	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado **Castilla y León**	**MATEMÁTICAS II**	**EJERCICIO** **Nº Páginas: 3**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)
a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$ **(1.2 puntos)**

b) Resolverlo para $a = 1$. **(0.8 puntos)**

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**
b) Para a = 0, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P = (1, 0, -1)$ respecto de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{2}$.
(2 puntos)

E4.- (Geometría)
a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Son paralelas. **(1 punto)**

b) Para $k = 2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1)=0$, la función f presenta un extremo relativo en $x=0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-1$ es paralela a la recta de ecuación $y+3x=0$.

(2 puntos)

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx$ **(1 punto)**

E9- (Probabilidad y estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos:

C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación".

a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R\cap F), P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

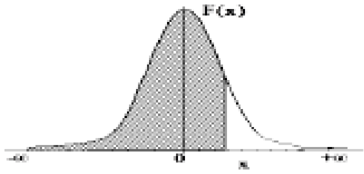
Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Distribución Normal

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2}\, dt$$



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9014
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9318
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9997	0,9997	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

SOLUCIONES

E1.- (Álgebra)
a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases}$$

(1.2 puntos)

b) Resolverlo para $a = 1$. **(0.8 puntos)**

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2a - 2 - a^2 - 0 = -a^2 + 3a - 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2} = \boxed{1 = a} \\ \dfrac{-3-1}{-2} = \boxed{2 = a} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $a = 1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,2^a - 2 \cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} 2\cdot Fila\,3^a - Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. Si $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - 4\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & -4 & 0 \\ \hline 0 & -1 & -4 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0.5 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $a = 1$ o $a = 2$ el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

b) Para $a = 1$ el sistema es compatible indeterminado (caso 2). Lo resolvemos a partir de la matriz equivalente obtenida en el apartado a).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \dfrac{y}{2} + z = 0 \\ -2z = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x + y + 2z = 0 \\ \boxed{z = 0} \end{array}\right\} \Rightarrow 2x + y = 0 \Rightarrow \boxed{y = -2x}$$

Las infinitas soluciones del sistema tienen la expresión: $x = \lambda,\ y = -2\lambda,\ z = 0;\ \lambda \in \mathbb{R}$.

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$,

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

a) Calculamos el determinante de M.

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a + 0 + 2a - 2 - 2a - a^2 - 0 = -a^2 + 3a - 2$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de M.

$$|M| = 0 \Rightarrow -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(-1)(-2)}}{2(-1)} = \frac{-3 \pm 1}{-2} = \begin{cases} \frac{-3+1}{-2} = \boxed{1 = a} \\ \frac{-3-1}{-2} = \boxed{2 = a} \end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$.

En este caso el determinante de M no es nulo y el rango es 3.

CASO 2. Si $a = 1$.

En este caso el determinante de M es nulo y el rango es menor de 3. Si tomamos el menor que resulta de quitar la columna primera y la fila tercera → $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 2 = -2 \neq 0$. El rango de M es 2.

CASO 3. Si $a = 2$.

En este caso el determinante de M es nulo y el rango es menor de 3. Si tomamos el menor que resulta de quitar la columna primera y la fila tercera → $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de M es 2.

Resumiendo: Si $a \neq 1$ y $a \neq 2$ el rango de M es 3 y si $a = 1$ o $a = 2$ el rango de M es 2.

b) Para $a = 0$ la matriz queda $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale

$|M| = -0^2 + 3 \cdot 0 - 2 = -2 \neq 0$. Aplicamos las propiedades de los determinantes.

$$2PM = M^3 \Rightarrow |2PM| = |M^3| \Rightarrow \{PM \; es \; 3 \times 3\} \Rightarrow 2^3 |PM| = |M|^3 \Rightarrow 8|P| \cdot (-2) = (-2)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16|P| = -8 \Rightarrow |P| = \frac{-8}{-16} = \frac{1}{2}$$

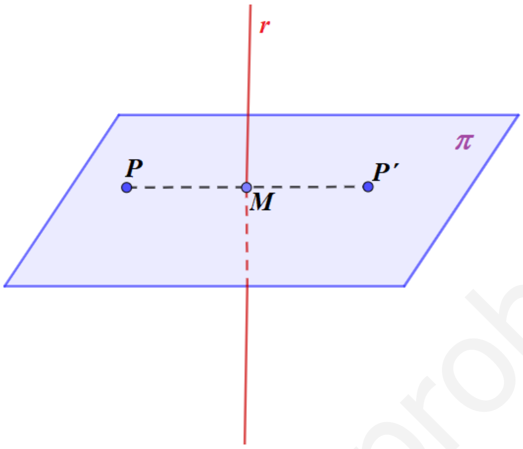
El determinante de M vale 1/2.

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto $P=(1,0,-1)$ respecto de la recta $r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$.

(2 puntos)

Vamos a determinar las coordenadas del punto P´ simétrico de P respecto de la recta *r* calculando previamente el plano π perpendicular a la recta que contiene el punto P, después el punto M de corte de recta y plano. Por último, hallamos el punto P´ sumando al punto M el vector $\overrightarrow{PM}$ ya que M es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.



Hallamos la ecuación del plano π. Su vector normal es el vector director de la recta.

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(1,2,2)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=\overrightarrow{v_r}=(1,2,2)\\ P(1,0,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+2y+2z+D=0\\ P(1,0,-1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow 1+0-2+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1+D=0\Rightarrow D=1\Rightarrow\boxed{\pi\equiv x+2y+2z+1=0}$$

Hallamos el punto M de corte de recta y plano.

$$r\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}P_r(1,0,0)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,2,2)\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi\equiv x+2y+2z+1=0\\ r\equiv\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=2\lambda\\ z=2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow 1+\lambda+2(2\lambda)+2(2\lambda)+1=0\Rightarrow 2+9\lambda=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{9} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2\frac{-2}{9} = \frac{-4}{9} \\ z = 2\frac{-2}{9} = \frac{-4}{9} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right)$$

Hallamos las coordenadas del punto P´.

$$\overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right) - (1, 0, -1) = \left(\frac{-2}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}\right)$$

$$P' = M + \overrightarrow{PM} = \left(\frac{7}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{-4}{9}\right) + \left(\frac{-2}{9}, \frac{-4}{9}, \frac{5}{9}\right) = \left(\frac{5}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{9}\right)$$

El punto P´ simétrico de P respecto de la recta *r* tiene coordenadas $P'\left(\frac{5}{9}, \frac{-8}{9}, \frac{1}{9}\right)$.

E4.- (Geometría)
a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}, \quad r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

Son paralelas.
b) Para $k = 2$ ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

a) Hallamos un vector director y un punto de cada una de las rectas.

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases} \Rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P_1(1, 0, k) \\ \overrightarrow{u_1} = (0, k, -2) \end{cases}$$

$$r_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y - 2z \\ x + y + z = k \end{cases} \Rightarrow -1 - 2y - 2z + y + z = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y - z = k + 1 \Rightarrow y + z = -1 - k \Rightarrow y = -1 - k - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -1 - 2(-1 - k - z) - 2z = -1 + 2 + 2k + 2z - 2z = 1 + 2k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k \\ y = -1 - k - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(1 + 2k, -1 - k, 0) \\ \overrightarrow{v_2} = (0, -1, 1) \end{cases}$$

Para que sean rectas paralelas los vectores directores deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{u_1} = (0, k, -2) \\ \overrightarrow{v_2} = (0, -1, 1) \\ \overrightarrow{u_1} \parallel \overrightarrow{v_2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{k}{-1} = \frac{-2}{1} \Rightarrow -k = -2 \Rightarrow \boxed{k = 2}$$

Comprobamos que no son coincidentes para *k = 2.*

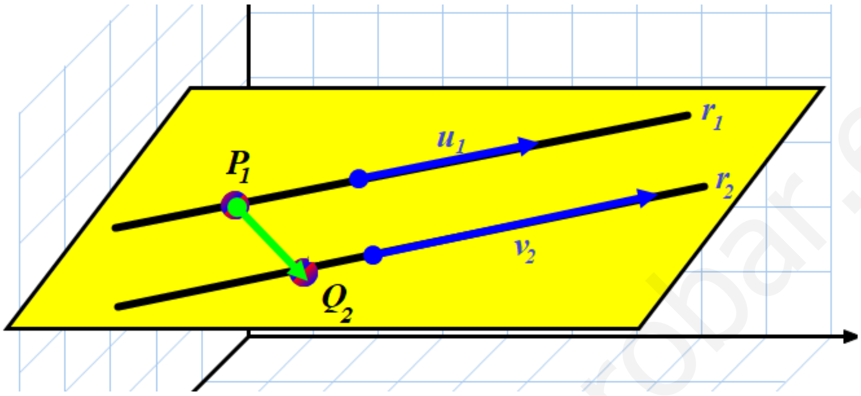
Sus ecuaciones quedan $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + 4 = 5 \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Se aprecia que no tienen las mismas ecuaciones pues la primera coordenada (x) son totalmente distintas en cada recta.

Para que las rectas sean paralelas debe ser *k = 2.*

b) Para $k = 2$ las rectas son paralelas. Si existe un plano que las contiene. Lo hallamos.

Las rectas quedan $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$ y $r_2 \equiv \begin{cases} x = 5 \\ y = -3 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} Q_2(5,-3,0) \\ \overrightarrow{v_2} = (0,-1,1) \end{cases}$

Hallamos el plano que contiene el punto $P_1(1,0,2)$ de la recta r_1 y que tiene como uno de sus vectores directores el vector $\overrightarrow{v_2} = (0,-1,1)$ que es el vector director de la recta r_2 y el otro vector director del plano es el vector $\overrightarrow{P_1Q_2}$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{v_2} = (0,-1,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{P_1Q_2} = (5,-3,0) - (1,0,2) = (4,-3,-2) \\ P_1(1,0,2) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x-1) + 4y + 0 + 4(z-2) - 0 + 3(x-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 2 + 4y + 4z - 8 + 3x - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{5x + 4y + 4z - 13 = 0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi \equiv 5x + 4y + 4z - 13 = 0$.

E5.- (Análisis)
Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x\in\mathbb{R}$. **(2 puntos)**

$$e^{-x}(x-1)=1\Rightarrow e^{-x}(x-1)-1=0$$

Buscamos valores que anulen la función $f(x)=e^{-x}(x-1)-1$.

Averiguamos los máximos y mínimos de la función.

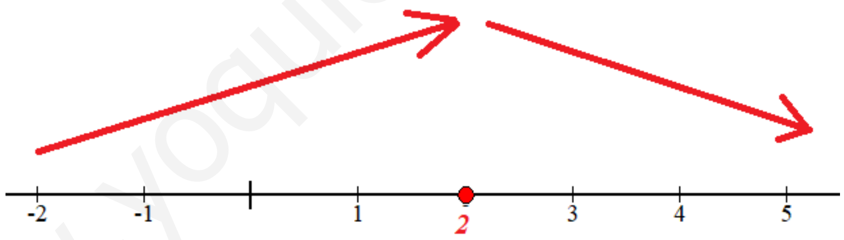
$$f(x)=e^{-x}(x-1)-1\Rightarrow f'(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}(1)=e^{-x}(-x+1+1)=e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow e^{-x}(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}e^{-x}=0\rightarrow \text{¡Imposible!}\\ 2-x=0\rightarrow \boxed{x=2}\end{cases}$$

En $x = 2$ la función tiene un punto crítico, vemos como es el signo de la derivada antes y después de este valor.

- En el intervalo $(-\infty,2)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=e^{0}(2-0)=2>0$. La función crece en $(-\infty,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=e^{-3}(2-3)=-\frac{1}{e^{3}}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente



La función tiene un máximo absoluto en $x = 2$.

Como $f(2)=e^{-2}(2-1)-1=\frac{1}{e^{2}}-1\simeq-0.86<0$ y este es el máximo absoluto de la función concluimos que no es posible encontrar un valor $x\in\mathbb{R}$ tal que se anule la función y por tanto no es posible encontrar un valor $x\in\mathbb{R}$ tal que $e^{-x}(x-1)=1$.

E6.- (Análisis)
Se considera la función $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1)=0$, la función f presenta un extremo relativo en $x=0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-1$ es paralela a la recta de ecuación $y+3x=0$.
(2 puntos)

Aplicamos la primera condición: $f(-1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \\ f(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=(-1)^3+A(-1)^2+B(-1)+C \Rightarrow \boxed{0=-1+A-B+C}$$

Aplicamos la segunda condición: La función f presenta un extremo relativo en $x=0$, lo que implica que la derivada se anula en $x=0$ → $f'(0)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=3\cdot 0^2+2A\cdot 0+B \Rightarrow \boxed{B=0}$$

La función queda $f(x)=x^3+Ax^2+C$

Aplicamos la tercera condición: La recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-1$ es paralela a la recta de ecuación $y+3x=0$. Las dos rectas tienen la misma pendiente.

$$y+3x=0 \Rightarrow y=-3x \Rightarrow \textit{pendiente}=-3$$

Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en $x=-1$ es el valor de la derivada → $f'(-1)=-3$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=x^3+Ax^2+C \Rightarrow f'(x)=3x^2+2Ax \\ f'(-1)=-3 \end{array}\right\} \Rightarrow -3=3(-1)^2+2A(-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3=3-2A \Rightarrow 2A=6 \Rightarrow \boxed{A=\frac{6}{2}=3}$$

Sustituimos estos valores en la primera ecuación obtenida para hallar el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} -1+A-B+C=0 \\ B=0 \\ A=3 \end{array}\right\} \Rightarrow -1+3-0+C=0 \Rightarrow \boxed{C=-2}$$

Los valores que hacen que se cumpla lo pedido son $A=3, B=0$ y $C=-2$.

E7.- (Análisis)
Dada la función $f(x)=e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.
(2 puntos)

El dominio de la función $f(x)=e^x x^{-1}=\frac{e^x}{x}$ son todos los números reales menos los que anulan el denominador → Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{0\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$.
¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{x}=\frac{e^0}{0}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$
Estudiamos la situación en +∞.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\frac{e^{+\infty}}{+\infty}=\frac{\infty}{\infty}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=\lim_{x\to+\infty} e^x=e^{+\infty}=+\infty$$

No existe asíntota horizontal cuando *x* tiende a +∞.
Estudiamos la situación en –∞.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{xe^{-x}}=\frac{1}{(-\infty)e^{+\infty}}=\frac{1}{-\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal de la gráfica de *f* cuando *x* tiende a –∞.

Estudiamos su crecimiento y decrecimiento usando la derivada para encontrar sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{e^x}{x}\Rightarrow f'(x)=\frac{e^x\cdot x-1\cdot e^x}{x^2}=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$$

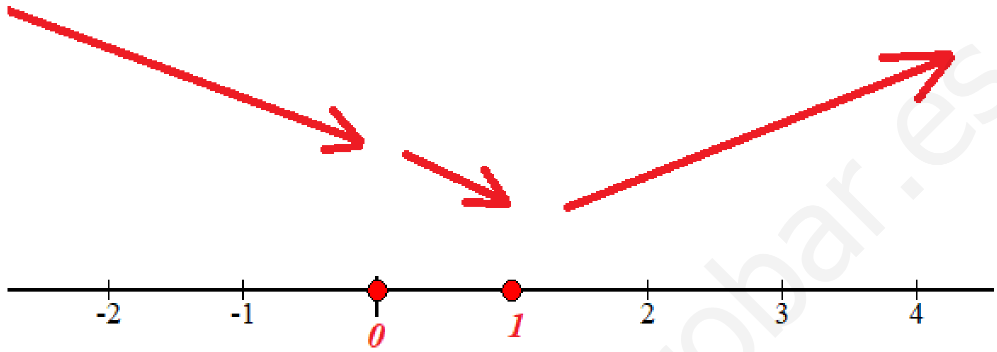
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{(x-1)e^x}{x^2}=0\Rightarrow(x-1)e^x=0\Rightarrow\{e^x\neq 0\}\Rightarrow x-1=0\Rightarrow\boxed{x=1}$$

La función tiene un punto crítico en *x* = *1*.
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *x* = *1* y *x* = *0*.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1-1)e^{-1}}{(-1)^2}=\frac{-2}{e}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale
  $f'(0.5) = \dfrac{(0.5-1)e^{0.5}}{0.5^2} = \dfrac{-e^{0.5}}{0.5} < 0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \dfrac{(2-1)e^2}{2^2} = \dfrac{e^2}{4} > 0$. La función crece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

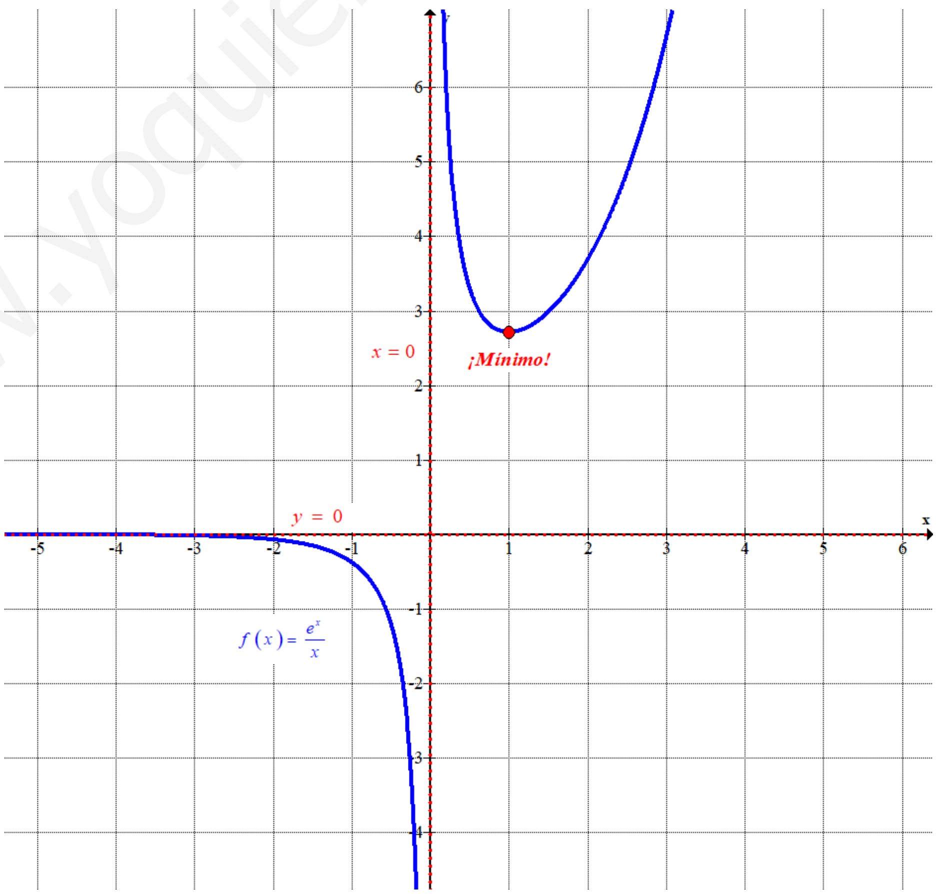


La función decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$ y crece en $(1,+\infty)$.

La función tiene un mínimo relativo en $x = 1$. Como $f(1) = e^1(1)^{-1} = e$ el mínimo relativo tiene coordenadas $(1, e)$.

Hacemos una tabla de valores y dibujamos su gráfica.

x	$y = \dfrac{e^x}{x}$
-1	$-e^{-1}$
0.5	$2e^{0.5}$
1	e
2	$e^2/2$



E8.- (Análisis)
Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\left(e^x-1\right)}{\cos(x)-1}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx$ **(1 punto)**

a) Calculamos el límite.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\left(e^x-1\right)}{\cos(x)-1} = \frac{0\left(e^0-1\right)}{\cos(0)-1} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x-1\right)+xe^x}{-sen(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{xe^x+e^x-1}{-sen(x)} = \frac{0e^0+e^0-1}{-sen(0)} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L´Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x+xe^x+e^x}{-\cos(x)} = \frac{e^0+0e^0+e^0}{-\cos(0)} = \frac{1+1}{-1} = \boxed{-2}$$

b) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int e^{-x}(x-1)\,dx = \left\{\begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = x-1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = \int e^{-x}dx = -e^{-x} \end{array}\right\} = -e^{-x}(x-1) - \int -e^{-x}dx =$$

$$= (1-x)e^{-x} + \int e^{-x}dx = (1-x)e^{-x} - e^{-x} = -xe^{-x} + K$$

Calculamos la integral definida.

$$\int_0^2 e^{-x}(x-1)\,dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^2 = -2e^{-2} - \left(-0e^{-0}\right) = \boxed{\frac{-2}{e^2}}$$

E9- (Probabilidad y estadística)
Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:
- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos:
C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación".

a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R\cap F), P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

a) Los datos del ejercicio nos permiten decir que $P(C)=0.48$, $P(R/C)=\frac{3}{4}=0.75$, $P(M)=0.28$, $P(R/M)=\frac{1}{2}=0.5$, $P(F)=0.24$, $P(R/F)=\frac{1}{3}$.

Las probabilidades que no son condicionadas son las probabilidades de C, M y F.
Las probabilidades que son condicionadas son las probabilidades de R/C, R/M y R/F.

b) $P(R\cap F)=P(F)P(R/F)=0.24\cdot\frac{1}{3}=\boxed{0.08}$

Para calcular $P(R)$ usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(C)P(R/C)+P(M)P(R/M)+P(F)P(R/F)=$$

$$=0.48\cdot 0.75+0.28\cdot 0.5+0.24\cdot\frac{1}{3}=\boxed{0.58}$$

Para calcular $P(C/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/R)=\frac{P(C\cap R)}{P(R)}=\frac{P(C)P(R/C)}{P(R)}=\frac{0.48\cdot 0.75}{0.58}=\boxed{\frac{18}{29}\simeq 0.6207}$$

c) Los sucesos C y R son independientes si se cumple la igualdad $P(C\cap R)=P(C)P(R)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(C\cap R)=P(C)P(R/C)=0.48\cdot 0.75=0.36 \\ P(C)P(R)=0.48\cdot 0.58=0.2784 \end{array}\right\}\Rightarrow P(C\cap R)=0.36\neq 0.2784=P(C)P(R)$$

Al no cumplirse la igualdad los sucesos C y R no son independientes.

E10.- (Probabilidad y estadística)
Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:
a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**
b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Llamamos X = La cantidad de minutos que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día.
X = N(160, 30)

a) Nos piden calcular $P(X<120)$.

$$P(X<120)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-160}{30}\end{matrix}\right\}=P\left(Z<\frac{120-160}{30}\right)=P(Z<-1.33)=P(Z>1.33)=$$

$$=1-P(Z\le 1.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.9082=\boxed{0.0918}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,[illegible]120	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,[illegible]517	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,[illegible]910	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,[illegible]293	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,[illegible]664	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,[illegible]019	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,[illegible]357	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,[illegible]673	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,[illegible]967	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,[illegible]238	0,8
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,[illegible]485	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,[illegible]708	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,8
1,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9082	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9

La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas es de 0.0918.

b) Calculamos $P(X>230)$.

$$P(X>230)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-160}{30}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{230-160}{30}\right)=P(Z>2.33)=$$

$$=1-P(Z\le 2.33)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla } N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.9901=\boxed{0.0099}$$

	0,00	0,01	0,02	0,03	0,0
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,[illegible]120	0,51
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,[illegible]517	0,55
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,[illegible]910	0,59
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,[illegible]293	0,63
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,[illegible]664	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,[illegible]019	0,70
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,[illegible]357	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,[illegible]673	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,[illegible]967	0,79
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,[illegible]238	0,82
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,[illegible]485	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,[illegible]708	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,[illegible]907	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,[illegible]082	0,90
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,[illegible]236	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,[illegible]370	0,93
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,[illegible]484	0,94
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,[illegible]582	0,95
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,[illegible]664	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,[illegible]732	0,97
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,[illegible]788	0,97
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,[illegible]834	0,98
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	[illegible]	0,98
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9901	0,99
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,99

El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos es del 0.99 %.