RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU JULIO 2024
MATEMÁTICAS II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU 2024-JULIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil identificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples soluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de soluciones. Por supuesto, cualquier otra solución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, **aunque no esté incluida en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se pueden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 4 de julio de 2024.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

(2,5 p.) Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube.
Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares. Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución: Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son el número de seguidores que Taylor Swift tiene en cada una de las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Denotemos por x el número de seguidores que tiene en Instagram, por y el número de seguidores que tiene en X y por z el número de seguidores que tiene en YouTube, todos ellos expresados en "millones de seguidores".

El primer dato del ejercicio es que "Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores", que da lugar a la primera ecuación:

$$x + y + z = 435.$$

El segundo dato del ejercicio es que "si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube", que da lugar a la segunda ecuación:

$$x + \frac{z}{2} = 2(y + z) \Longrightarrow 2x - 4y - 3z = 0.$$

El tercer dato del ejercicio es que "si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares", que da lugar a la tercera ecuación:

$$10x + 20y + 30z = 6.500 \Longrightarrow x + 2y + 3z = 650.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 435 \\ 2x - 4y - 3z & = & 0 \\ x + 2y + 3z & = & 650 \end{array} \right.$$

El sistema se puede resolver por el método que se desee. En este caso optamos por el que pensamos que mejor se adapta al sistema, el método de Gauss, pero cualquier método utilizado, siendo correcto, es válido:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 650 \end{array} \right) \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & -6 & -5 & -870 \\ 0 & 1 & 2 & 215 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[F_2 \leftrightarrow F_3]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & 1 & 2 & 215 \\ 0 & -6 & -5 & -870 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 + 6F_2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 0 & 1 & 2 & 215 \\ 0 & 0 & 7 & 420 \end{array}\right)$$

Resolvemos entonces escalonadamente. De la tercera ecuación tenemos $z = \dfrac{420}{7} = 60$. Usando este valor de z en la segunda ecuación tenemos $y = 215 - 120 = 95$. Finalmente, sustituyendo los valores de y y de z en la primera ecuación se tiene $x = 435 - 95 - 60 = 280$.

Por lo tanto, Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

Por supuesto, también se puede resolver por el método de Cramer. Para ello, escribimos el sistema en forma matricial, de manera que la matriz ampliada del sistema es

$$A^* = (A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 435 \\ 2 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 650 \end{array}\right).$$

El determinante de A es

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & -3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 + 4 - 3 + 4 + 6 - 6 = -7 \neq 0$$

y la solución del sistema por Cramer es

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 435 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \\ 650 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{-5220 - 1950 + 2600 + 2610}{-7} = \frac{-1960}{-7} = 280, \\
y &= \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 1 & 435 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 650 & 3 \end{vmatrix} = \frac{1300 - 1305 + 1950 - 2610}{-7} = \frac{-665}{-7} = 95, \\
z &= \frac{1}{-7} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 435 \\ 2 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 650 \end{vmatrix} = \frac{-2600 + 1740 + 1740 - 1300}{-7} = \frac{-420}{-7} = 60.
\end{aligned}$$

Cuestión 2.

Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **(1 p.)** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

b) **(0,75 p.)** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **(0,75 p.)** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Solución: a) Para determinar cuál de ellas es o no ortogonal basta con comprobar si cumplen la identidad $A \cdot A^t = I$. En el primer caso, un sencillo cálculo nos muestra que

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4+1/4 & -\sqrt{3}/4+\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4+\sqrt{3}/4 & 1/4+3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

por lo que la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ sí es ortogonal. En el segundo caso, resulta

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/4+1/4 & -\sqrt{3}/4-\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4-\sqrt{3}/4 & 1/4+3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \neq I,$$

por lo que la matriz $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$ no es ortogonal.

b) Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, sabemos que $A \cdot A^t = I$. Tomando determinantes en esta igualdad y utilizando propiedades básicas de los determinantes, se tiene

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = |I| = 1 \Longrightarrow |A| = \pm\sqrt{1} = \pm 1.$$

c) Vamos a justificar que la matriz $C = A \cdot B$ es ortogonal comprobando que cumple la condición $C \cdot C^t = I$. Para ello, debemos tener en cuenta que

$$C^t = (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t.$$

Por lo tanto, haciendo uso de esto y de la propiedad asociativa del producto de matrices, se tiene

$$C \cdot C^t = (A \cdot B) \cdot (B^t \cdot A^t) = A \cdot (B \cdot B^t) \cdot A^t = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I,$$

ya que $B \cdot B^t = I$ y $A \cdot A^t = I$, por ser A y B ortogonales. Con ello se concluye que C también es ortogonal.

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, definida para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

a) **(0,5 p.)** Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **(1,5 p.)** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **(0,5 p.)** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución: a) Un primer cálculo nos da que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Para resolver estas indeterminaciones, podemos manipular algebraicamente la fracción racional y observar que

$$\frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2}} = \frac{2}{1 - 2/x + 3/x^2},$$

Tenemos entonces que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 3} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{1 - 2/x + 3/x^2} = \frac{2}{1 + 0 + 0} = 2.$$

b) Tal y como se dice en el enunciado, la función está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, por lo que no es necesario calcular el dominio de la misma. Si lo quisiéramos calcular, deberíamos resolver la ecuación $x^2 - 2x + 3 = 0$, que conduce a los valores

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2 \cdot 1} \notin \mathbb{R}$$

Es decir, la ecuación no tiene soluciones reales y por tanto $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

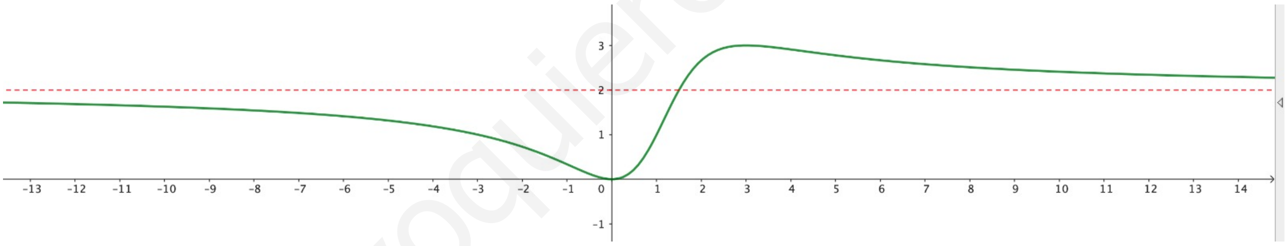
Ahora debemos derivar la función para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \frac{4x\cdot(x^2-2x+3) - 2x^2\cdot(2x-2))}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{12x-4x^2}{(x^2-2x+3)^2} = \frac{4x(3-x)}{(x^2-2x+3)^2}.$$

Para estudiar el signo de $f'(x)$ basta, pues, estudiar el signo de la parábola $12x - 4x^2 = 4x(3-x)$, ya que el denominador de la derivada es siempre positivo. La parábola se anula en $x = 0$ y $x = 3$. Además, como el término líder es $-4 < 0$, ya sabemos que $f'(x) < 0$ para $x < 0$ y para $x > 3$, mientras que es positivo en el intervalo $(0, 3)$. Es decir, f decrece en $(-\infty, 0) \cup (3, \infty)$ y crece en $(0, 3)$. Además, alcanza un único mínimo relativo, en $x = 0$ (que vale $f(0) = 0$) y un único máximo relativo en $x = 3$ (que vale $f(3) = 18/6 = 3$).

c) Gracias a lo obtenido en el apartado a) sabemos que f tiende a 2 tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, por lo que sabemos que está acotada. Además, también es claro que $f \geq 0$ en toda la recta real porque el denominador no se anula nunca (y por tanto, al valer 3 para $x = 0$, es siempre positivo) y el numerador es $2x^2 \geq 0$ siempre. Esto, unido a que el mínimo relativo se alcanzaba en el punto $(0, 0)$ y el máximo relativo en el punto $(3, 3)$, nos permite afirmar que ambos extremos son de hecho el mínimo y el máximo absoluto.

También podemos observar lo anterior si dibujamos la gráfica de la función (aunque no es necesario hacerlo):



Cuestión 4.

Considere la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) **(0,5 p.)** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **(1,5 p.)** Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int f(x)\,dx$.

c) **(0,5 p.)** Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\displaystyle\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

Solución: a) Un primer cálculo nos indica que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

En este último paso, también se podría argumentar que $\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x} = 0$ por la "regla de los grados".

b) Esta integral puede resolverse por partes tomando $u = \ln x$, $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$, lo que nos conduce a $du = \frac{dx}{x}$, $v = 2\sqrt{x}$ y, en consecuencia,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx &= 2\sqrt{x}\ln x - \int 2\sqrt{x}\frac{1}{x}dx \\
&= 2\sqrt{x}\ln x - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + C \\
&= 2\sqrt{x}(\ln x - 2) + C.
\end{aligned}$$

c) Planteamos la ecuación:

$$4 = \int_1^a f(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)\Big]_1^a = 2\sqrt{a}(\ln a - 2) - 2\sqrt{1}(\ln 1 - 2) = 2\sqrt{a}(\ln a - 2) + 4$$

Es decir, debemos resolver la ecuación

$$2\sqrt{a}(\ln a - 2) = 0$$

que arroja los valores $a = 0$ y $\ln a = 2$, es decir, $a = e^2$. Como $a > 0$ por hipótesis, descartamos el valor $a = 0$ y damos como válido $a = e^2$.

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere los planos $x - y + z = 0$ y $x + y - z = 2$ y los puntos $P(1, 2, 3)$ y $Q(1, 1, 3)$.

a) **(0,75 p.)** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **(1 p.)** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **(0,75 p.)** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Solución: a) Para comprobar que los dos planos se cortan en una recta, basta verificar que los vectores normales a los dos planos no son proporcionales, cosa que resulta evidente ya que si llamamos $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$ al vector normal del primer plano y $\vec{n}_2 = (1, 1, -1)$ al del segundo plano, es evidente que

$$\frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

por lo que los planos no son paralelos ni coincidentes y se cortan en una recta.

La intersección de los planos se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x - y + z & = & 0 \\ x + y - z & = & 2 \end{array} \right.$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2/2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Se trata obviamente de un sistema compatible indeterminado (rango$[A|b]$ = rango$(A) = 2 < 3$) y por tanto la solución es una recta r. Además, la ecuación paramétrica de la recta r es:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 + \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right.$$

y la ecuación continua (que es la que se pide) es:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

Obviamente también se puede obtener la ecuación continua obteniendo dos puntos de la recta, por ejemplo $P_1(1, 0, -1)$ y $P_2(1, 1, 0)$ y con ellos calcular un vector director de la misma, $\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1)$, obteniendo finalmente que la ecuación continua es

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

o bien

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$$

b) Veamos que $P(1, 2, 3)$ no está en ninguno de los planos. En efecto, basta sustituir en las ecuaciones de los planos:

$1 - 2 + 3 = 2 \neq 0$ por lo que no está en el primer plano.

$1 + 2 - 3 = 0 \neq 2$ por lo que no está en el segundo plano.

Si queremos construir una recta que pase por P y no corte a ninguno de los planos, podemos tomar como su vector director el de la recta r que acabamos de calcular. Por tanto, la ecuación de la recta es:

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2+\lambda \\ z &= 3+\lambda \end{cases}$$

Obviamente también vale la ecuación

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

Otro modo: si el alumno no se da cuenta de que ya dispone del vector director de la recta que le piden, puede calcularlo del siguiente modo: Dicho vector debe ser paralelo a ambos planos a la vez, lo cual se consigue forzando que sea perpendicular a la normal de cada uno de los planos. Un vector normal al primer plano es $\vec{n}_1=(1,-1,1)$. Un vector normal al segundo plano es $\vec{n}_2=(1,1,-1)$. Su producto vectorial es el vector director de nuestra recta:

$$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}=(0,2,2)\ \cong\ (0,1,1)$$

Tomamos $\vec{v}=(0,1,1)$ por comodidad. La ecuación de la recta es $\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\lambda\vec{v}$:

$$\begin{cases} x &= 1 \\ y &= 2+\lambda \\ z &= 3+\lambda \end{cases}$$

Obviamente también vale la ecuación

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-3}{1}$$

c) Buscamos el valor λ para el que el punto genérico de la recta r, $R(1,1+\lambda,\lambda)$ equidista de $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$. Es decir, queremos que $\left\|\overrightarrow{PR}\right\|=\left\|\overrightarrow{QR}\right\|$, lo que nos conduce a la ecuación:

$$(1-1)^2+(1+\lambda-2)^2+(\lambda-3)^2=(1-1)^2+(1+\lambda-1)^2+(\lambda-3)^2$$

Es decir:

$$(\lambda-1)^2+(\lambda-3)^2=\lambda^2+(\lambda-3)^2$$

$$0=(\lambda-1)^2-\lambda^2=\lambda^2-2\lambda+1-\lambda^2=-2\lambda+1$$

De aquí se obtiene que $\lambda=1/2$ y nuestro punto es $R=(1,1+1/2,1/2)=(1,3/2,1/2)$.

Cuestión 6.

Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{3}$.

a) **(0,75 p.)** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **(0,75 p.)** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.

c) **(1 p.)** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Solución: a) Para saber si los planos se cortan basta estudiar el sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es

$$[A|b] = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right)$$

Ahora bien, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, por lo que el rango de A es 2, que coincide con el rango de $[A|b]$, que es menor que 3 (número de incógnitas). Se sigue que el sistema tiene infinitas soluciones (de hecho, se trata de una recta).

El ángulo formado por los planos es el que forman sus vectores normales. Por tanto,

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}$$

donde $\vec{n}_1 = (1,1,1)$ y $\vec{n}_2 = (1,1,-1)$. Entonces

$$\cos\theta = \frac{|1+1-1|}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = 1/3$$

$$\begin{aligned} \theta &= \arccos(1/3) = 1{,}23095941734077 \text{ radianes} \\ &= 1{,}23095941734077 \cdot 360/(2\pi) = 70{,}5287793655091 \text{ grados.} \end{aligned}$$

b) Usamos la ecuación de la recta para pasar a paramétricas. Entonces un punto genérico de la recta tendrá coordenadas $X(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$. Por tanto, basta comprobar si este punto pertenece al plano $x+y-z=3$ para algún valor de λ. Sustituyendo en la ecuación del plano, tendremos:

$$x+y-z = (1+2\lambda) + (-1+\lambda) - 3\lambda = 0 \neq 3$$

Es decir, ningún punto de la recta corta al plano por lo que la recta es paralela al plano.

Otro modo: un vector director de la recta es $\vec{v} = (2,1,3)$ y un vector normal al plano es $\vec{n} = (1,1,-1)$. Ahora el producto escalar $\vec{n} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 0$. Por tanto, el vector director de la recta es paralelo al plano. Además, el punto $P(1,-1,0)$ pertenece a la recta pero no al plano (pues $1-1-0=0\neq 3$). Por tanto, la recta es paralela al plano que nos dan.

c) Sabemos que un punto genérico de la recta viene dado por $X(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda)$. Su distancia a cada uno de los planos ($\pi_1 \equiv x+y+z+3=0$, $\pi_2 \equiv x+y-z-3=0$) es, pues:

$$d(X,\pi_1)=\frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)+3\lambda+3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}}$$

$$d(X,\pi_2)=\frac{|(1+2\lambda)+(-1+\lambda)-3\lambda-3|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}$$

Por tanto, buscamos los valores λ que resuelven

$$|6\lambda+3|=3$$

Obtenemos dos posibles ecuaciones

$$6\lambda+3=3\Rightarrow\lambda=0$$

y

$$6\lambda+3=-3\Rightarrow\lambda=-1$$

Los puntos pedidos son, por tanto: $A(1,-1,0)$ y $B(-1,-2,-3)$.

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

El 60 % de los habitantes de una población consume pan integral, el 40 % consume pan blanco y el 20 % consume ambos tipos de pan.

a) **(0,5 p.)** ¿Son independientes los sucesos “consumir pan integral” y “consumir pan blanco”?

b) **(0,5 p.)** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **(0,75 p.)** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **(0,75 p.)** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Solución: a) Sea $I =$"comer pan integral" y $B =$"comer pan blanco". Entonces $P(I) = 0{,}6$, $P(B) = 0{,}4$, $P(I \cap B) = 0{,}2 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$. Por tanto, no son sucesos independientes.

b) Es un cálculo directo:

$$P(B|I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{0{,}2}{0{,}6} = \frac{1}{3} = 0{,}333...$$

c) De nuevo es un cálculo sencillo:

$$P(\overline{B} \cap \overline{I}) = P(\overline{B \cup C}) = 1 - P(B \cup I) = 1 - P(B) - P(I) + P(B \cap I) = 1 - 0{,}4 - 0{,}6 + 0{,}2 = 0{,}2$$

Es decir, un 20 % de la población no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) Sabemos calcular

$$P(\overline{B}|\overline{I}) = \frac{P(\overline{B} \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5.$$

Por tanto:

$$P(B|\overline{I}) = 1 - P(\overline{B}|\overline{I}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$$

Otra forma un poco más compleja de llegar al mismo resultado es la siguiente:

Primero observamos que

$$P(B|\overline{I}) = \frac{P(B \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{P(B \cap \overline{I})}{0{,}4}$$

Ahora usamos que $\overline{I} = \left(B \cap \overline{I}\right) \cup \left(\overline{B} \cap \overline{I}\right)$ es una partición de $\overline{I}$ (es decir, hemos expresado $\overline{I}$ como unión de dos sucesos disjuntos), por lo que

$$0{,}4 = P(\overline{I}) = P(B \cap \overline{I}) + P(\overline{B} \cap \overline{I}) = P(B \cap \overline{I}) + 0{,}2$$

de modo que $P(B \cap \overline{I}) = 0{,}4 - 0{,}2 = 0{,}2$ y

$$P(B|\overline{I}) = \frac{P(B \cap \overline{I})}{P(\overline{I})} = \frac{0{,}2}{0{,}4} = 0{,}5.$$

Cuestión 8.

Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2 %, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **(0,5 p.)** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **(0,5 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **(0,75 p.)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **(0,75 p.)** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Solución: a) La probabilidad de ser defectuoso es, por hipótesis, $P(D) = 0{,}02$. Como se producen 2500 microprocesadores al día, la variable que cuenta cuántos de estos son defectuosos es $X \sim \mathrm{B}(2500; 0{,}02)$. Es decir, es una binomial de parámetros $n = 2500$, $p = 0{,}02$ (y por tanto $q = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$).

b) Sabemos que $\mu = np = 2500 \cdot 0{,}02 = 50$ y $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98} = \sqrt{49} = 7$.

c) Nos piden

$$P(X \leq 57) = \sum_{k=0}^{57} \binom{2500}{k} (0{,}02)^k (0{,}98)^{2500-k}$$

Claramente, este valor no lo podemos obtener con un cálculo directo. Por tanto, debemos aproximarlo. Esto se hace aproximando la variable binomial con una normal. Para que ello sea posible necesitamos que se cumplan las condiciones para poder aplicar el Teorema de Moivre. Estas son: $n \geq 30$ (que se da), $np = 2500 \cdot 0{,}02 = 50 \geq 5$ (se da) y $nq = 2500 \cdot 0{,}98 = 2450 \geq 5$ (se da).

Entonces $X \simeq X' \sim N(np, \sqrt{npq}) = N(50, 7)$. Aplicando la corrección por continuidad de Yates, se tiene

$$\begin{aligned} P(X \leq 57) \approx P(X' \leq 57{,}5) &= P\left(Z \leq \frac{57{,}5 - 50}{7}\right) \\ &= P(Z \leq 1{,}071428\ldots) \approx P(Z \leq 1{,}07) = 0{,}8577 \end{aligned}$$

d) Ahora la solución exacta sería

$$P(X = 50) = \binom{2500}{50} \cdot 0,02^{50} \cdot 0,98^{2450},$$

cuyo cálculo numérico no se puede hacer con la calculadora. Por ello, aproximamos de nuevo la binomial por la normal y aplicamos la corrección por continuidad de Yates para observar que

$$\begin{aligned} P(X=50) \approx P(49{,}5 \leq X' \leq 50{,}5) &= P\left(\frac{49{,}5-50}{7} \leq Z \leq \frac{50{,}5-50}{7}\right) \\ &= P(-0{,}071428\ldots \leq Z \leq 0{,}071428\ldots) \\ &\approx P(-0{,}07 \leq Z \leq 0{,}07) = P(Z \leq 0{,}07) - P(Z \leq -0{,}07) \\ &= P(Z \leq 0{,}07) - (1 - P(Z \leq 0{,}07)) \\ &= 2P(Z \leq 0{,}07) - 1 = 2 \cdot 0{,}5279 - 1 \\ &= 0{,}0558. \end{aligned}$$

En todo el ejercicio es claro que estamos denotando por Z a la variable aleatoria tipificada que sigue una distribución $N(0,1)$.