Universitat de les Illes Balears
Proves d'accés a la Universitat
Matemàtiques II
Model 1

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Justifique las respuestas usando lenguaje matemático y/0 no matemático, según corresponda. Dispone de 90 minutos. Cada cuestión se puntúa sobre 10 puntos. La calificación final se obtiene de dividir el total de puntos obtenidos entre 4.

Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos que puedan transmitir o almacenar información.

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y $R=(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas *r* y *s*, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de *a* y *b* sabiendo que *f(x)* tiene su máximo en *x = 100* y que pasa por el punto (49, 91).

(b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es *g(x)* una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=x^2-2x$ y sus puntos de corte.

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
(b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
(c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
4.1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

Taula de la distribució normal $\mathcal{N}(0,1)$.

SOLUCIONES

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \text{ y } M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

(a) Realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de M.

$$M=A^TA-BB^T=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+1 & 1+1\\ 1+1 & 1+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

La matriz M tiene la expresión $M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

(b) La matriz M es invertible si su determinante es no nulo.

$$M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow |M|=\begin{vmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2-4=-2\neq 0$$

Al ser el determinante no nulo la matriz M es invertible. Hallamos su inversa para utilizarla en la resolución de los sistemas.

$$M^{-1}=\frac{Adj\left(M^T\right)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Resolvemos el primer sistema.

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2\\ 1\end{pmatrix}$$

La solución es $a=\frac{-1}{2}$ y $c=1$.

Resolvemos el segundo sistema.

$$M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=M^{-1}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

La solución es $b=1$ y $d=-1$.

(c) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XM + A = C \Rightarrow XM = C - A \Rightarrow X = (C - A)M^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de X.

$$X = (C - A)M^{-1} = \left[\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2-3 & 1+3 \\ 1/2+1 & -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} -7/2 & 4 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$.

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real *k*.
(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro *k*.
(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de *k* se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

(a) Realizamos las operaciones indicadas.

$$B=3A-kI_3=3\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}-k\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-k & 0 & 0\\ 6 & -k & 0\\ -6 & 3 & 3-k\end{pmatrix}$$

(b) El rango de la matriz B es 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|B|=\begin{vmatrix}3-k & 0 & 0\\ 6 & -k & 0\\ -6 & 3 & 3-k\end{vmatrix}=-k(3-k)^2$$

$$|B|=0\Rightarrow -k(3-k)^2=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{k=0}\\ 3-k=0\Rightarrow\boxed{k=3}\end{cases}$$

Distinguimos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k\neq 0$ y $k\neq 3$.
En este caso el determinante de B es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k=0$.
En este caso el determinante de B es nulo y su rango es menor de 3.
La matriz queda $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}$. Si consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la fila primera y la columna tercera → $\begin{vmatrix}6 & 0\\ -6 & 3\end{vmatrix}=18\neq 0$. El rango de B es 2.

CASO 3. $k=3$.
En este caso el determinante de B es nulo y su rango es menor de 3.
La matriz queda $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & 0\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}$. Observamos que la primera fila es nula y la segunda y tercera fila son proporcionales, por lo que el rango de B es 1.

Resumiendo: Si $k\neq 0$ y $k\neq 3$ el rango de B es 3, si $k=0$ el rango es 2 y si $k=3$ el rango de B es 1.

(c) La inversa de B se puede calcular cuando su determinante es no nulo. Como se ha visto en el apartado anterior B tiene inversa para cualquier valor de *k* distinto de 0 y de 3.

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y $R=(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

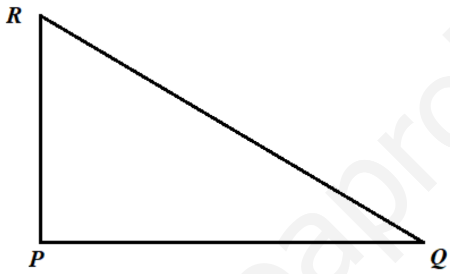
(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

(a) Hallamos el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{PR}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(7,1,7)-(-1,1,1)=(8,0,6)\\ \overrightarrow{PR}=(-4,1,5)-(-1,1,1)=(-3,0,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(8,0,6)(-3,0,4)=-24+24=0$$

Al ser el producto escalar nulo indica que los puntos no están alineados y el triángulo PQR es rectángulo en el vértice P.



El ángulo es recto en el vértice P.

(b) Para que añadiendo un vértice más tengamos un cuadrado debe ser la longitud del lado PQ igual a la del lado PR.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}=(8,0,6)\rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{8^2+0^2+6^2}=10\\ \overrightarrow{PR}=(-3,0,4)\rightarrow\left|\overrightarrow{PR}\right|=\sqrt{(-3)^2+0^2+4^2}=5\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\overrightarrow{PQ}\right|=10\neq 5=\left|\overrightarrow{PR}\right|$$

No es posible construir el cuadrado pedido.

(c)Hallamos el plano π definido por los puntos P, Q y R.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{PQ}=(8,0,6)\\ \vec{v}=\overrightarrow{PR}=(-3,0,4)\\ P(-1,1,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x+1 & y-1 & z-1\\ 8 & 0 & 6\\ -3 & 0 & 4\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0-18(y-1)+0-0-32(y-1)+0=0\Rightarrow -40(y-1)=0\Rightarrow \boxed{\pi: y-1=0}$$

¿El punto $S=(a,1,0)$ pertenece al plano π?

$$\left.\begin{array}{l}S=(a,1,0)\in\pi\\ \pi: y-1=0\end{array}\right\}\Rightarrow 1-1=0$$

Es cierta la igualdad y el punto S pertenece al plano definido por los puntos P, Q y R, es decir, los puntos P. Q, R y S son coplanarios para cualquier valor de a.

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

(a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,0) \\ P_r(-1,0,1) \end{cases}$$

$$s:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-0}{1} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_s}=(1,2,1) \\ Q_s(-1,1,0) \end{cases}$$

Para que las rectas sean coincidentes o paralelas sus vectores directores deben de tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{1} \neq \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$$

Al no tener coordenadas proporcionales las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_rQ_s}=(-1,1,0)-(-1,0,1)=(0,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,1) \\ \overrightarrow{P_rQ_s}=(0,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=4+0+0+0+1+2=7\neq 0$$

Al ser no nulo el producto mixto las rectas se cruzan.

Averiguamos si el producto escalar de sus vectores directores es nulo (90º).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(-2,1,0) \\ \overrightarrow{u_s}=(1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{u_s}=(-2,1,0)(1,2,1)=-2+2=0$$

Las rectas se cruzan perpendicularmente. Están en planos paralelos formando un ángulo de 90º.

(b) El plano paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{v_r}=(-2,1,0)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(1,2,1)\\ A(2,2,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-2 & y-2 & z-1\\ -2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2+0-4(z-1)-z+1+2(y-2)+0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-2-4z+\cancel{4}-z+1+2y-\cancel{4}=0\Rightarrow \boxed{\pi:x+2y-5z-1=0}$$

El plano paralelo a las dos rectas *r* y *s*, y que pasa por el punto $A=(2,2,1)$ tiene ecuación $\pi:x+2y-5z-1=0$.

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) [5 puntos] Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que *f(x)* tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto (49, 91).

(b) [5 puntos] Dada la función

$$g(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es *g(x)* una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

(a) Si la función pasa por el punto (49, 91) significa que $f(49)=91$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+b\sqrt{x} \\ f(49)=91 \end{array}\right\} \Rightarrow 91=49a+b\sqrt{49} \Rightarrow 91=49a+7b \Rightarrow \boxed{13=7a+b}$$

Si la función tiene un máximo en $x = 100$ significa que $f'(100)=0$ y que $f''(100)<0$.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=ax+b\sqrt{x} \Rightarrow f'(x)=a+b\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \\ f'(100)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a+b\frac{1}{2\sqrt{100}}=0 \Rightarrow a+\frac{b}{20}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{20}=-a \Rightarrow \boxed{b=-20a}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 13=7a+b \\ b=-20a \end{array}\right\} \Rightarrow 13=7a-20a \Rightarrow 13=-13a \Rightarrow \boxed{a=-1} \Rightarrow \boxed{b=20}$$

La función queda $f(x)=-x+20\sqrt{x}$.

Comprobamos que se cumple $f''(100)<0$.

$$f'(x)=-1+\frac{20}{2\sqrt{x}}=1+10x^{-1/2} \Rightarrow f''(x)=10\frac{-1}{2}x^{-1/2-1}=-5x^{-3/2}=-5\frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(100)=-5\frac{1}{\sqrt{100^3}}=\frac{-5}{1000}<0$$

Se cumple y los valores buscados son $a = -1$ y $b = 20$.

(b) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador (hacen imposible realizar la división) y los que hacen imposible la raíz (los valores negativos). Como el denominador se anula para $x = -1$ y $x = 1$ el dominio de la función es $[0,1)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta una discontinuidad en $x = 1$. Calculamos el límite de la función cuando se acerca a 1 para ver qué tipo de discontinuidad presenta.

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sqrt{x}}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{1}}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como el límite es finito la función presenta una discontinuidad evitable en $x = 1$. Se podría redefinir la función para que fuese continua en su dominio.

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=x^2-2x$ y sus puntos de corte.

Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=6x-x^2 \\ g(x)=x^2-2x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-x^2=x^2-2x \Rightarrow -2x^2+8x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x(x-4)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-4=0 \to x=4 \end{cases}$$

El área de la región comprendida entre las dos gráficas es el valor de la integral definida entre 0 y 4 de la diferencia de las dos funciones.
Comprobamos cual de las dos funciones toma valores mayores en el intervalo (0, 4).

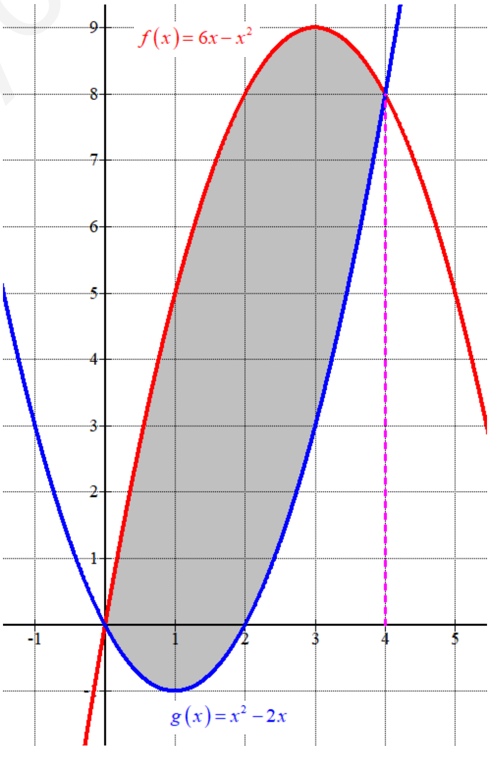
$$\left.\begin{array}{l} f(1)=6-1^2=5 \\ g(1)=1^2-2=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(1)>g(1) \Rightarrow f(x)>g(x) \text{ para todo } x\in(0,4)$$

Calculamos el valor del área pedida como la integral definida entre 0 y 4 de $f(x)-g(x)$.

$$Área=\int_0^4 f(x)-g(x)dx=\int_0^4 6x-x^2-(x^2-2x)dx=\int_0^4 6x-x^2-x^2+2xdx=$$

$$=\int_0^4 -2x^2+8xdx=\left[-2\frac{x^3}{3}+4x^2\right]_0^4=\left[-2\frac{4^3}{3}+4\cdot 4^2\right]-\left[-2\frac{0^3}{3}+4\cdot 0^2\right]=\boxed{\frac{64}{3}\simeq 21.33\ u^2}$$

El área tiene un valor de $\frac{64}{3}\simeq 21.33$ unidades cuadradas.

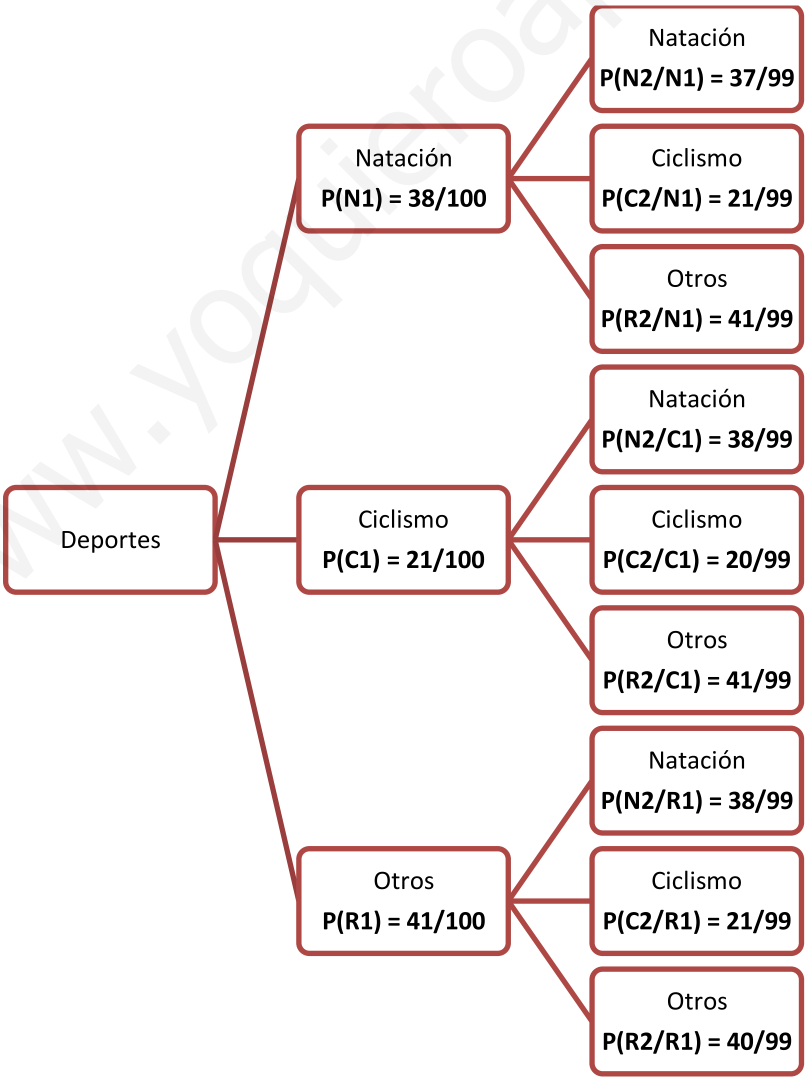


P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Llamamos N a "el habitante de un pueblo prefiere la natación", C a "el habitante prefiere el ciclismo" y R a "el habitante prefiere otros deportes". Como se eligen dos habitantes sin reemplazamiento llamaremos N1 y N2 al suceso en primera y segunda elección.
Sabemos que en la primera elección las probabilidades son:

$$P(N1)=\frac{38}{100},\ P(C1)=\frac{21}{100}\ \text{ y }\ P(R1)=1-\frac{38}{100}-\frac{21}{100}=\frac{41}{100}$$

Realizamos un diagrama de árbol para establecer las probabilidades de la segunda elección que depende de lo ocurrido en la primera. Supondremos una población de 100 habitantes, si no fuese así obtendríamos probabilidades distintas, aunque parecidas. Si fuesen 1000 habitantes tendríamos que $P(N2/N1)=\frac{380-1}{1000-1}=\frac{379}{999}\simeq 0.379$ y con 100 habitantes tenemos que $P(N2/N1)=\frac{38-1}{100-1}=\frac{37}{99}\simeq 0.374$.



(a) Nos piden calcular $P(N1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$P(N1 \cap N2) = P(N1)P(N2/N1) = \frac{38}{100} \cdot \frac{37}{99} = \boxed{\frac{703}{4950} \simeq 0.142}$$

La probabilidad de que las dos personas elegidas sean aficionadas a la natación es de 0.142.

(b) Nos piden calcular $P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2)$. Usamos la información de la tabla.

$$P(N1 \cap C2) + P(C1 \cap N2) = P(N1)P(C2/N1) + P(C1)P(N2/C1) =$$

$$= \frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} + \frac{21}{100} \cdot \frac{38}{99} = 2\frac{38}{100} \cdot \frac{21}{99} = \boxed{\frac{133}{825} \simeq 0.1612}$$

La probabilidad de que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación es de 0.1612.

(c) Nos piden calcular $P((N2 \cup R2)/C1)$.

$$P((N2 \cup R2)/C1) = P(N2/C1) + P(R2/C1) = \frac{38}{99} + \frac{41}{99} = \boxed{\frac{79}{99} \simeq 0.798}$$

La probabilidad de que la segunda persona no prefiera el ciclismo sabiendo que la primera prefiere el ciclismo es de 0.798.

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a)**[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

(b)**[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

(c)**[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

X = El peso, en gramos, de las judías en lata. $X = N(\mu, 7.8)$.

(a) Sabemos que $P(X \le 200) = 0.10$.

$$P(X \le 200) = 0.10 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{7.8} \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \le \frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Probabilidad} < 0.5 \\ \dfrac{200-\mu}{7.8} < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow P\left(Z \le -\frac{200-\mu}{7.8}\right) = 1-0.1 = 0.9 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Buscamos en} \\ \text{la tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{200-\mu}{7.8} = \frac{1.28+1.29}{2} = 1.285 \Rightarrow -200+\mu = 1.285 \cdot 7.8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 1.285 \cdot 7.8 + 200 = 210.023$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015

La media es de 210 gramos por lata.

(b)Nos piden calcular $P(X \ge 225)$.

$$P(X \ge 225) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \ge \frac{225-210}{7.8}\right) =$$

$$= P(Z \ge 1.92) = 1 - P(Z \le 1.92) = 1 - 0.9726 = \boxed{0.0274}$$

El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías es de 2.74 %.

	0	1	2	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.51
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.55
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.59
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.62
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.66
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.70
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.73
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.76
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.79
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.82
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.84
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.87
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.89
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.90
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.92
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.93
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.94
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.95
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.96
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.97
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.97

(c) Nos piden calcular $P(190 \leq X \leq 225)$.

$$P(190 \leq X \leq 225) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{190-210}{7.8} \leq Z \leq \frac{225-210}{7.8}\right) =$$

$$= P(-2.56 \leq Z \leq 1.92) = P(Z \leq 1.92) - P(Z \leq -2.56) =$$

$$= P(Z \leq 1.92) - P(Z \geq 2.56) = P(Z \leq 1.92) - \left[1 - P(Z \leq 2.56)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.9726 - 1 + 0.9948 = \boxed{0.9674}$$

	0	1	2	3	4	5	6
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948

El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías es de 96.74 %.