Universidad de Cantabria

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL

ACCESO A LA UNIVERSIDAD

JULIO 2024

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES

- Debe escoger solo cuatro ejercicios entre los ocho de los que consta el examen.
- Si realiza más de cuatro ejercicios solo se corregirán los cuatro primeros, según el orden que aparecen resueltos en el cuadernillo de examen.
- Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
- Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
- No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\leq 5 \\ \ln\left(x^2-25\right), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si *f*(*x*) tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = ax + sen(x)$, en función de la constante real *a*, con $x \in [0, 2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de *a* calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea *A* el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y *B* el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^C) = 0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de *B*.

1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.

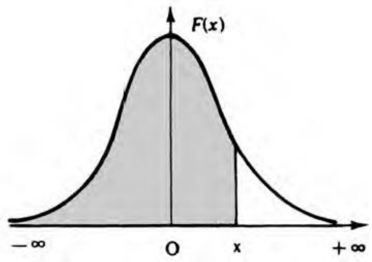
2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cap B^C)$.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

Distribución normal

$$F(x) = p(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999

SOLUCIONES

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

El rango de A es 4, 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de la matriz A. Utilizamos el desarrollo por la cuarta columna.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-2a^2+1+0+2-0-a\right)+3\left(-a+0-2-0-1-0\right)=$$

$$=2\left(-2a^2+3-a\right)+3\left(-a-3\right)=-4a^2+6-2a-3a-9=-4a^2-5a-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -4a^2-5a-3=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-4)(-3)}}{2(-4)}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{-8}=\text{No existe}$$

Como el determinante de la matriz A no se anula nunca el rango de A es 4 para cualquier valor del parámetro *a*.

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f\left(x\right)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\leq 5 \\ \ln\left(x^2-25\right), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si *f*(*x*) tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

1) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Y la función no es continua en $x = 5$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 5^-} f\left(x\right)=\lim_{x\to 5^-} x^3-10x^2+25x=5^3-10\cdot 5^2+25\cdot 5=0$$

$$\lim_{x\to 5^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to 5^+} \ln\left(x^2-25\right)=\ln\left(5^2-25\right)=\ln 0=-\infty$$

$x=5$ es asíntota vertical cuando x tiende a 5 por la derecha.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Calculamos el límite de la función en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to +\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to +\infty} \ln\left(x^2-25\right)=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to -\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to -\infty} x^3-10x^2+25x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to +\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln\left(x^2-25\right)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-25}}{1}=\lim_{x\to +\infty}\frac{2x}{x^2-25}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to -\infty}\frac{f\left(x\right)}{x}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-10x^2+25x}{x}=\lim_{x\to -\infty} x^2-10x+25=+\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=5$ y no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

2) En el intervalo $(-\infty,5)$ la función es $f(x)=x^3-10x^2+25x$, cuya derivada es $f'(x)=3x^2-20x+25$ y la derivada segunda es $f''(x)=6x-20$. Averiguamos cuando se anula esta segunda derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-20=0 \Rightarrow x=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}\in(-\infty,5)$$

La derivada segunda es negativa en $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$ y la función es cóncava (∩).

$$0\in\left(-\infty,\frac{10}{3}\right) \Rightarrow f''(0)=6\cdot 0-20=-20<0$$

La derivada segunda es positiva en $\left(\frac{10}{3},5\right)$ y la función es convexa (∪).

$$4\in\left(\frac{10}{3},5\right) \Rightarrow f''(4)=6\cdot 4-20=4>0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x=\frac{10}{3}\in(-\infty,5)$.

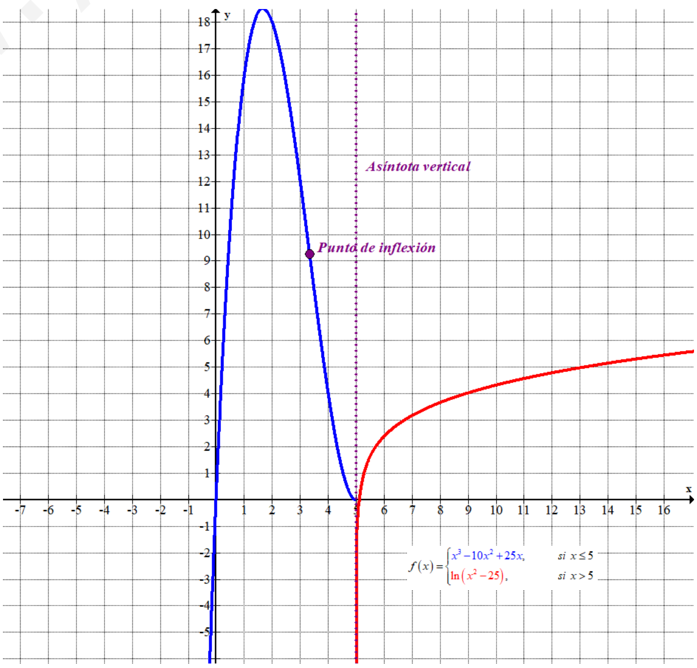
En el intervalo $(5,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln\left(x^2-25\right)$. Su derivada es $f'(x)=\frac{2x}{x^2-25}$.

Su derivada segunda es:

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-25\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{2x^2-50-4x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-50-2x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-2\left(25+x^2\right)}{\left(x^2-25\right)^2}.$$

Esta segunda derivada siempre es negativa y la función siempre es cóncava (∩), por lo que la función no tiene puntos de inflexión en el intervalo $(5,+\infty)$.

Como en el intervalo $\left(\frac{10}{3},5\right)$ la función es convexa (∪), podemos decir que en $x = 5$ también hay un punto de inflexión (cambio de convexa a cóncava), a pesar de que la función no es continua en $x = 5$.

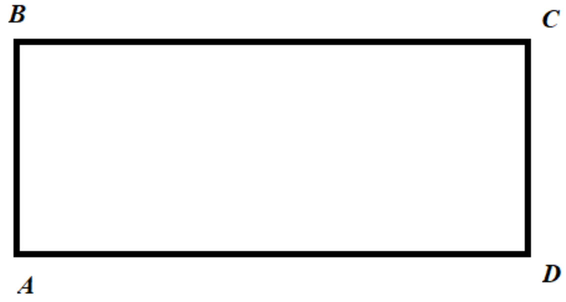


Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 0, 0), B = (0, 0, 1), C = (a, 4, 1) y D = (a, 4, 0) los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para a =3.



1) Para que los puntos formen un rectángulo como el del dibujo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,1)-(0,0,0)=(0,0,1)\\ \overrightarrow{DC}=(a,4,1)-(a,4,0)=(0,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

Los puntos forman un rectángulo, cuya área se calcula como el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,1)\\ \overrightarrow{AD}=(a,4,0)-(0,0,0)=(a,4,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 0 & 1\\ a & 4 & 0\end{vmatrix}=aj-4i=(-4,a,0)$$

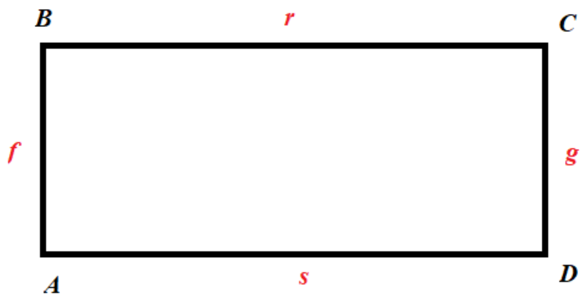
$$Área\ ABCD=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{(-4)^2+a^2+0^2}=\sqrt{16+a^2}$$

Como queremos que el área del rectángulo valga 5 u^2 igualamos la expresión obtenida a 5 y obtenemos el valor de a que hace posible lo pedido.

$$\sqrt{16+a^2}=5\Rightarrow\left(\sqrt{16+a^2}\right)^2=5^2\Rightarrow 16+a^2=25\Rightarrow a^2=9\Rightarrow \boxed{a=\sqrt{9}=\pm 3}$$

Como $a \geq 0$ el valor de a que hace posible que el área del rectángulo valga 5 unidades cuadradas es $a = 3$.

2) Para $a = 3$ los vértices son $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(3,4,1)$ y $D=(3,4,0)$.



La recta r pasa por B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(3,4,1)-(0,0,1)=(3,4,0)\\ B=(0,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=3\lambda\\ y=4\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

La recta s pasa por A y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AD}=(3,4,0)-(0,0,0)=(3,4,0)\\ A=(0,0,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=3\alpha\\ y=4\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

La recta f pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,0,1)-(0,0,0)=(0,0,1)\\ A=(0,0,0)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow f:\begin{cases}x=0\\ y=0;\ \beta\in\mathbb{R}\\ z=\beta\end{cases}$$

La recta g pasa por C y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{DC}=(3,4,1)-(3,4,0)=(0,0,1)\\ D=(3,4,0)\in g\end{array}\right\}\Rightarrow g:\begin{cases}x=3\\ y=4;\ \varepsilon\in\mathbb{R}\\ z=\varepsilon\end{cases}$$

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]
Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:
- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Llamamos A al suceso "tener ese tipo de artritis", T+ a "dar positivo en el test" y T– a "dar negativo en el test"

Nos dicen que $P(A)=0.10,\ P(T+/A)=0.85,\ P(T+/\overline{A})=0.04$.

Nos piden calcular $P(A/T+)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T+)=\frac{P(A\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+P(\overline{A})P(T+/\overline{A})}=$$

$$=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+[1-P(A)]P(T+/\overline{A})}=\frac{0.1\cdot 0.85}{0.1\cdot 0.85+[1-0.1]\cdot 0.04}=\frac{85}{121}\simeq 0.7025$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo tiene un valor de $\frac{85}{121}\simeq 0.7025$.

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Estudiamos el sistema y luego respondemos a las preguntas planteadas.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=0-12+8-0-6\lambda+8=-6\lambda+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6\lambda+4=0 \Rightarrow 6\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 2/3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a} + 2\cdot \text{ Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}-2 & 0 & 4 & -6\\ 2 & -6 & 4 & -2\\ \hline 0 & -6 & 8 & -8\end{array}\to \text{Nueva Fila } 2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1 & -2 & 2/3 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 1\\ \hline 0 & 1 & -4/3 & 1\end{array}\to \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -1\\ 0 & -6 & 8 & -8\\ 0 & 1 & -4/3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila } 2^{a} + 6\cdot \text{ Fila } 3^{a}\\ \begin{array}{cccc}0 & -6 & 8 & -8\\ 0 & 6 & -8 & 6\\ \hline 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\to \text{Nueva Fila } 3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}1 & -3 & 2 & -1\\ 0 & -6 & 8 & -8\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -2\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

1) El sistema es incompatible para $\lambda=\frac{2}{3}$.

2) El sistema es compatible determinado para $\lambda\neq\frac{2}{3}$.

3) El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor de λ.

4) Para λ = 1 el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\begin{cases}x-3y+2z=-1\\ -2x+4z=-6\\ x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3y+2z=-1\\ -x+2z=-3\\ x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-3y+2z=-1\\ 3+2z=x\\ x-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3+2z-3y+2z=-1\\ 3+2z-2y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4z-3y=-4\\ 3z-2y=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\times(2)\to \quad 8z-6y=-8\\ \times(-3)\to -9z+6y=9\end{cases}$$

$$\overline{-z \qquad =1}\Rightarrow\boxed{z=-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=3+2(-1)=1}\Rightarrow 1-2y-1=0\Rightarrow -2y=0\Rightarrow\boxed{y=0}$$

La solución del sistema es $x=1,\ y=0,\ z=-1$.

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=ax+sen(x)$, en función de la constante real *a*, con $x\in[0,2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x=\pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) para el valor de *a* calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de *f*(*x*).

1) Aplicamos la condición de que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

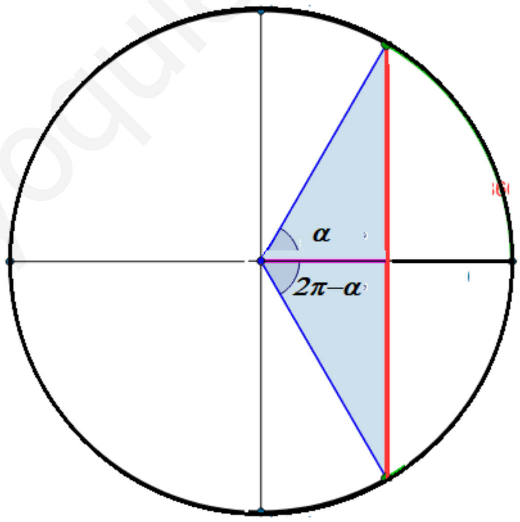
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+sen(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\frac{\pi}{2}+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 0=\frac{a\pi}{2}+1\Rightarrow\frac{a\pi}{2}=-1\Rightarrow \boxed{a=\frac{-2}{\pi}}$$

El valor buscado es $a=\frac{-2}{\pi}$.

2) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{-2}{\pi}x+sen(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{\pi}+\cos(x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\cos(x)=\frac{2}{\pi}\Rightarrow x=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\simeq\begin{cases}0.88\in[0,2\pi]\\ 2\pi-0.88=5.4\in[0,2\pi]\end{cases}$$

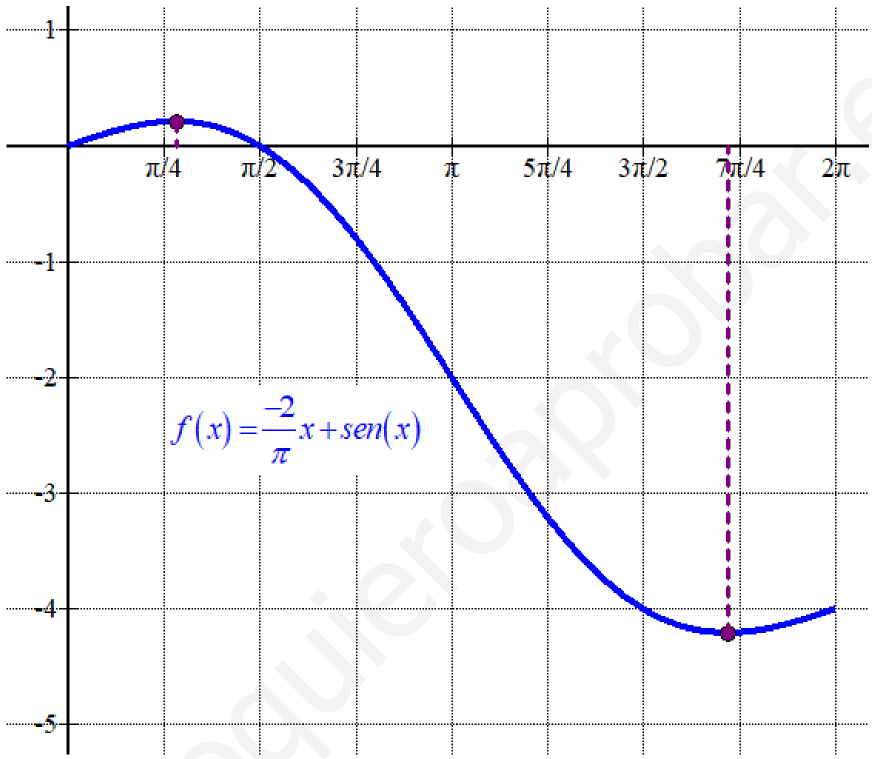


Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0,0.88)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-2}{\pi}+\cos(0.5)\simeq 0.24>0$. La función crece en $[0,0.88)$.

- En el intervalo $(0.88, 5.4)$ tomamos $x=\pi$ y la derivada vale $f'(\pi)=\dfrac{-2}{\pi}+\cos(\pi)=-1.63<0$. La función decrece en $(0.88, 5.4)$.
- En el intervalo $(5.4, 2\pi]$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6)=\dfrac{-2}{\pi}+\cos(6)=0.32>0$. La función crece en $[0, 0.88)$.

La función crece en $[0, 0.88)\cup(5.4, 2\pi]$ y decrece en $(0.88, 5.4)$.



3) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\int f(x)dx=\int ax+sen(x)dx=a\frac{x^2}{2}-\cos(x)+C$$

Una primitiva de la función es $F(x)=a\dfrac{x^2}{2}-\cos(x)$.

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.
1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

1) El plano π determinado por los puntos A, B y C es el plano que pasa por el punto $A(0,\ 3,\ 2)$ y tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC}=(2,3,4)-(0,3,2)=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AB}=(4,1,3)-(0,3,2)=(4,-2,1) \\ A(0,3,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{cases} x=2\alpha+4\beta \\ y=3-2\beta \qquad ;\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R} \\ z=2+2\alpha+\beta \end{cases}$$

2) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$.

Obtenemos el valor del producto mixto.

$$\overrightarrow{AD}=(0,1,2)-(0,3,2)=(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(4,-2,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AD}=(0,-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0+0-4-0-0+16=12$$

El volumen del tetraedro ABCD es de 12/6 = 2 unidades cúbicas.

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea *A* el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y *B* el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P\left(B^C\right)=0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de *B*.

1) [1 PUNTO] Calcule *P*(*A*).

2) [0,5 PUNTOS] Calcule *P*(*B*).

3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cap B^C)$.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cup B)$.

1) X = La altura de un hombre de 17 años en centímetros.
   X = N(175, 7.41)
   Nos piden calcular $P\left(A\right)=P\left(X>170\right)$.

$$P\left(X>170\right)=\left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-175}{7.41}\end{array}\right\}=P\left(Z>\frac{170-175}{7.41}\right)=P\left(Z>-0.67\right)=P\left(Z\le 0.67\right)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}=\boxed{0.7486}$$

   Tenemos que *P*(*A*) = 0.7486.

2) Como $P\left(B^C\right)=0.35$ entonces $P\left(B\right)=1-P\left(B^C\right)=1-0.35=\boxed{0.65}$.

   Tenemos que *P*(B) = 0.65.

3) El suceso altura y realizar la EBAU los suponemos independientes.

$$P(A\cap B^C)=P\left(A\right)P\left(B^C\right)=0.7486\cdot 0.35=\boxed{0.26201}$$

   Tenemos que $P(A\cap B^C)=0.26201$.

4) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)=\left\{\begin{array}{l} P\left(A\right)=P\left(A\cap B\right)+P\left(A\cap B^C\right)\to \\ \to P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)=P\left(A\cap B^C\right)\end{array}\right\}=$$

$$=P\left(B\right)+P\left(A\cap B^C\right)=0.65+0.26201=\boxed{0.91201}$$

   Tenemos que $P(A\cup B)=0.91201$.