Evaluación para el Acceso a la Universidad
Curso 2023/2024

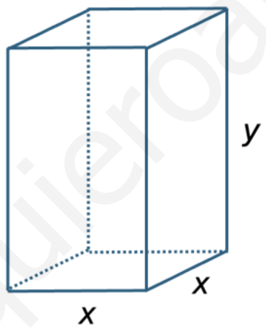
Materia: MATEMÁTICAS II

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los ocho ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{array}{r} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{array}\right\}$

a) [**1'5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.
b) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.
c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2.

3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.
a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?
c) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

4.

a) Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + 3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$.

b) **[1,5 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(1,a,a)$ y $\vec{v}=(-1,0,2)$ con $a\in\mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

6.

a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes $a,b,c\in\mathbb{R}$ de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa x = 2 y un punto de inflexión en $P(1,2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A)$ = 0,2; $P(A\cap B)=0{,}1$ y $P(A\cup B)=0{,}3$. Calcula:

b.1) [**0,75 puntos**] $P(B)$ y $P(A\cap\overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

b.2) **[0,75 puntos]** $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a\in\mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) [**1,25 puntos**] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,0,0)$.

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177

SOLUCIONES

1. Considera el siguiente sistema de ecuaciones, donde $a \in \mathbb{R}$: $\left.\begin{matrix} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{matrix}\right\}$

a) [**1'5 puntos**] Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) [**1 punto**] Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+10+4-5a-4-2a=a^2-7a+10$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-7a+10=0 \Rightarrow a=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4(1)(10)}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{7+3}{2}=\boxed{5=a} \\ \frac{7-3}{2}=\boxed{2=a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq 2$ y $a \neq 5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de A/B e igual al número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $a=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2\cdot\text{Fila } 3^a - 5\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 10 & 4 & 2 & 2 \\ -10 & -10 & -5 & -5 \\ \hline 0 & -6 & -3 & -3 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Fila\ 3^a \leftrightarrow Fila\ 2^a\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{2\quad 2\quad 1\quad 1}}^{A/B}} \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A es 2 y el rango de A/B es 3. Los rangos son distintos y el **sistema es incompatible** (sin solución)

CASO 3. $a=5$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Analizamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para triangular el sistema.

$$A/B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 5 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & -2 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} 5\cdot\text{Fila } 2^a - 2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 10 & 25 & 5 & 25 \\ -10 & -4 & -2 & -2 \\ \hline 0 & 21 & 3 & 23 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{5\quad 2\quad 1\quad 1}}^{A/B}} \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 21 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{0\quad 0\quad 0}}_{A}} & \end{array}\right)$$

El rango de A y A/B es 2. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El **sistema es compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $a \neq 2$ y $a \neq 5$ el sistema es compatible determinado, si $a=2$ el sistema es incompatible y si $a=5$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para a = 1 el sistema es compatible determinado (apartado anterior). Hallamos su solución.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 5x+2y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^a - 5\cdot\text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{ccccc} 5x & +2y & +z & =1 \\ -5x & -10y & -5z & =-5 \\ \hline & -8y & -4z & =-4 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\ 3^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^a - 2\ \text{Ecuación } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2x & -y & +z & =1 \\ -2x & -4y & -2z & =-2 \\ \hline & -5y & -z & =-1 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\ 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y+z=1 \\ \quad -8y-4z=-4 \Rightarrow \\ \quad -5y-\ z=-1 \end{array}\right.$$

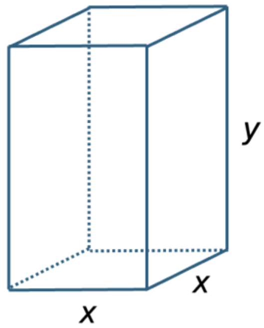
$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ -5y-z=-1 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\cdot\text{Ecuación } 3^{\text{a}} + 5\cdot\text{Ecuación } 2^{\text{a}} \\ \begin{array}{rrcr} -10y & -2z & = & -2 \\ 10y & +5z & = & 5 \\ \hline & 3z & = & 3 \end{array} \rightarrow \textit{Nueva Ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ 3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2y+z=1 \\ \boxed{z=\frac{3}{3}=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+1=1 \\ 2y+1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ 2y=0 \rightarrow \boxed{y=0} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+0=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

La solución del sistema es $x=0,\ y=0,\ z=1$.

2. Con el objetivo de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) **[1 punto]** Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).
b) **[1 punto]** Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.
c) **[0,5 puntos]** Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros el dm^2

a) El volumen debe ser 1 dm^3, por lo que $x^2y=1 \Rightarrow y=\frac{1}{x^2}$.

La superficie del envase es la suma de las dos bases y el lateral.

$$\left.\begin{array}{l} Base \to x^2 \\ Lateral \to 4x\cdot y \end{array}\right\} \Rightarrow S(x)=2x^2+4xy \Rightarrow \left\{ y=\frac{1}{x^2} \right\} \Rightarrow S(x)=2x^2+4x\frac{1}{x^2}=2x^2+\frac{4}{x}$$

La superficie del prisma tiene la expresión $S(x)=2x^2+\frac{4}{x}$.

b) Utilizamos la derivada de la función $S(x)=2x^2+\frac{4}{x}$ para encontrar sus puntos críticos.

$$S(x)=2x^2+\frac{4}{x} \Rightarrow S'(x)=4x-\frac{4}{x^2}$$

$$S'(x)=0 \Rightarrow 4x-\frac{4}{x^2}=0 \Rightarrow 4x=\frac{4}{x^2} \Rightarrow 4x^3=4 \Rightarrow x^3=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt[3]{1}=1}$$

Sustituimos este valor en la segunda derivada.

$$S'(x)=4x-\frac{4}{x^2}=4x-4x^{-2} \Rightarrow S''(x)=4+8x^{-3}=4+\frac{8}{x^3} \Rightarrow S''(1)=4+\frac{8}{1^3}=12>0$$

Como la segunda derivada es positiva la función superficie tiene un mínimo para $x = 1$.

La superficie es mínima para $x = 1$ dm e $y=\frac{1}{1^2}=1$ dm.

c) La superficie mínima tiene un valor de $S(1)=2\cdot 1^2+\frac{4}{1}=6\,dm^2$. Como cuesta 5 euros el dm^2 el coste del envase será de 6 · 5 = 30 euros.

3. Carla está diseñando el tejado de una casa con *Geogebra*. Para ello, debe unir una viga que tiene de extremos los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.
a) **[1 punto]** Determina la ecuación de la recta que representa la viga.
b) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la longitud de la viga?
c) **[1 punto]** Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

a) Hallamos la ecuación de la recta r que pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A(2,-1,3)\in \mathrm{r} \\ \vec{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-2,4,5)-(2,-1,3)=(-4,5,2) \end{array}\right\} \Rightarrow r:\begin{cases} x=2-4\lambda \\ y=-1+5\lambda\,;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=3+2\lambda \end{cases}$$

b) La longitud de la viga es la distancia de A a B, es decir, el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}=(-4,5,2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+5^2+2^2}=\sqrt{45}\simeq 6.7\ unidades$$

La longitud de la viga es de $\sqrt{45}\simeq 6.7$ *unidades*

c) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-4,5,2) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,1)-(2,-1,3)=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-10i-4j-4k+10k-8j-2i=-12i-12j+6k=(-12,-12,6)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-12)^2+6^2}=18$$

El área de la placa triangular tiene un valor de 9 unidades cuadradas.

4.

a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores de $a \in \mathbb{R}$.

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2+3} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} =$$

$$= Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^{+\infty}}{2} = \boxed{+\infty}$$

b) La matriz A es de dimensiones 3×4. Su rango es 1, 2 o 3.
Consideramos el menor que resulta de quitar la primera columna →
$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+1+0-0-0-0 = 1 \neq 0$.
El rango de A es 3 para cualquier valor de *a*.

5. a) **[1 punto]** Calcula la siguiente integral $\int x\sqrt{2x+3}dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$.

b) **[1,5 puntos]** Sean los vectores $\vec{u}=(1,a,a)$ y $\vec{v}=(-1,0,2)$ con $a\in\mathbb{R}$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

a) Calculamos la integral usando el cambio de variable sugerido.

$$\int x\sqrt{2x+3}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ t=\sqrt{2x+3}\rightarrow t^2=2x+3\\ 2tdt=2dx\rightarrow dx=tdt\\ t^2-3=2x\rightarrow \dfrac{t^2-3}{2}=x\end{array}\right\}=\int\frac{t^2-3}{2}\cdot t\cdot tdt=\frac{1}{2}\int t^2\left(t^2-3\right)dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^4-3t^2dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{5}-3\frac{t^3}{3}\right)=\frac{1}{10}t^5-\frac{1}{2}t^3=\left\{\begin{array}{l}\text{Deshacemos el cambio}\\ t=\sqrt{2x+3}\end{array}\right\}=$$

$$=\boxed{\frac{1}{10}\left(\sqrt{2x+3}\right)^5-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2x+3}\right)^3+K}$$

b) Utilizamos la fórmula del producto escalar para obtener el ángulo.

$$\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{(1,a,a)(-1,0,2)}{\sqrt{1^2+a^2+a^2}\sqrt{(-1)^2+0^2+2^2}}=\frac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2}\sqrt{5}}$$

El ángulo debe ser de 60º.

$$\left.\begin{array}{l}\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\dfrac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2}\sqrt{5}}\\ \cos\left(60^\circ\right)=\dfrac{1}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2}\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\Rightarrow -2+4a=\sqrt{5}\sqrt{1+2a^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(-2+4a)^2=5\left(1+2a^2\right)\Rightarrow 4+16a^2-16a=5+10a^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6a^2-16a-1=0\Rightarrow a=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4(6)(-1)}}{2(6)}=\frac{16\pm\sqrt{(-16)^2-4(6)(-1)}}{12}=$$

$$=\frac{8\pm\sqrt{70}}{6}=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{8+\sqrt{70}}{6}\simeq 2.72\rightarrow -1+2(2.72)>0\rightarrow \text{¡Es válido!}\\ \dfrac{8-\sqrt{70}}{6}\simeq -0.06\rightarrow -1+2(-0.06)<0\rightarrow \text{coseno negativo ¡No es válido!}\end{array}\right.$$

El único valor que hace que $\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)=60^\circ$ es $a=\dfrac{8+\sqrt{70}}{6}\simeq 2.72$.

6.
a) **[1 punto]** Calcula los coeficientes $a,b,c \in \mathbb{R}$ de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en $P(1,2)$. Justifica tu respuesta.
b) Sean dos sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}2$; $P(A\cap B)=0{,}1$ y $P(A\cup B)=0{,}3$. Calcula:
b.1) [**0,75 puntos**] $P(B)$ y $P\left(A\cap \overline{B}\right)$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.
b.2) **[0,75 puntos]** $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

a) Si la función tiene un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ la derivada se anula para este valor: $f'(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax+b \\ f'(2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{0=12+4a+b}$$

Si la función tiene un punto de inflexión en $P(1,2)$ se debe cumplir que la función pase por ese punto: $f(1)=2$ y que la derivada segunda se anule para $x = 1$: $f''(1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+ax^2+bx+c \\ f(1)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2=1^3+a+b+c \Rightarrow \boxed{a+b+c=1}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2ax+b \Rightarrow f''(x)=6x+2a \\ f''(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=6+2a \Rightarrow 2a=-6 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-6}{2}=-3}$$

Utilizamos todo lo obtenido y hallamos el valor del resto de parámetros.

$$\left.\begin{array}{l} 12+4a+b=0 \\ a+b+c=1 \\ \boxed{a=-3} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 12+4(-3)+b=0 \\ -3+b+c=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{b=0} \\ b+c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 0+c=4 \Rightarrow \boxed{c=4}$$

Los valores buscados son $a = -3$, $b = 0$ y $c = 4$.

b)
b.1) Utilizamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \Rightarrow 0.3=0.2+P(B)-0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.3-0.2+0.1=P(B) \Rightarrow \boxed{P(B)=0.2}$$

Calculamos $P\left(A\cap \overline{B}\right)$.

$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap \overline{B}\right) \Rightarrow 0.2=0.1+P\left(A\cap \overline{B}\right) \Rightarrow \boxed{P\left(A\cap \overline{B}\right)=0.1}$$

b.2) Calculamos $P(A/B)$.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{0.5}$$

Calculamos $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.1}{0.2} = \boxed{0.5}$$

7.

a) [**1,25 puntos**] Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$. ¿Existe algún valor de a para el que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) [**1,25 puntos**] Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1,0,0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u}=(1,2,1)$ y $\vec{v}=(1,0,0)$.

a) Si la matriz y su inversa son iguales debe cumplirse que $A \cdot A = I$.

$$A \cdot A = I \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+1=1 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=0}$$

Para que la matriz A y su inversa sean iguales debe ser *a = 0*.

b) Si la recta *r* buscada es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ su vector director es el producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v_r} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k = (0,1,-2)$$

La recta *r* que cumple lo pedido es la recta que pasa por A y tiene como vector director $\vec{v_r} = (0,1,-2)$. Hallamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \in r \\ \vec{v_r} = (0,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r: \begin{cases} x = 1 \\ y = \lambda \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = -2\lambda \end{cases}}$$

8.

a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60% juega al tenis, el 25% practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún premio el 21% de los socios que juegan al tenis, el 30% de los que practican natación y el 12% de los que practican el golf.

a.1) **[0,5 puntos]** Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

a) Llamamos T a "el socio juega al tenis", N a "el socio practica natación", G a "el socio practica golf" y A a "el socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales". Sabemos que $P(T)=0.6$, $P(N)=0.25$, $P(G)=0.15$, $P(A/T)=0.21$, $P(A/N)=0.3$ y $P(A/G)=0.12$.

a.1) Nos piden calcular $P(A)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(T)P(A/T)+P(N)P(A/N)+P(G)P(A/G)=$$

$$=0.6\cdot0.21+0.25\cdot0.3+0.15\cdot0.12=\boxed{0.219}$$

La probabilidad de que el socio elegido al azar haya obtenido algún premio es de 0.219.

a.2) Nos piden calcular $P(N/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(N/A)=\frac{P(N\cap A)}{P(A)}=\frac{P(N)P(A/N)}{P(A)}=\frac{0.25\cdot0.3}{0.219}=\boxed{\frac{25}{73}\simeq0.3425}$$

La probabilidad de que elegido al azar un socio que ha obtenido premio esté sea de natación es de $\frac{25}{73}\simeq0.3425$.

b) X = El tiempo (en minutos) que una persona sana invierte en recorrer 5 km. X = N(60, 8).

b.1) Nos piden calcular $P(X<50)$.

$$P(X<50)=\{Tipificamos\}=P\left(Z<\frac{50-60}{8}\right)=P(Z<-1.25)=P(Z>1.25)=$$

$$=1-P(Z\le1.25)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8944=\boxed{0.1056}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.[illegible]088
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.[illegible]422
0.70	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.[illegible]734
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.[illegible]023
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.[illegible]289
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.[illegible]531
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.[illegible]749
1.20	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8944
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115

La probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos en recorrer 5 km es de 0.1056.

b.2) Nos piden calcular $P(50 \le X \le 66)$.

$$P(50 \le X \le 66) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{50-60}{8} \le Z \le \frac{66-60}{8}\right) = P(-1.25 \le Z \le 0.75) =$$

$$= P(Z \le 0.75) - P(Z \le -1.25) = P(Z \le 0.75) - \left[1 - P(Z \le 1.25)\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\} = 0.7734 - (1 - 0.8944) = \boxed{0.6678}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.
0.50	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	0.7
0.60	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.[illegible]22	0.7
0.70	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.7734	0.7
0.80	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8

La probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos en recorrer 5 km es de 0.6678.