_3}=\vec{0}$$



Los vectores son linealmente dependientes.

(b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,-2,-4)\\ \overrightarrow{AC}=(2,2,2)-(1,2,3)=(1,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i-4j+0+2k-0-0 = 2i-4j+2k = (2,-4,2)$$

$$Área = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}}{2} = \frac{\sqrt{24}}{2} = \sqrt{6}\ u^2$$

El área del triángulo cuyos vértices son A, B, C tiene un valor de $\sqrt{6}$ unidades cuadradas.

10. El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EvAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.
(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?
(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?

Llamamos X a la variable aleatoria que da el número de exámenes con una nota inferior a 5 de una muestra de 15 exámenes.
Esta variable es binomial de parámetros n = 15 y p = 1 – 0.84 = 0.16.
X = B(15, 0.16)

(a) Nos piden calcular $P(X=2)$.

$$P(X=2)=\binom{15}{2}0.16^2\cdot 0.84^{13}\simeq 0.27865$$

La probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5 es de 0.27865.

(b) Hallamos la probabilidad de los sucesos “menos de 2 exámenes con nota inferior a 5” y “más de 2 exámenes con nota inferior a 5”.

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=\binom{15}{0}0.16^0\cdot 0.84^{15}+\binom{15}{1}0.16^1\cdot 0.84^{14}\simeq 0.2821$$

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(x<2)+P(X=2)\right]\simeq 1-\left[0.2821+0.27865\right]\simeq 0.43925$$

Tenemos que $P(X<2)=0.2821<0.43925=P(X>2)$.
Es más probable que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5.