UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

Prueba de Evaluación de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (EBAU)
Curso 2023-2024
Convocatoria: Ordinaria/Extraordinaria
ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados.
En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero.
Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y=1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

de modo que sea

(i) incompatible.
(ii) compatible determinado.
(iii) Compatible indeterminado.

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^{T} \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

7.- (2 puntos) Determine los valores de *a* para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

8.- **(2 puntos)** Halla la ecuación continua de la recta *s* que está contenida en el plano $\pi : x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r\equiv\begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

9.- **(2 puntos)** En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

10.- **(2 puntos)** Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A\cup B)')$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

Tabla simplificada de la distribución normal tipificada

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817

SOLUCIONES

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

La ecuación de la recta tangente en *x* = *a* es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{1}{3} \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \to f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \to f'(3)=-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{-1}{9} \\ y-f(3)=f'(3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{-1}{9}(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}}$$

La recta tangente a la curva en *x* = *3* tiene ecuación $y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}$.

Hallamos los puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados.

$$eje\,OX \to \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{9}x+\dfrac{2}{3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow -x+6=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0)$$

$$eje\,OY \to \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{9}x+\dfrac{2}{3} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{-1}{9}\cdot 0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow B\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

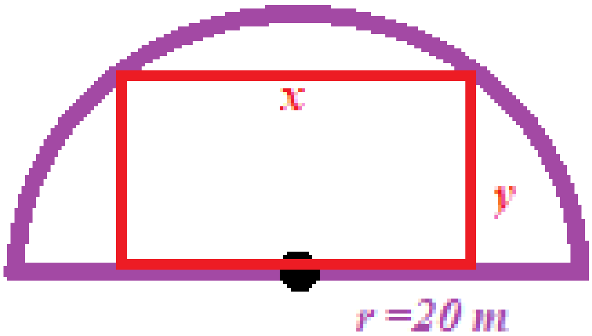
Para que el punto de tangencia P(3, 1/3) divida el segmento AB en dos partes iguales dicho punto debe ser el punto medio del segmento AB.

$$\text{Punto medio } \overline{AB}=\frac{(6,0)+\left(0,\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{\left(6,\frac{2}{3}\right)}{2}=\left(\frac{6}{2},\frac{2}{6}\right)=\left(3,\frac{1}{3}\right)=P$$

Queda comprobado que el punto P(3, 1/3) divide el segmento AB en dos partes iguales.

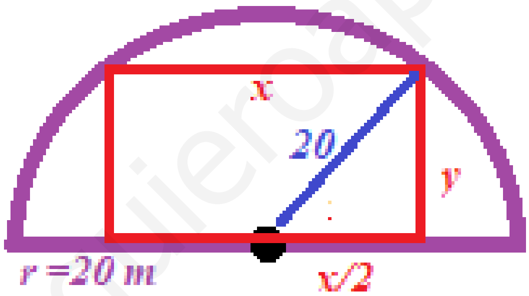
2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Hacemos un dibujo de la finca y de la situación planteada.



El área del jardín rectangular es $A(x,y)=xy$.

Como el rectángulo tiene sus esquinas apoyadas en la circunferencia según el teorema de Pitágoras se cumple $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2$.



Despejamos "y" en la ecuación anterior.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=400 \Rightarrow y^2=400-\frac{x^2}{4} \Rightarrow y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}$$

Y sustituimos en la expresión del área que deseamos maximizar.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{x^2\left(400-\frac{x^2}{4}\right)}=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$$

El área queda expresada en función de la longitud del lado "x" como $A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$.

Derivamos esta función y buscamos sus puntos críticos.

$$A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}} \Rightarrow A'(x)=\frac{800x-\frac{4x^3}{4}}{2\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}}=\frac{800x-x^3}{2x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=\frac{\cancel{x}\left(800-x^2\right)}{2\cancel{x}\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=\frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=0 \Rightarrow 800-x^2=0 \Rightarrow x^2=800 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{800}=20\sqrt{2}}$$

Compruebo que el punto crítico obtenido $x=20\sqrt{2}\simeq 28.28\,metros$ es un máximo viendo que antes de él la función crece y después de él la función decrece.

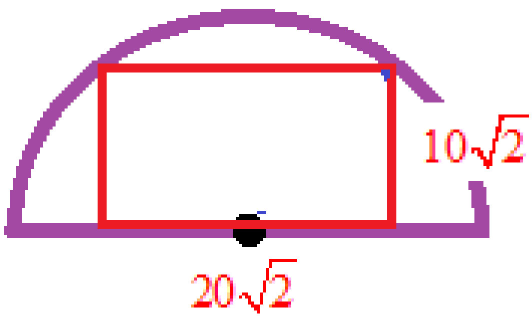
- En el intervalo $\left(0,20\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

  $A'(10)=\dfrac{800-10^2}{2\sqrt{400-\frac{10^2}{4}}}=\dfrac{700}{2\sqrt{375}}>0$, la función crece.
- En el intervalo $\left(20\sqrt{2},40\right)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale

  $A'(30)=\dfrac{800-30^2}{2\sqrt{400-\frac{30^2}{4}}}=\dfrac{-100}{2\sqrt{175}}<0$, la función decrece.

Para $x=\sqrt{800}$ el otro lado del jardín es $y=\sqrt{400-\dfrac{\left(\sqrt{800}\right)^2}{4}}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\simeq 14.14\ metros$.

El área del jardín rectangular cumpliendo las condiciones pedidas es máxima cuando tiene las dimensiones $20\sqrt{2}$ metros de largo y $10\sqrt{2}$ metros de ancho.



3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Si $F(x)=\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$ el dominio de la función F(x) son todos los valores reales para los que existe $\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$, es decir, para los valores "x" tales que $\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0$.

$$\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow \left\{(x+2)^2>0\right\} \Rightarrow (x-1)^3>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$$

El dominio de F(x) es $(1,+\infty)$.

Como $F(x)=\int f(x)\,dx$ entonces $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k = \ln(x-1)^3-\ln(x+2)^2+k = 3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k$$

$$f(x)=F'(x)=\left(3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k\right)'=3\frac{1}{x-1}-2\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

Analizamos la continuidad de la función $f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$ en su dominio $(1,+\infty)$.

Esta función es la suma de dos funciones racionales que no se anulan en su dominio y por tanto es continua en $(1,+\infty)$.

Esta función no existe ni en $x = -2$ ni en $x = 1$. La función no es continua en ninguno de estos valores.

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla A^TA^2-2A.

Si la matriz inversa de A es A^T se cumple que $A\cdot A^T=I$. Utilizamos esta igualdad para hallar el valor de x e y.

$$A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}3/5 & y & 0\\ x & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^T=I\Rightarrow\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5 & y & 0\\ x & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}9/25+x^2 & 3y/5-3x/5 & 0\\ 3y/5-3x/5 & y^2+9/25 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{9}{25}+x^2=1\\ \dfrac{3y}{5}-\dfrac{3x}{5}=0\\ y^2+\dfrac{9}{25}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}\to x=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}\\ y-x=0\to y=x\\ y^2=1-\dfrac{9}{25}=\dfrac{16}{25}\to y=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\pm\dfrac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=\dfrac{4}{5}\\ o\\ x=y=\dfrac{-4}{5}\end{cases}$$

Los valores buscados son $x=y=\dfrac{4}{5}$ o bien $x=y=\dfrac{-4}{5}$.

Como $A^T=A^{-1}$ obtenemos la expresión de A^TA^2-2A.

$$A^TA^2-2A=A^{-1}A^2-2A=A^{-1}AA-2A=IA-2A=A-2A=-A$$

Para $x=y=\dfrac{4}{5}$ queda $A^TA^2-2A=-A=-\begin{pmatrix}3/5 & 4/5 & 0\\ 4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & 3/5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Para $x=y=\dfrac{-4}{5}$ queda $A^TA^2-2A=-A=-\begin{pmatrix}3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5 & 4/5 & 0\\ 4/5 & 3/5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

de modo que sea
(i) incompatible.
(ii) compatible determinado.
(iii) Compatible indeterminado.

(i) Para que sea incompatible debemos añadir una ecuación que no se pueda cumplir, por ejemplo, añadimos una ecuación igual que la segunda pero cambiando el 3 por 0.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \\ x+y-z=0 \end{cases}$$

(ii) Para que sea compatible determinado debemos añadir una ecuación que se cumpla, por ejemplo, añadimos $x=3$.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \\ x=3 \end{cases}$$

Comprobamos que es compatible determinado. Resolvemos el sistema anterior.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \\ \boxed{x=3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 3-y+2z=1 \\ 3+y-z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2z=-5 \\ y-z=0 \to y=z \end{cases} \Rightarrow -z+2z=-5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=-5} \Rightarrow \boxed{y=-5}$$

El sistema es compatible determinado con solución $x = 3, y = z = -5$.

(iii) Para que sea compatible indeterminado debemos añadir una ecuación que sea combinación de las dos ecuaciones iniciales, por ejemplo, la suma de las dos.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$
$$\overline{3x \quad\quad +z=4}$$

El sistema $\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \\ 3x+z=4 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Lo comprobamos.

$$\begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \\ 3x+z=4 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a + \text{Ecuación } 2^a\} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y+2z=1 \\ x+y-z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ y = 3 - x + z \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 + x - z + 2z = 1 \Rightarrow 3x + z = 4 \Rightarrow \boxed{z = 4 - 3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 3 - x + 4 - 3x = 7 - 4x}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 4\lambda \,;\, \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$. El sistema es compatible indeterminado.

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases}B+C^{-1}=A\\ B-C^{-1}=A^T\end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Resolvemos el sistema matricial $\begin{cases}B+C^{-1}=A\\ B-C^{-1}=A^T\end{cases}$.

$$\begin{cases}B+C^{-1}=A\\ B-C^{-1}=A^T\end{cases}$$

$$2B = A+A^T \Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)\Rightarrow \frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+C^{-1}=A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+A^T+2C^{-1}=2A\Rightarrow 2C^{-1}=2A-A-A^T\Rightarrow 2C^{-1}=A-A^T\Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

Por lo visto tenemos $B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$.

También tenemos que $C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de la matriz C^{-1} y obtendremos la expresión de la matriz C.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \left|C^{-1}\right|=\begin{vmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$C=\left(C^{-1}\right)^{-1}=\frac{Adj\left(C^{-1}\right)^T}{\left|C^{-1}\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}}{1/4}=4\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $B=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

El sistema $\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$ tiene una matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{2(-1)}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-3+1}{-2}=1=a \\ \dfrac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado. La única solución del sistema son las coordenadas del punto intersección de los tres planos.

CASO 2. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de *a*.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=0 \\ \pi_2 : 2x+y+z=1 \\ \pi_3 : x+y+z=1 \end{cases}$$

Observamos que los planos π_1 y π_3 son dos planos paralelos y por tanto los planos no se van a cortar en ningún punto.

CASO 3. $a=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de *a*.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=1 \\ \pi_2 : 2x+y+2z=2 \\ \pi_3 : x+2y+z=1 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2\cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}}^{A/B}$$

Observamos que el rango de A y el de A/B son iguales a 2, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son los puntos de la recta donde se cortan los tres planos.
Lo comprobamos resolviendo el sistema equivalente obtenido.

$$\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{A}}^{A/B} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \qquad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

(i) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ los tres planos se cortan en un único punto.

(ii) Para $a=2$ los tres planos se cortan en una recta de ecuación $r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \qquad ; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z=\lambda \end{cases}$

(iii) Para $a=1$ los tres planos no se cortan.

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

Si la recta s está contenida en el plano su vector director $\overrightarrow{u_s}$ es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$.

Si corta perpendicularmente a la recta r también debe ser perpendicular a su vector director $\overrightarrow{v_r}$.

Al ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ del plano y el vector director $\overrightarrow{v_r}$ de la recta nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$.

Hallamos las coordenadas de estos dos vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1-x-y \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow 4x-y-1-x-y=3 \Rightarrow 3x-2y=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=4+2y \Rightarrow x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}y \Rightarrow z=-1-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}y-y=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}y \Rightarrow$$

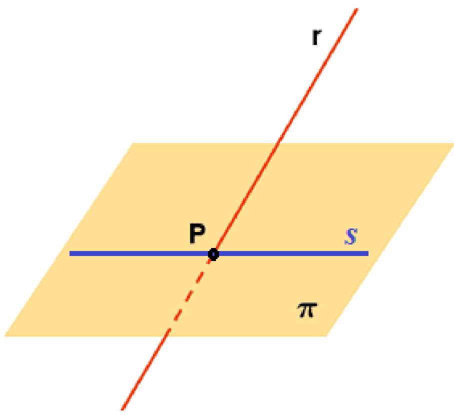
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow \{\text{Multiplico por 3}\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_r}=(2,3,-5)}$$

$$\pi: x+y-2z+1=0 \Rightarrow \boxed{\vec{n}=(1,1,-2)}$$

Hallamos el vector director de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,3,-5) \\ \overrightarrow{u_s}=\vec{n}\times\overrightarrow{v_r} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}=-5i-4j+3k-2k+5j+6i=i+j+k=(1,1,1)$$

Nos falta determinar un punto de la recta s. Como sabemos que la recta r y la recta s se cortan y la recta s está contenida en el plano el punto de la recta s lo podemos obtener hallando el punto de corte de la recta r y el plano.



$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{3}\lambda \end{cases} \\ \pi : x + y - 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda - 2\left(-\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda\right) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda + \frac{14}{3} + \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 3\lambda + 14 + 10\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\lambda = -21 \Rightarrow \lambda = \frac{-21}{15} = \frac{-7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{-7}{5}\right) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{14}{15} = \dfrac{2}{5} \\ y = \dfrac{-7}{5} \\ z = -\dfrac{7}{3} - \dfrac{5}{3}\left(\dfrac{-7}{5}\right) = \dfrac{-7}{3} + \dfrac{7}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right)$$

Hallamos la ecuación de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{-7}{5}, 0\right) \in s \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x - \frac{2}{5}}{1} = \frac{y + \frac{7}{5}}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \boxed{s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z}$$

La recta buscada es $s \equiv x - \dfrac{2}{5} = y + \dfrac{7}{5} = z$.

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:
(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

(i) Sea X = Puntuación de un estudiante. La variable tipificada es $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow\begin{cases}0.6=\dfrac{94-\mu}{\sigma}\\ -0.8=\dfrac{73-\mu}{\sigma}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0.6\sigma=94-\mu\\ -0.8\sigma=73-\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=94-0.6\sigma\\ \mu=73+0.8\sigma\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94-0.6\sigma=73+0.8\sigma\Rightarrow 94-73=0.8\sigma+0.6\sigma\Rightarrow 21=1.4\sigma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{21}{1.4}=15}\Rightarrow\boxed{\mu=94-0.6\cdot 15=85}$$

La variable X es una distribución normal con media 85 y desviación típica 15.
X = N(85, 15).

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(\mu-a\le X\le\mu+a)=0.60$.

$$P(85-a\le X\le 85+a)=0.60\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{85-a-85}{15}\le Z\le\frac{85+a-85}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(\frac{-a}{15}\le Z\le\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\le\frac{-a}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\ge\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-\left[1-P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)\right]=0.6\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-1=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=1.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=0.8\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a}{15}=\frac{0.84+0.85}{2}=0.845\Rightarrow\boxed{a=0.845\cdot 15=12.675}$$

La nota está entre 85 – 12.675 = 72.325 y 85 + 12.675 = 97.675.

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A\cup B)')$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.27 \\ P(B')=0.82 \to P(B)=1-P(B')=1-0.82=0.18 \\ P(A\cup B)=0.4 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.4=0.27+0.18-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.27+0.18-0.4=0.05$$

Para que los sucesos A y B sean compatibles su intersección debe ser no vacía.
Debe ser $P(A\cap B)\neq 0$.

Como hemos calculado $P(A\cap B)=0.05\neq 0$.

Los sucesos A y B son compatibles.

Calculamos la probabilidad $P((A\cup B)')$ usando el suceso contrario.

$$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-0.4=0.6$$

Aplicamos las leyes de Morgan para el cálculo de $P(A'\cup B')$.

$$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-0.05=0.95$$

Las probabilidades pedidas son $P((A\cup B)')=0.6$ y $P(A'\cup B')=0.95$.