



## MATEMÁTICAS II

- Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.
- Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

**Pregunta 1.** Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € en cada taza, 4 € en cada plato y 3 € en cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.
- (c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

**Pregunta 2.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = (1 \ 1 \ 2)$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?
- (b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de  $x$  el rango de  $A$ . Para  $x = 0$ , comprueba que existe  $A^{-1}$  y calcúlala.

**Pregunta 3.** Se considera la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$ .

- (a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función  $f$  y sus asíntotas.
- (b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- (c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de  $f$ .

**Pregunta 4.** Dada la función  $f(x) = \operatorname{sen}(\pi - 2x)$ .

- (a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .
- (b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por  $f$ , el eje X y las rectas  $x = -\frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{\pi}{4}$ .

---

**Pregunta 5.** Se consideran los puntos  $A = (0, -1, 1)$  y  $B = (2, 1, 3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano  $\pi$  que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.
- (b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + z = 3$  y que contiene al punto  $Q = (1, 0, 1)$ .
- 

**Pregunta 6.** Se consideran los puntos  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 0, 2)$ ,  $C = (-1, 1, 3)$  y  $D = (-1, 0, 1)$ .

- (a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
- (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta  $r$  que pasa por D y es perpendicular al plano  $\pi$  que contiene a A, B y C.
- (c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de  $r$  y  $\pi$  del apartado anterior.
- 

**Pregunta 7.** En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

- (a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?
- (b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?
- 

**Pregunta 8.** En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?
- (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?
- (c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?
- 

Algunos valores de la función de distribución  $N(0, 1)$  son:  $F(x) = P(Z \leq x)$ ,  $F(0) = 0.5$ ,  $F(0.15) = 0.5596$ ,  $F(0.3333) = 0.6294$ ,  $F(0.385) = 0.65$ ,  $F(0.5596) = 0.7112$ ,  $F(0.6294) = 0.7356$ ,  $F(0.8159) = 0.7939$ ,  $F(0.9) = 0.8159$ ,  $F(1.28) = 0.9$ .

**SOLUCIONES:**

**Pregunta 1.** Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 € cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

- (a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.
- (b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.
- (c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

a) Llamamos “x” al número de tazas, “y” al número de platos y “z” al número de teteras de cerámica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Tiempo (minutos)	Coste material
Nº tazas (x)	5x	3x
Nº platos (y)	4y	4y
Nº teteras (z)	8z	3z
TOTALES	5x + 4y + 8z	3x + 4y + 3z

Establecemos las ecuaciones del problema.

“Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.”  $\Rightarrow 5x + 4y + 8z = 50$ ,  $3x + 4y + 3z = 26$ .

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

b) Añadimos una tercera ecuación.

En estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas  $\Rightarrow x + y + z = 8$ .

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x + y + z = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 8z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x = 8 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(8 - y - z) + 4y + 8z = 50 \\ 3(8 - y - z) + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 40 - 5y - 5z + 4y + 8z = 50 \\ 24 - 3y - 3z + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y + 3z = 10 \\ y = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2 + 3z = 10 \Rightarrow 3z = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} z = \frac{12}{3} = 4 \\ x = 8 - 2 - 4 = 2 \end{array} \right\}$$

Se fabricaron 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

- c) Cambiamos la primera y la tercera ecuación que ahora serían:  $5x + 4y + 5z = 50$  e  $x + y + z = 10$ .

Intentamos resolver el nuevo sistema.

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x + y + z = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5x + 4y + 5z = 50 \\ 3x + 4y + 3z = 26 \\ x = 10 - y - z \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 5(10 - y - z) + 4y + 5z = 50 \\ 3(10 - y - z) + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 50 - 5y - 5z + 4y + 5z = 50 \\ 30 - 3y - 3z + 4y + 3z = 26 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -y = 0 \\ y = -4 \end{array} \right\} \text{¡Imposible!}$$

La situación planteada no es posible pues el sistema no tiene solución.

**Pregunta 2.** Sea  $x \in \mathbb{R}$  y las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ ,  $B = (1 \ 1 \ 2)$ ,  $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?  
 (b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de  $x$  el rango de A. Para  $x = 0$ , comprueba que existe  $A^{-1}$  y calcúlala.

a) Vemos si es posible el producto CAB.

$$C \cdot A \cdot B$$

$$3 \times \boxed{1 \cdot 3} \times \boxed{3 \cdot 1} \times 3$$

No es posible el producto CA pues la matriz C tiene 1 columna y la matriz A tiene 3 filas (no coinciden  $\rightarrow$  no es posible el producto). Tampoco es posible el producto AB pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 1 fila (no coinciden  $\rightarrow$  no es posible el producto). No es posible realizar el producto CAB.

Vemos si es posible el producto BAC.

$$B \cdot A \cdot C$$

$$1 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{3 \cdot 3} \times 1 \rightarrow 1 \times 1$$

Es posible el producto BA pues la matriz B tiene 3 columnas y la matriz A tiene 3 filas (coinciden  $\rightarrow$  es posible el producto). También es posible el producto AC pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz C tiene 3 filas (coinciden  $\rightarrow$  es posible el producto). Es posible realizar el producto BAC, siendo la matriz resultante de dimensiones  $1 \times 1$ .

b) El rango de  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$  puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 + 2x - 0 = 12 + 2x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow x = \frac{-12}{2} = -6$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

**CASO 1.**  $x \neq -6$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

**CASO 2.**  $x = -6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ . Como la fila segunda y la tercera son proporcionales

consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras  $\rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 = 2 \neq 0.$$

El rango de A es 2.

**Conclusión:** Si  $x \neq -6$  el rango de A es 3 y si  $x = -6$  el rango de A es 2.

Para  $x = 0$  la matriz queda  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  y su determinante vale  $12 + 0 = 12 \neq 0$ .

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 6 & -6 & -6 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa tiene la expresión  $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$ .

**Pregunta 3.** Se considera la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x}$ .

- (a) (1 punto) Calcula el dominio de la función  $f$  y sus asíntotas.  
 (b) (1 punto) Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.  
 (c) (0.5 puntos) Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de  $f$ .

- a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$\text{Dominio } f(x) = \mathbb{R} - \{1\}.$$

**Asíntota vertical.**  $x = a$

¿ $x = 1$  es asíntota vertical?

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \frac{1^2 - 4}{1 - 1} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x = 1$  es asíntota vertical

**Asíntota horizontal.**  $y = b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}} = \frac{1 - 0}{0 - 0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

**Asíntota oblicua.**  $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 - 4}{1 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 4}{1 - x} + x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 + x - x^2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4}{1 - x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - \frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \frac{1 - \frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty} - 1} = \frac{1 - 0}{0 - 1} = -1$$

La recta  $y = -x - 1$  es asíntota oblicua de la función.

- b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{1 - x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(1 - x) - (-1)(x^2 - 4)}{(1 - x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2 - 4}{(1 - x)^2} = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1 - x)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2} = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \text{¡Imposible!}$$

La derivada nunca se anula, por lo que la derivada siempre es positiva o negativa. Probamos con  $x = 0$  antes del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$$f'(0) = \frac{-0^2 + 2 \cdot 0 - 4}{(1-0)^2} = -4 < 0, \text{ la función es decreciente en } (-\infty, 1).$$

Si tomamos  $x = 2$  después del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$$f'(2) = \frac{-2^2 + 2 \cdot 2 - 4}{(1-2)^2} = -4 < 0, \text{ la función es decreciente en } (1, +\infty).$$

La función decrece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos locales. Buscamos los puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 4}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{(-2x+2)(1-x)^2 - 2(1-x)(-1)(-x^2 + 2x - 4)}{(1-x)^4} =$$

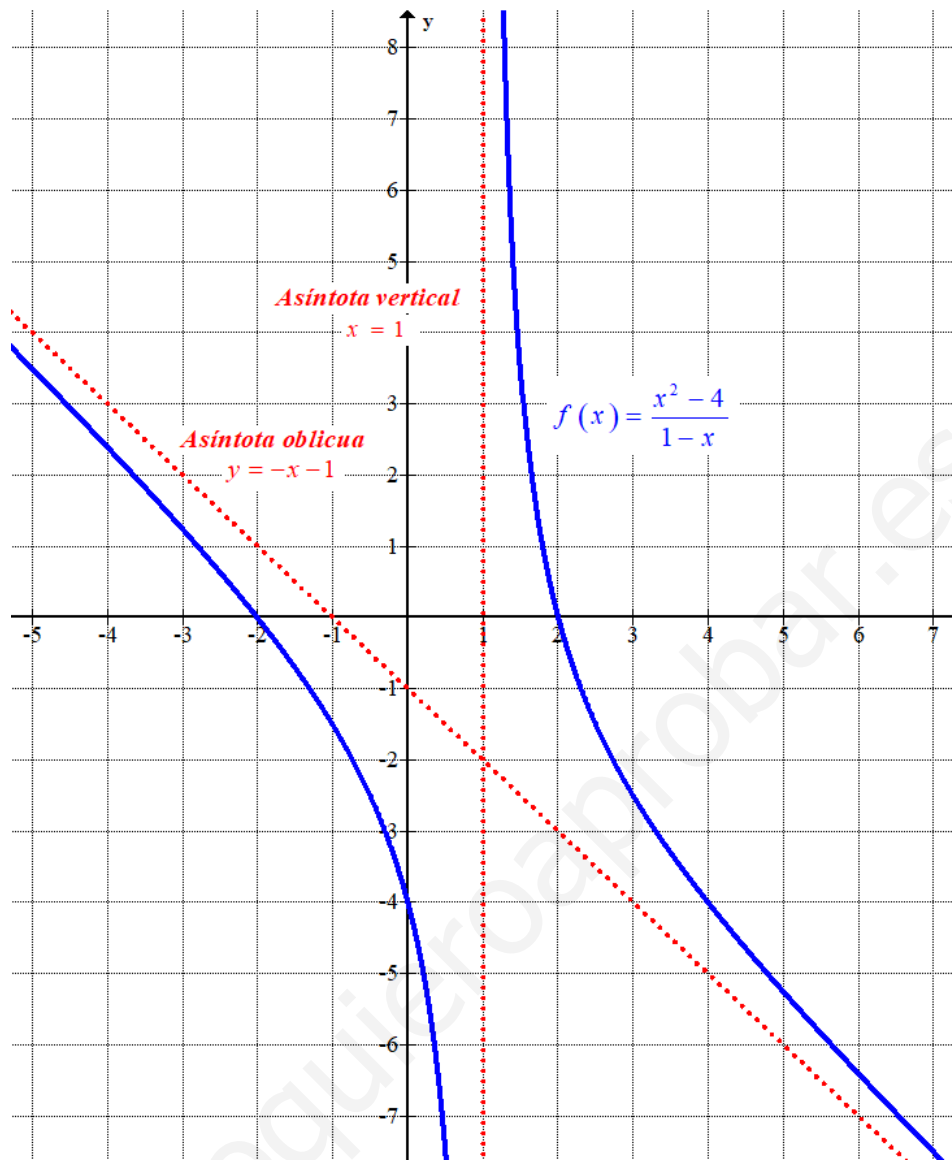
$$= \frac{(-2x+2)(1-x) - 2(-1)(-x^2 + 2x - 4)}{(1-x)^3} = \frac{-2x + 2x^2 + 2 - 2x - 2x^2 + 4x - 8}{(1-x)^3} = \frac{-6}{(1-x)^3}$$

Esta segunda derivada nunca se anula, pero cambia de signo en  $x = 1$  valor excluido del dominio. No existen puntos de inflexión.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

$x$	$f(x) = \frac{x^2 - 4}{1-x}$
-1	-1.5
0	-4
2	0
3	-2.5





**Pregunta 4.** Dada la función  $f(x) = \text{sen}(\pi - 2x)$ .

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ .

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por  $f$ , el eje X y las rectas  $x = -\frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{\pi}{4}$ .

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \text{sen}(\pi - 2x) dx = \frac{1}{2} \int (-2)(-\text{sen}(\pi - 2x)) dx = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  debe cumplirse que  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ .

$$\left. \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + C \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cos(0) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$$

La primitiva buscada es  $F(x) = \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$ .

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = \text{sen}(\pi - 2x) \\ \text{Eje X} \rightarrow y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{sen}(\pi - 2x) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \\ \pi - 2x = -\pi \rightarrow 2x = 2\pi \rightarrow x = \pi \\ \pi - 2x = 0 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2x = \pi \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \pi - 2x = 2\pi \rightarrow -2x = \pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} \\ \dots \end{array} \right.$$

En el intervalo  $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$  la función corta el eje X en  $x = 0$ . El área la calculamos como la

suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre  $-\frac{\pi}{4}$  y 0, la otra entre 0 y  $\frac{\pi}{4}$ .

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_{-\pi/4}^0 f(x) dx = \int_{-\pi/4}^0 \operatorname{sen}(\pi - 2x) dx = \left[ \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) \right]_{-\pi/4}^0 =$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \cos(\pi - 2 \cdot 0) \right] - \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \right] = \frac{1}{2} \cos \pi - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.

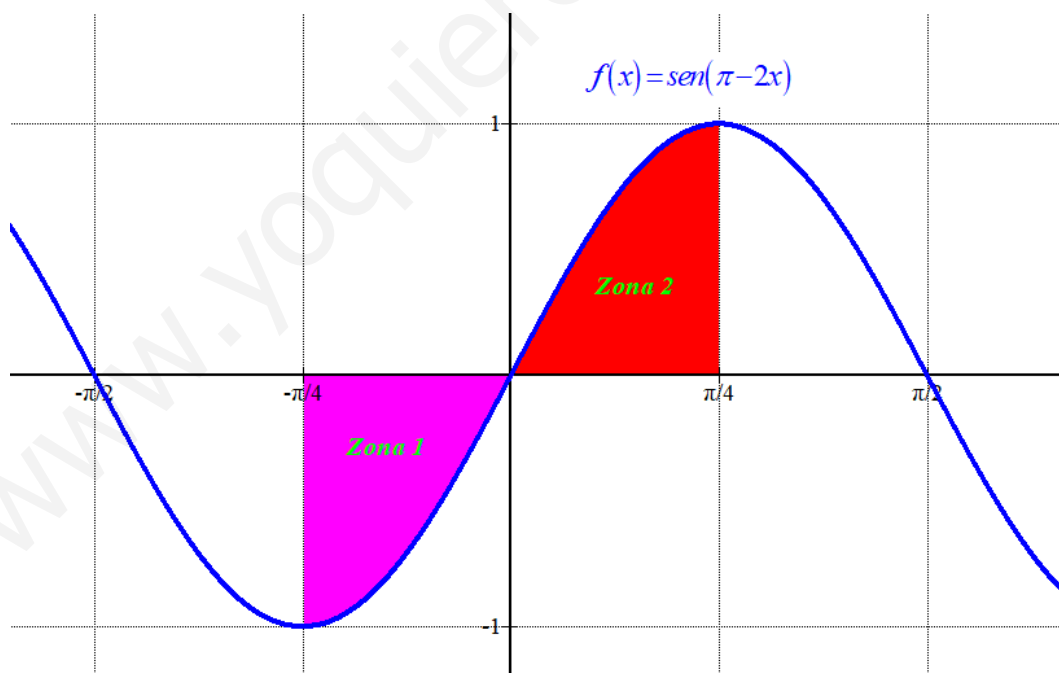
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_0^{\pi/4} f(x) dx = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(\pi - 2x) dx = \left[ \frac{1}{2} \cos(\pi - 2x) \right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[ \frac{1}{2} \cos\left(\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) \right] - \left[ \frac{1}{2} \cos(\pi - 2 \cdot 0) \right] = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \cos \pi = 0 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

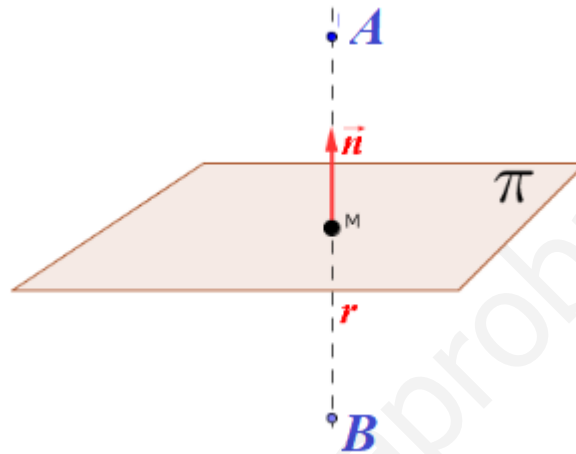
El área limitada por  $f$ , el eje X y las rectas  $x = -\frac{\pi}{4}$  y  $x = \frac{\pi}{4}$  es la suma de las áreas obtenidas, es decir,  $0.5 + 0.5 = 1$  unidad cuadrada.



**Pregunta 5.** Se consideran los puntos  $A=(0,-1,1)$  y  $B=(2,1,3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

- (a) (1.25 puntos) Encuentra la ecuación del plano  $\pi$  que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.  
 (b) (1.25 puntos) Encuentra la ecuación continua de la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + z = 3$  y que contiene al punto  $Q=(1,0,1)$ .

- a) El plano respecto del cual los dos puntos son simétricos contienen el punto medio  $M$  del segmento  $AB$ . Además, el plano buscado tiene como vector normal el vector  $\overline{AB}$ .



Hallamos la ecuación del plano que pasa por  $M$  y tiene como vector normal  $\overline{AB}$ .

$$M = \text{Punto medio } \overline{AB} = \frac{(0,-1,1) + (2,1,3)}{2} = (1,0,2)$$

$$\overline{AB} = (2,1,3) - (0,-1,1) = (2,2,2) \Rightarrow \vec{n} = \frac{\overline{AB}}{2} = (1,1,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} M = (1,0,2) \in \pi \\ \vec{n} = (1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} M = (1,0,2) \in \pi \\ \pi : x + y + z + D = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 1 + 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + z - 3 = 0}$$

El plano  $\pi$  que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él tiene ecuación  $\pi : x + y + z - 3 = 0$ .

- b) La ecuación de la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$  que pasa por el punto  $Q=(1,0,1)$  tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} Q = (1,0,1) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (1,1,1) \end{array} \right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}$$

La ecuación de la recta  $r$  perpendicular al plano  $\pi \equiv x + y + z - 3 = 0$  que pasa por el punto

$$Q = (1, 0, 1) \text{ es } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} .$$

**Pregunta 6.** Se consideran los puntos  $A=(1,1,1)$ ,  $B=(1,0,2)$ ,  $C=(-1,1,3)$  y  $D=(-1,0,1)$ .

- (a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.  
 (b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta  $r$  que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano  $\pi$  que contiene a  $A$ ,  $B$  y  $C$ .  
 (c) **(1 punto)** Calcula el punto  $P$  intersección de  $r$  y  $\pi$  del apartado anterior.

a) Hallamos el plano  $\pi$  que contiene a los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

$$\left. \begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,0,2) - (1,1,1) = (0,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1,1,3) - (1,1,1) = (-2,0,2) \\ B(1,0,2) \in \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1) - 2y + 0 - 2(z-2) - 0 - 0 = 0 \Rightarrow -2x + 2 - 2y - 2z + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x - 2y - 2z + 6 = 0 \Rightarrow \boxed{\pi : x + y + z - 3 = 0}$$

Comprobamos si el punto  $D$  pertenece al plano  $\pi : x + y + z - 3 = 0$ .

$$\left. \begin{array}{l} \pi : x + y + z - 3 = 0 \\ \text{¿} D(-1,0,1) \in \pi? \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + 0 + 1 - 3 = 0? \Rightarrow -3 = 0?$$

La igualdad no es cierta y el punto  $D$  no pertenece al plano definido por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ . No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  tiene ecuación  $\pi : x + y + z - 3 = 0$ .

La recta  $r$  que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano  $\pi$  tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : x + y + z - 3 = 0 \Rightarrow \vec{n} = (1,1,1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_r = \vec{n} = (1,1,1) \\ D(-1,0,1) \in r \end{array} \right\} \Rightarrow r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

La recta  $r$  que pasa por  $D$  y es perpendicular al plano  $\pi$  que contiene a  $A$ ,  $B$  y  $C$  tiene

$$\text{ecuación } r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta.

$$\left. \begin{array}{l} r : \begin{cases} x = -1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \\ \pi : x + y + z - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 + \lambda + \lambda + 1 + \lambda - 3 = 0 \Rightarrow 3\lambda = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 1 = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow P(0,1,2)$$

El punto P intersección de la recta  $r$  y el plano  $\pi$  tiene coordenadas  $P(0,1,2)$ .

**Pregunta 7.** En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’ y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’, ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Llamamos  $C$  = “el estudiante cursa el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología” e  $I$  = “el estudiante cursa como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’”. Los datos proporcionados nos permiten determinar que  $P(C) = 0.55$ ,  $P(I/C) = 0.30$ ,  $P(I/\bar{C}) = 0.40$ .

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C) = 0.30 \Rightarrow \frac{P(I \cap C)}{P(C)} = 0.3 \Rightarrow \boxed{P(I \cap C) = 0.3 \cdot 0.55 = 0.165}$$

$$P(I/\bar{C}) = 0.40 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{P(\bar{C})} = 0.4 \Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - P(C)} = 0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I \cap \bar{C})}{1 - 0.55} = 0.4 \Rightarrow \boxed{P(I \cap \bar{C}) = 0.4 \cdot 0.45 = 0.18}$$

b) Como  $P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C})$  podemos calcular la probabilidad de que un estudiante curse como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’.

$$P(I) = P(I \cap C) + P(I \cap \bar{C}) = 0.165 + 0.18 = \boxed{0.345}$$

La probabilidad de que haya cursado ‘Proyecto de Investigación Integrado’ es de 0.345.

c) Nos piden calcular  $P(C/\bar{I})$ . Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\bar{I}) = \frac{P(C \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \frac{P(C) - P(C \cap I)}{P(\bar{I})} = \frac{0.55 - 0.165}{1 - 0.345} = \boxed{\frac{77}{141} \approx 0.5878}$$

La probabilidad de que un estudiante que no cursa como optativa la asignatura ‘Proyecto de Investigación Integrado’ esté cursando el bachillerato de Ciencias y Tecnología es de

$$\frac{77}{141} \approx 0.5878.$$

*Esta pregunta 7 es igual que la pregunta 7 de la convocatoria ordinaria.*



**Pregunta 8.** En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

- (a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?  
 (b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?  
 (c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

Llamamos  $X$  = la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses.  
 $X$  es una distribución normal de media  $\mu = 85$  kg y  $\sigma = 15$  kg.  $X = N(85, 15)$

- a) Calculamos la probabilidad  $P(X > 90)$ .

$$P(X > 90) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{90-85}{15}\right) = P(Z > 0.3333) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.3333) = 1 - F(0.3333) = 1 - 0.6294 = \boxed{0.3706}$$

El porcentaje de población que genera más de 90 kg en dos meses es de 37.06 %.

- b) Como  $P(X > 90) = 0.3706$  entonces  $P(X < 90) = 1 - 0.3706 = 0.6294$ . Multiplicamos esta probabilidad por los 10 000 habitantes de la muestra y obtenemos que  $10000 \cdot 0.6294 = 6294$  habitantes generan menos de 90 kg de basura en dos meses.

- c) Tenemos que  $P(X < 70) = \frac{5596}{10000} = 0.5596$ .

$$P(X < 70) = 0.5596 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow P\left(Z < \frac{70-\mu}{15}\right) = 0.5596 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ F(0.15) = 0.5596 \rightarrow P(Z \leq 0.15) = 0.5596 \right\} \Rightarrow \frac{70-\mu}{15} = 0.15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70 - \mu = 15 \cdot 0.15 \Rightarrow 70 - 15 \cdot 0.15 = \mu \Rightarrow \boxed{\mu = 67.75}$$

La nueva media tiene un valor de 67.75 kg.