	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y+z=a \\ (a+1)x+y-az=0 \\ x+(a+1)y=0 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a. **(1.2 puntos)**
b) Resolver si $a=0$. **(0.8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**
b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a. **(0,6 puntos)**
c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1}=\dfrac{1}{4}A$ **(1 punto)**

E3.- (Geometría)
Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1,-2,2)$ y es paralela a la recta $r:\begin{cases} 2x-y+z=8 \\ x-y+2z=9 \end{cases}$ **(2 puntos)**

E4.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 3x+3y+mz=3$ y la recta $r\equiv\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$. Determinar m para que sean:

a) Perpendiculares. **(1 punto)**
b) Paralelos. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

a) Calcular $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx - senx}{xsenx}$. **(1 punto)**

b) Demostrar que la ecuación $x \cdot senx = 1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx$. **(1 punto)**

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ x\le 0 \\ e^{2x} & si\ x>0 \end{cases}$:

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función *f(x)* sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. **(0,5 puntos)**

E8.- (Análisis)

a) Calcular los valores de *a*, *b* y *c* para que la función $f(x)=ax^3-bx+c$ presente en el punto (1, 2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)dx=1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

E9- (Probabilidad y estadística)

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A, B, C y D. La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B. La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C. La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D. Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D. **(0.5 puntos)**

c) no gane A. **(0.5 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.

• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: A = "*ser mujer*", B = "*ser hombre*", M = "*padecer miopía*".

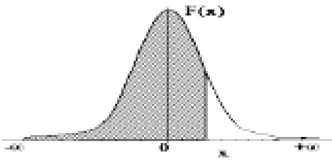
a) Calcular $P(A); P(M/A); P(B\cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

Dado el siguiente sistema: $\begin{cases} ax+y+z=a \\ (a+1)x+y-az=0 \\ x+(a+1)y=0 \end{cases}$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a. **(1.2 puntos)**

b) Resolver si $a=0$. **(0.8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix}=-a+(a+1)^2-1+a^2(a+1)=-(a+1)+(a+1)^2+a^2(a+1)=$$

$$=(a+1)^2+(a^2-1)(a+1)=\left[a+1+a^2-1\right](a+1)=(a^2+a)(a+1)=a(a+1)(a+1)$$

$$|A|=0\Rightarrow a(a+1)(a+1)=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a+1=0\to a=-1 \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $a=0$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Fila\,2^a \leftrightarrow Fila\,1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a + Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \rightarrow Nueva\,Fila\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow Nueva\,Fila\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\underbrace{\begin{matrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3, los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a \neq 0$ y $a \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución), si $a=0$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones) y si $a=-1$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $a=0$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x=-y \\ z=-y \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x=-\alpha \\ y=\alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-\alpha \end{array} \right.}$$

Las soluciones del sistema tienen la expresión: $\left\{ \begin{array}{l} x=-\alpha \\ y=\alpha \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ z=-\alpha \end{array} \right.$.

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A=\begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}$.

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**

b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a. **(0,6 puntos)**

c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ **(1 punto)**

a) Para que la matriz tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=-2a^2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2=0 \Rightarrow a=0$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de cero.

b) Si $a\neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
Si $a=0$ el determinante de A es nulo y el rango de A es menor de 3.
La matriz A queda $A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Si observamos las columnas solo hay una con elementos no nulos, por lo que el rango de A es 1.

c) Si $A^{-1}=\frac{1}{4}A$ entonces $AA^{-1}=\frac{1}{4}AA$, por lo que $I=\frac{1}{4}A^2 \Rightarrow 4I=A^2$.
Utilizamos esta última igualdad para determinar el valor de a que hace posible la primera igualdad.

$$4I=A^2 \Rightarrow 4\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2+a & a^2 \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} a^2=4 \to a=\sqrt{4}=\pm 2 \\ -2a+4=0 \to 2a=4 \to a=2 \\ -2+a=0 \to a=2 \\ a^2=4 \to a=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

Para que se cumplan todas las igualdades debe ser $a = 2$.

E3.- (Geometría)
Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1,-2,2)$ y es paralela a la recta $r:\begin{cases}2x-y+z=8\\x-y+2z=9\end{cases}$ **(2 puntos)**

Hallamos un vector director de la recta r.

$$r:\begin{cases}2x-y+z=8\\x-y+2z=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y+z=8\\x=y-2z+9\end{cases}\Rightarrow 2(y-2z+9)-y+z=8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y-4z+18-y+z=8\Rightarrow y-3z=-10\Rightarrow y=-10+3z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-10+3z-2z+9\Rightarrow x=-1+z\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\alpha\\y=-10+3\alpha\\z=\alpha\end{cases}\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_r}=(1,3,1)}$$

La recta s que pasa por el punto $A(1,-2,2)$ y es paralela a la recta r tiene como vector director el mismo que la recta r.

$$\left.\begin{array}{l}A(1,-2,2)\in s\\ \overrightarrow{u_s}=\overrightarrow{v_r}=(1,3,1)\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1+\lambda\\y=-2+3\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\ (\textit{paramétricas})\Rightarrow\\z=2+\lambda\end{cases}$$

$$\Rightarrow s:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-2}{1}\ (\textit{continua})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{3}\to 3x-3=y+2\to 3x-y-5=0\\[2ex]\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-2}{1}\to y+2=3z-6\to y-3z+8=0\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}3x-y-5=0\\y-3z+8=0\end{cases}(\textit{implícita})$$

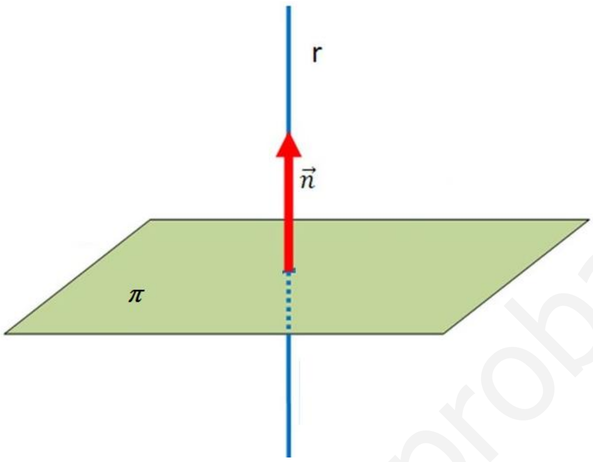
E4.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 3x+3y+mz=3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-y=2 \end{cases}$. Determinar m para que sean:

a) Perpendiculares. **(1 punto)**

b) Paralelos. **(1 punto)**

a) Si la recta es perpendicular al plano el vector director de la recta y el normal del plano deben tener coordenadas proporcionales (misma dirección).



Hallamos las coordenadas del vector director de la recta y el normal del plano.

$$\pi \equiv 3x+3y+mz=3 \Rightarrow \vec{n}=(3,3,m)$$

$$r \equiv \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x-y=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x=2+y \end{cases} \Rightarrow 2(y+2)-y+3z=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+4-y+3z=1 \Rightarrow y+3z=-3 \Rightarrow 3z=-3-y \Rightarrow z=-1-\frac{1}{3}y \Rightarrow$$

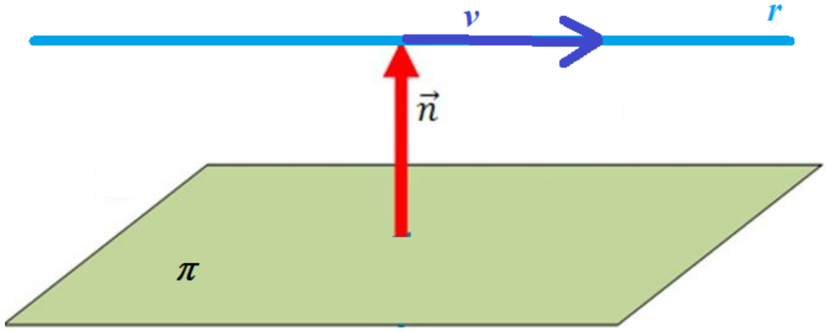
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2+\alpha \\ y=\alpha \\ z=-1-\frac{1}{3}\alpha \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\left(1,1,\frac{-1}{3}\right)$$

Hacemos que sus coordenadas sean proporcionales y obtenemos el valor de *m*.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(3,3,m) \\ \overrightarrow{v_r}=\left(1,1,\frac{-1}{3}\right) \\ \pi \perp r \to \vec{n} \,||\, \overrightarrow{v_r} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{1}=\frac{3}{1}=\frac{m}{-1/3} \Rightarrow \frac{3}{1}=\frac{3m}{-1} \Rightarrow -3=3m \Rightarrow \boxed{m=\frac{-3}{3}=-1}$$

Para que recta y planos sean perpendiculares debe ser $m=-1$.

b) Si el plano π es paralelo a la recta *r* el vector director de la recta y el vector normal del plano son perpendiculares, por lo que su producto escalar debe ser nulo.



$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(3,3,m)\\ \vec{v_r}=\left(1,1,\frac{-1}{3}\right)\\ \pi\parallel r\rightarrow\vec{n}\perp\vec{v_r}\rightarrow\vec{n}\cdot\vec{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(3,3,m)\left(1,1,\frac{-1}{3}\right)=0\Rightarrow 3+3-\frac{m}{3}=0\Rightarrow 6=\frac{m}{3}\Rightarrow\boxed{m=18}$$

Para que recta y plano sean paralelos debe ser $m = 18$.

E5.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{xsenx}$. **(1 punto)**

b) Demostrar que la ecuación $x\cdot senx=1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{xsenx}=\frac{tg0-sen0}{0\cdot sen0}=\frac{0}{0}=\{\text{Simplificamos la expresión}\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{senx}{\cos x}-senx}{xsenx}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{senx}\left(\frac{1}{\cos x}-1\right)}{x\cdot\cancel{senx}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\cos x}{\cos x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\cos x}=\frac{1-\cos 0}{0\cdot\cos 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{senx}{\cos x-xsenx}=\frac{sen0}{\cos 0-0\cdot sen0}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

Hemos comprobado que $\lim_{x\to 0}\frac{tgx-senx}{xsenx}=0$.

b) Consideramos la función $f(x)=1-x\cdot senx$. Debemos encontrar un valor *c* tal que *f(c) = 0.*

Como $f(0)=1-0\cdot sen0=1>0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-\frac{\pi}{2}\cdot sen\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}\simeq -0.57<0$ consideramos el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Queremos aplicar el teorema de Bolzano a la función $f(x)=1-x\cdot senx$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

La función $f(x)=1-x\cdot senx$ es continua en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, siendo $f(0)>0$ y $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$. Podemos aplicar el teorema de Bolzano y asegurar que existe $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que *f(c) = 0.*

Para el valor $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ se cumple la igualdad $1-c\cdot senc=0\Rightarrow c\cdot senc=1$.

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}\,dx$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2(x+1)^2-2x(2)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2(x+1)-2x(2)}{(x+1)^3}=\frac{2x+2-4x}{(x+1)^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{2-2x}{(x+1)^3} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2-2x}{(x+1)^3}=0 \Rightarrow 2-2x=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow \boxed{x=1}$$

La función presenta un punto crítico en *x = 1*.

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *x = –1* (excluido del dominio) y *x = 1* (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=\dfrac{2-2(-2)}{(-2+1)^3}=-6<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0)=\dfrac{2-2(0)}{(0+1)^3}=2>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=\dfrac{2-2(2)}{(2+1)^3}=\dfrac{-2}{27}<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

La función presenta un máximo relativo en *x = 1*. No tiene mínimo relativo pues *x = 1* no pertenece al dominio de la función.

b) Calculamos la integral usando descomposición en fracciones simples.

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{2x}{(x+1)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \dfrac{2x}{(x+1)^2} = \dfrac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} \Rightarrow 2x = A(x+1)+B \Rightarrow \\ \\ \Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 0 = A+B \to A=-B \\ x=-1 \to -2 = B \end{cases} \Rightarrow A=2 \Rightarrow \dfrac{2x}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{(x+1)^2} \end{array}}$$

$$\ldots = \int \frac{2}{x+1} - \frac{2}{(x+1)^2}dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{2}{(x+1)^2}dx = 2\int \frac{1}{x+1}dx - 2\int (x+1)^{-2}\,dx =$$

$$= 2\ln|x+1| - 2\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + C}$$

Hemos visto que $\displaystyle\int \frac{2x}{(x+1)^2}dx = \ln(x+1)^2 + \frac{2}{x+1} + C$.

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si\ x\le 0 \\ e^{2x} & si\ x>0 \end{cases}$:

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$. **(1,5 puntos)**

b) Hallar la recta tangente a la función en $x=1$. **(0,5 puntos)**

a) Para que la función sea continua en $x=0$ deben coincidir el valor de la función y los límites laterales.

- Existe $f(0)=0^2+a\cdot 0+b=b$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+ax+b=b$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{2x}=e^0=1$
- Los tres valores son iguales → $b=1$.

Para que la función sea continua en $x=0$ debe ser $b=1$.

La función queda $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & si\ x\le 0 \\ e^{2x} & si\ x>0 \end{cases}$.

Hallamos la expresión de la derivada de la función en $\mathbb{R}-\{0\}$.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ 2e^{2x} & si\ x>0 \end{cases}$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ deben coincidir las derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+a=a \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} 2e^{2x}=2e^0=2 \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow a=2$$

Para que la función sea derivable en $x=0$ debe ser $a=2$.

Los valores buscados son $a=2$ y $b=1$.

b) La recta tangente en $x=1$ tiene ecuación $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=e^2 \\ f'(1)=2e^2 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\}\Rightarrow y-e^2=2e^2(x-1)\Rightarrow y-e^2=2e^2x-2e^2\Rightarrow \boxed{y=2e^2x-e^2}$$

La recta tangente en $x=1$ tiene ecuación $y=2e^2x-e^2$.

E8.- (Análisis)

a) Calcular los valores de a, b y c para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto (1, 2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

a) Si la función presenta en el punto (1, 2) un extremo local debe cumplirse que $f(1) = 2$ y que $f'(1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax^3 - bx + c \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2 = a\cdot 1^3 - b + c \Rightarrow \boxed{2 = a - b + c}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3ax^2 - b \\ f'(1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3a\cdot 1^2 - b \Rightarrow 3a - b = 0 \Rightarrow \boxed{b = 3a}$$

Aplicamos la condición $\int_0^1 f(x)\,dx = 1$.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 \left(ax^3 - bx + c\right)dx = 1 \Rightarrow \left[a\frac{x^4}{4} - b\frac{x^2}{2} + cx\right]_0^1 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[a\frac{1^4}{4} - b\frac{1^2}{2} + c\right] - \left[a\frac{0^4}{4} - b\frac{0^2}{2} + c\cdot 0\right] = 1 \Rightarrow \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 1 \Rightarrow \boxed{a - 2b + 4c = 4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a - b + c = 2 \\ b = 3a \\ a - 2b + 4c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - 3a + c = 2 \\ a - 6a + 4c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2a + c = 2 \\ -5a + 4c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c = 2 + 2a \\ -5a + 4c = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5a + 4(2 + 2a) = 4 \Rightarrow -5a + 8 + 8a = 4 \Rightarrow 3a = -4 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-4}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{b = 3\frac{-4}{3} = -4} \\ \boxed{c = 2 + 2\frac{-4}{3} = \frac{-2}{3}} \end{array}\right.$$

Los valores que hacen que se cumpla lo pedido son $a = \frac{-4}{3};\ b = -4;\ c = \frac{-2}{3}$.

b) Para los valores $a = \frac{-4}{3};\ b = -4;\ c = \frac{-2}{3}$ la función queda $f(x) = \frac{-4}{3}x^3 + 4x - \frac{2}{3}$.

Hallamos la expresión de la segunda derivada y comprobamos el signo de la segunda derivada para $x = 1$.

$$f(x)=\frac{-4}{3}x^3+4x-\frac{2}{3} \Rightarrow f'(x)=-4x^2+4 \Rightarrow f''(x)=-8x \Rightarrow f''(1)=-8<0$$

Como el signo de la segunda derivada es negativo la función presenta un máximo relativo en el punto (1, 2).

E9- (Probabilidad y estadística)
A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A, B, C y D. La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B. La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C. La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D. Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D. **(0.5 puntos)**

c) no gane A. **(0.5 puntos)**

a) Llamamos A, B, C y D a "gana el jugador A, B, C o D respectivamente".

"La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B" → $P(A)=P(B)$.

"La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C" → $P(A)=3P(C)$.

"La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D" → $P(C)=P(D)$.

Sabemos que $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1 \\ P(A)=P(B)=3P(C) \\ P(D)=P(C) \end{array}\right\} \Rightarrow 3P(C)+3P(C)+P(C)+P(C)=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8P(C)=1 \Rightarrow \boxed{P(C)=\frac{1}{8}} \Rightarrow \begin{cases} P(A)=\frac{3}{8} \\ P(B)=\frac{3}{8} \\ P(C)=\frac{1}{8} \\ P(D)=\frac{1}{8} \end{cases}$$

Hemos obtenido que $P(A)=P(B)=\frac{3}{8};\ P(C)=P(D)=\frac{1}{8}$.

b) Nos piden calcular $P(C\cup D)$. Como los sucesos son incompatibles tenemos:

$$P(C\cup D)=P(C)+P(D)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

La probabilidad de que gane C o D es de $\frac{1}{4}=0.25$.

c) Como A gana 3 de cada 8 veces entonces pierde las restantes 5 veces.

La probabilidad de que no gane A es $\frac{5}{8}=0.625$.

E10.- (Probabilidad y estadística)
En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.
• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.
• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.
Nombrando los sucesos: A = "*ser mujer*", B = "*ser hombre*", M = "*padecer miopía*".
a) Calcular $P(A); P(M/A); P(B\cap M)$. **(0,5 puntos)**
b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**
c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

a) Son 550 + 420 = 970 personas las que participan en el estudio.
Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(A) = \frac{N^{o}\, mujeres}{N^{o}\, personas} = \frac{550}{970} = \frac{55}{97} \simeq 0.567$$

$$P(M/A) = \frac{N^{o}\, Mujeres\, miopes}{N^{o}\, mujeres} = \frac{280}{550} \simeq 0.5091$$

$$P(B\cap M) = \frac{N^{o}\, \text{hom}bres\, miopes}{N^{o}\, personas} = \frac{190}{970} = \frac{19}{97} \simeq 0.1959$$

b) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos la regla de Laplace. Hay 280 + 190 = 470 personas miopes de un total de 970 personas.

$$P(M) = \frac{470}{970} = \frac{47}{97} \simeq 0.4845$$

c) Nos piden calcular $P(A/M)$. Volvemos a aplicar la regla de Laplace. Hay 470 personas miopes y 280 mujeres miopes.

$$P(A/M) = \frac{280}{470} = \frac{28}{47} \simeq 0.5957$$