	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ mx+5y-4z=-1 \end{cases}$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. **(1.2 puntos)**
b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. **(0.8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$,

a) Calcular AB. **(0,5 puntos)**
b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$.
(1,5 puntos)

E3.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 2x+y=3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo.
(1 punto)

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si $a = 9$, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Sea $f(x)=\begin{cases} xe^{x} & si\ x<0 \\ a\cdot sen(x)+b & si\ x\geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$ **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x)=x$ y $g(x)=x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x=-1$, $x=0$ y $x=1$ **(0,5 puntos)**

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones. **(1,5 puntos)**

E9- (Probabilidad y estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{5}$ y $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

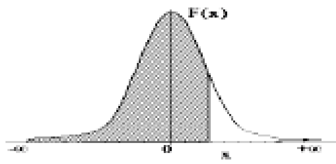
Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ x-y+2z=3 \\ mx+5y-4z=-1 \end{cases}$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. **(1.2 puntos)**

a) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. **(0.8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ m & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{vmatrix}=12+4m-5-m+8-30=3m-15$$

$$|A|=0 \Rightarrow 3m-15=0 \Rightarrow 3m=15 \Rightarrow \boxed{m=\frac{15}{3}=5}$$

Distinguimos dos casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $m \neq 5$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $m=5$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\cdot Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ 3 \quad -3 \quad 6 \quad 9 \\ -3 \quad -2 \quad 1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad -5 \quad 7 \quad 8 \rightarrow Nueva\,Fila\,2^a \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{cases} 3\cdot Fila\,3^{a} - 5\cdot Fila\,1^{a} \\ \begin{array}{cccc} 15 & 15 & -12 & -3 \\ -15 & -10 & 5 & -5 \\ \hline 0 & 5 & -7 & -8 \end{array} \to Nueva\ Fila\,3^{a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 5 & -7 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} Fila\,3^{a} + Fila\,2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 5 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to Nueva\ Fila\,3^{a} \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}}^{A/B} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $m \neq 5$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $m = 5$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

b) Resolvemos el sistema para $m = 5$. Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=1 \\ -5y+7z=8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y-z=1 \\ 7z=8+5y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y-z=1 \\ z=\dfrac{8+5y}{7} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+2y-\frac{8+5y}{7}=1 \Rightarrow 21x+14y-8-5y=7 \Rightarrow 21x=15-9y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x=5-3y \Rightarrow x=\frac{5-3y}{7} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5-3\lambda}{7} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{8+5\lambda}{7} \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Para $m = 5$ las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $\begin{cases} x=\dfrac{5-3\lambda}{7} \\ y=\lambda \\ z=\dfrac{8+5\lambda}{7} \end{cases},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & a\end{pmatrix}$ siendo $a\in\mathbb{R}$,

a) Calcular AB. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$. **(1,5 puntos)**

a) Calculamos la expresión de AB.

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\\ -1 & a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1-2 & 1+0+2a\\ 0+1-a & 0+0+a^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1+2a\\ 1-a & a^2\end{pmatrix}$$

b) Calculamos el determinante de AB y averiguamos cuando se anula.

$$|AB|=\begin{vmatrix}-1 & 1+2a\\ 1-a & a^2\end{vmatrix}=-a^2-(1-a)(1+2a)=-a^2-\left(1+2a-a-2a^2\right)=a^2-a-1$$

$$|AB|=0\Rightarrow a^2-a-1=0\Rightarrow a=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=a\\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}=a\end{cases}$$

Distinguimos dos situaciones diferentes que analizamos por separado.

Si $a\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ el determinante de AB no es nulo y la matriz tiene inversa.

Si $a=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ el determinante de AB es nulo y no existe la inversa.

La matriz AB tiene inversa para $a\neq\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $a\neq\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Para $a = 1$ existe la inversa. La calculamos.

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1+2\\ 1-1 & 1^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |AB|=-1\neq 0$$

$$(AB)^{-1}=\frac{Adj\left((AB)^t\right)}{|AB|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Para $a = 1$ la matriz inversa de AB tiene la expresión $(AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

E3.- (Geometría)

Dado el plano $\pi \equiv 2x+y=3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

a) Si el plano π´ que buscamos es perpendicular a π el vector normal del plano π es un vector director del plano π´. Como contiene a la recta *r* el otro vector director es el vector director de la recta. Y un punto del plano π´ es cualquier punto de la recta *r*.

$$\pi \equiv 2x+y=3 \Rightarrow \vec{n}=(2,1,0)$$

$$r \equiv \begin{cases} x=0+\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=1+0\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_r}=(1,-2,0) \\ P_r(0,1,1) \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{n}=(2,1,0) \\ \vec{v}=\vec{v_r}=(1,-2,0) \\ P_r(0,1,1)\in\pi' \end{array}\right\} \Rightarrow \pi': \begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4(z-1)-(z-1)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5(z-1)=0 \Rightarrow \boxed{\pi': z-1=0}$$

El plano π´ perpendicular a π, que contiene a r tiene ecuación $\pi': z-1=0$.

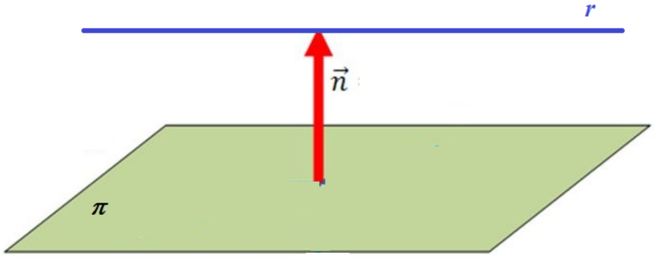
b) Estudiamos la posición relativa del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(2,1,0) \\ \vec{v_r}=(1,-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{n}\cdot\vec{v_r}=(2,1,0)(1,-2,0)=2-2=0$$

Como el producto escalar es nulo el vector normal del plano es perpendicular al vector director de la recta. Plano y recta son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,1,1)\in\pi? \\ \pi \equiv 2x+y=3 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿2\cdot 0+1=3? \Rightarrow \text{¡Falso!}$$

La recta es paralela al plano.



Existe un plano paralelo a π que contiene a *r*. Hallamos su ecuación.
El plano α que buscamos es paralelo a $\pi \equiv 2x+y=3$ y tiene ecuación $\alpha \equiv 2x+y=D$.
Determinamos D usando el hecho de que el plano contiene el punto $P_r(0,1,1)$ de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha \equiv 2x+y=D \\ P_r(0,1,1)\in\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot 0+1=D \Rightarrow D=1 \Rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x+y=1}$$

El plano α paralelo a π que contiene a r tiene ecuación $\alpha \equiv 2x+y=1$.

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\dfrac{y-3}{a}=\dfrac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si a = 9, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-5(1+2x)=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y-5-10x=-3 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-9x=2 \\ z=1+2x \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+9\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,9,2) \\ P_r(0,2,1) \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{a}=\frac{z-0}{2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,a,2) \\ Q_s(-1,3,0) \end{cases}$$

Para que sean rectas paralelas los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,9,2) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,a,2) \\ \overrightarrow{v_r} \parallel \overrightarrow{u_s} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \Rightarrow \frac{9}{a}=1 \Rightarrow \boxed{a=9}$$

Comprobamos que no son coincidentes para a = 9.

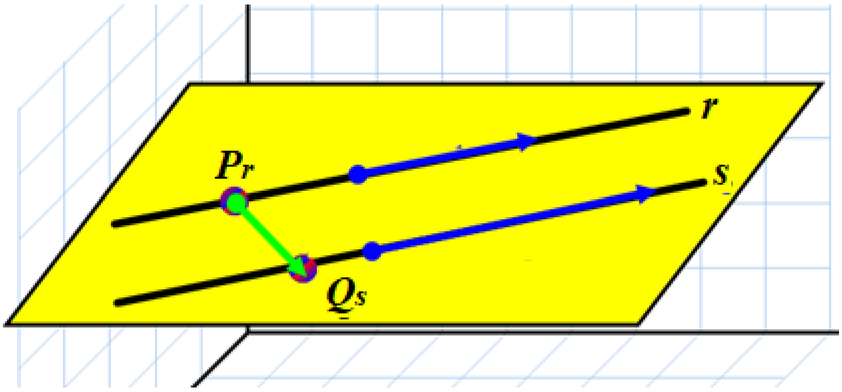
Comprobamos que el punto $P_r(0,2,1)$ de la recta r no pertenece a la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,2,1) \in s? \\ s \equiv \dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-3}{9}=\dfrac{z-0}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{0+1}{1}=\frac{2-3}{9}=\frac{1-0}{2}? \Rightarrow ¿1 \neq \frac{-1}{9} \neq \frac{1}{2}? \text{ ¡No se cumple!}$$

Para a = 9 las rectas son paralelas.

b) Para a = 9 las rectas quedan $r \equiv \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(1,9,2) \\ P_r(0,2,1) \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,a,2) \\ Q_s(-1,3,0) \end{cases}$.

Hallamos el plano que contiene el punto $P_r(0,2,1)$ de la recta r y que tiene como uno de sus vectores directores el vector $\overrightarrow{v_r}=(1,9,2)$ que es el vector director de la recta r. El otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{P_rQ_s}$



$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\vec{v_r}=(1,9,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,3,0)-(0,2,1)=(-1,1,-1)\\ P_r(0,2,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y-2 & z-1\\ 1 & 9 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x-2(y-2)+z-1+9(z-1)+y-2-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -9x-2y+4+z-1+9z-9+y-2-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -11x-y+10z-8=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv 11x+y-10z+8=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi\equiv 11x+y-10z+8=0$.

E5.- (Análisis)

Sea $f(x)=\begin{cases} xe^x & si\ x<0 \\ a\cdot sen(x)+b & si\ x\geq 0 \end{cases}$

Calcular *a* y *b* para que *f* sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

Para que la función sea continua en 0 el valor de la función debe coincidir con el valor de los límites laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a\cdot sen(0)+b=b \\ \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} a\cdot sen(x)+b=b \\ \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} xe^x=0e^0=0 \\ f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow b=0$$

Para *b* = *0* la función es continua en 0.

Para que la función sea derivable en 0 deben coincidir las derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} e^x+xe^x & si\ x<0 \\ a\cdot\cos(x) & si\ x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x+xe^x=e^0+0e^0=1 \\ f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} a\cdot\cos(x)=a \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow a=1$$

La función es continua y derivable en 0 para *a* = *1* y *b* = *0*.

E6.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.
(**2 puntos)**

La función es exponencial. El dominio de definición de la función es $\mathbb{R}$.
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^{x^2} \\ eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{x^2}=0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^{x^2} \\ eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=e^0=1 \Rightarrow A(0,1)$$

La derivada de la función es $f'(x)=2xe^{x^2}$. Buscamos sus puntos críticos.

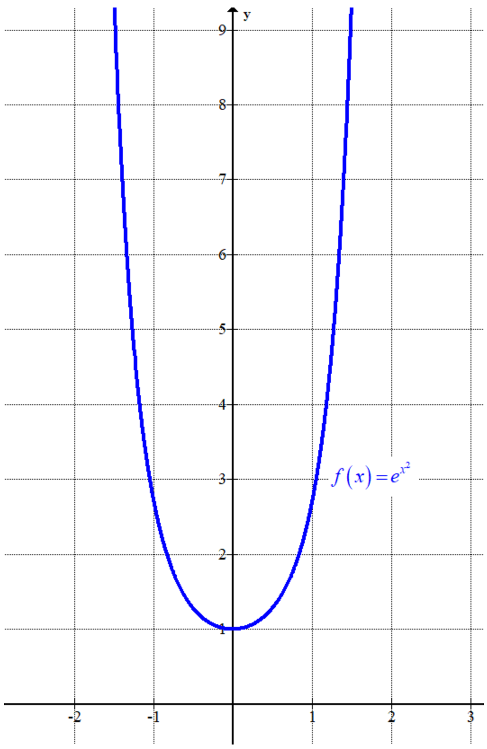
$$f'(x)=0 \Rightarrow 2xe^{x^2}=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x=0$.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=2(-1)e^{(-1)^2}=-2e<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=2e^{1^2}=2e>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función decrece en $(-\infty,0)$ y crece en $(0,+\infty)$.
La función presenta un mínimo relativo en $x=0$.
Obtenemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=e^{x^2}$
-2	e^4
-1	e
0	1 *Mínimo*
1	e
2	e^4



E7.- (Análisis)
Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$ **(1 punto)**

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x^2)-1}{sen^2(x)} = \frac{\cos(0^2)-1}{sen^2(0)} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x \cdot sen(x^2)}{2sen(x)\cos(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{-x \cdot sen(x^2)}{sen(x)\cos(x)} = \frac{-0 \cdot sen(0^2)}{sen(0)\cos(0)} = \frac{0}{0} =$$

$$= Indeterminación(L´Hôpital) = \lim_{x \to 0} \frac{-sen(x^2) - x \cdot \left(2x \cdot \cos(x^2)\right)}{\cos(x)\cos(x) + sen(x)\left(-sen(x)\right)} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-sen(x^2) - 2x^2 \cdot \cos(x^2)}{\cos^2(x) - sen^2(x)} = \frac{-sen(0^2) - 2 \cdot 0^2 \cdot \cos(0^2)}{\cos^2(0) - sen^2(0)} = \frac{-0+0}{1-0} = \boxed{0}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int xe^x dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x \to du = dx \\ dv = e^x dx \to v = \int e^x dx = e^x \end{array} \right\} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x - e^x \right]_0^1 = \left[1 \cdot e^1 - e^1 \right] - \left[0 \cdot e^0 - e^0 \right] = e - e + 1 = \boxed{1}$$

E8.- (Análisis)
Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:
a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$ **(0,5 puntos)**
b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones. **(1,5 puntos)**

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x \\ g(x) = x^3 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x = x^3 \Rightarrow x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

Se cumple que las gráficas de las dos funciones sólo se cortan en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.

b) Como las gráficas de las dos funciones se cortan en tres puntos el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones se calcula como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre –1 y 0 de la diferencia de las dos funciones y la otra entre 0 y 1 de la diferencia de las dos funciones.

Área de la región 1.

$$\int_{-1}^{0} f(x) - g(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right] - \left[\frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^4}{4}\right] = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}$$

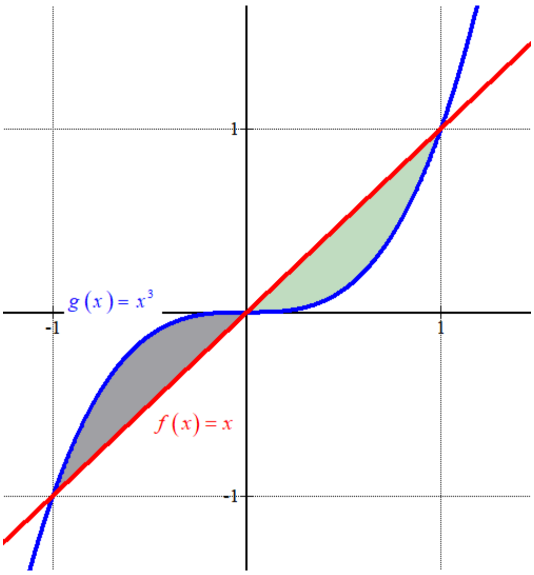
El área de la región 1 tiene un valor de 0.25 unidades cuadradas.

Área de la región 2.

$$\int_{0}^{1} f(x) - g(x)\,dx = \int_{0}^{1} x - x^3 dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^4}{4}\right] - \left[\frac{0^2}{2} - \frac{0^4}{4}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área de la región 2 tiene un valor de 0.25 unidades cuadradas.

El área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones es la suma de ambas áreas: 0.25 + 0.25 = 0.5 unidades cuadradas.



E9- (Probabilidad y estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{5}$ y $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$. Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

a) Llamamos A1 al suceso "Mensaje 1 con error", A2 a "Mensaje 2 con error" y A3 a "Mensaje 3 con error". Sabemos que los sucesos son independientes entre si y que P(A1) = P(A2) = P(A3) = 0.2.
Llamamos B al suceso "al menos 2 de los 3 mensajes han sido transmitidos con errores ".
Para que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores deben de mandarse los 3 mensajes con errores o el primero bien y los siguientes con error o el segundo bien y los otros con error o el tercero bien y los dos primeros con error.

$$P(B)=P(A1\cap A2\cap A3)+P\left(\overline{A1}\cap A2\cap A3\right)+P\left(A1\cap\overline{A2}\cap A3\right)+P\left(A1\cap A2\cap\overline{A3}\right)=$$

$$=0.2\cdot 0.2\cdot 0.2+0.8\cdot 0.2\cdot 0.2+0.2\cdot 0.8\cdot 0.2+0.2\cdot 0.2\cdot 0.8=\boxed{0.104}$$

La probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores es de 0.104.

b) Calculamos $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=\frac{1}{3} \\ P(B)=\frac{1}{5} \\ P(A\cup B)=\frac{1}{2} \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2}=\boxed{\frac{1}{30}}$$

Hemos obtenido que $P(A\cap B)=\frac{1}{30}$.

Utilizamos el teorema de Bayes para obtener $P(A/B)$.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}}=\boxed{\frac{1}{6}}$$

Hemos obtenido que $P(A/B)=\frac{1}{6}$.

E10.- (Probabilidad y estadística)
Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Llamamos X = La nota de un opositor. X = N(4, 100/51)

a) Hallamos $P(X>5)$.

$$P(X>5)=\left\{\begin{array}{l}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-4}{100/51}\end{array}\right\}=P\left(Z>\frac{5-4}{100/51}\right)=$$

$$=P(Z>0.51)=1-P(Z\leq 0.51)=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{array}\right\}=1-0.6950=\boxed{0.305}$$

	0,00	0,01	0
0,0	0,5000	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	[illegible]	0,5
0,3	0,6179	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	[illegible]	0,6
0,5	[illegible]	0,6950	0,6
0,6	0,7257	0,7291	0,7

La probabilidad de que un opositor tenga una nota superior a 5 es de 0.305. Multiplicamos este resultado por los 1000 opositores y obtenemos 1000 · 0.305 = 305.
De los 1000 opositores se espera que 305 obtengan una nota superior a 5.

b) Calculamos $P(2<X<5)$.

$$P(2<X<5)=\left\{\begin{array}{l}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-4}{100/51}\end{array}\right\}=P\left(\frac{2-4}{100/51}<Z<\frac{5-4}{100/51}\right)=$$

$$=P(-1.02<Z<0.51)=P(Z\leq 0.51)-P(Z<-1.02)=$$

$$=P(Z\leq 0.51)-P(Z>1.02)=$$

$$=P(Z\leq 0.51)-\left[1-P(Z\leq 1.02)\right]=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{array}\right\}=0.695-1+0.8461=\boxed{0.5411}$$

	0,00	0,01	0,02	0
0,0	0,5000	0,5040	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	[illegible]	0,
0,3	0,6179	0,6217	[illegible]	0,
0,4	0,6554	0,6591	[illegible]	0,
0,5	0,6915	0,6950	[illegible]	0,
0,6	0,7257	0,7291	[illegible]	0,
0,7	0,7580	0,7611	[illegible]	0,
0,8	0,7881	0,7910	[illegible]	0,
0,9	0,8159	0,8186	[illegible]	0,
1,0	[illegible]	[illegible]	0,8461	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,

La probabilidad de que un opositor tenga una nota entre 2 y 5 es de 0.5411.
El porcentaje de opositores que formarán la bolsa de empleo es del 54.11 %.