RESOLUCIÓN DEL EXAMEN EBAU JUNIO 2024
MATEMÁTICAS II

El objeto de este documento es doble. Por una parte, proporcionar a los profesores y alumnos de Bachillerato de la Región de Murcia la **resolución del examen** de Matemáticas II de la convocatoria EBAU2024-JUNIO. Por otra parte, **agilizar las posibles reclamaciones** a la corrección del examen, toda vez que, habiendo hecho pública la resolución de las cuestiones, pueda ser más fácil indentificar posibles errores en la corrección. Evidentemente, por la propia naturaleza de la disciplina, **una misma cuestión admite múltiples soluciones válidas y correctas** y resulta prácticamente imposible recoger aquí toda esa variedad de soluciones. Por supuesto, cualquier otra solución a cualquiera de las cuestiones del examen que sea correcta y esté bien argumentada deberá ser considerada como válida en el proceso de corrección, **aunque no esté incluida en este documento**.

Como es bien sabido, el examen consta de un total de **ocho cuestiones** y se debe responder a un **máximo de cuatro** de ellas, elegidas libremente por el alumno. Las ocho cuestiones se pueden agrupar por bloques temáticos de la siguiente manera, pero insistimos en que se pueden escoger libremente un máximo de cuatro y en cualquier orden, **independientemente de que pertenezcan o no al mismo bloque temático**:

Cuestiones 1 y 2: Del bloque de Números y Álgebra (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 3 y 4: Del bloque de Análisis (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 5 y 6: Del bloque de Geometría (2,5 puntos cada una).

Cuestiones 7 y 8: Del bloque de Estadística y Probabilidad (2,5 puntos una).

Si se responde a más de cuatro cuestiones, sólo se corrigen las cuatro primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se pueden usar las tablas estadísticas que se proporcionan con el examen y, según la normativa vigente, no se puden usar calculadoras gráficas ni programables.

En Murcia, a 6 de junio de 2024.

Luis J. Alías Linares
Coordinador Matemáticas II
Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia

Bloque 1: Números y Álgebra (2,5 puntos cada una)

Cuestión 1.

(2,5 p.) En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

A continuación se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías: Grand Slam = 2.000 puntos; Masters 1000 = 1.000 puntos; ATP 500 = 500 puntos.

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución: Se trata de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, en donde las incógnitas son el número de torneos ganados por Carlitos en cada una de las categorías en los años 2022 y 2023. Denotemos por x el número de torneos ganados de categoría Grand Slam, por y el número de torneos ganados de categoría Masters 1000 y por z el número de torneos ganados de categoría ATP 500. El primer dato del ejercicio es que "Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos", que da lugar a la primera ecuación:

$$x + y + z = 10.$$

El segundo dato del ejercicio es que esto "le proporcionó un total de 10.000 puntos", que da lugar a la segunda ecuación:

$$2.000x + 1.000y + 500z = 10.000 \Longrightarrow 4x + 2y + z = 20.$$

El tercer dato del ejercicio es que "el número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías", que da lugar a la tercera ecuación:

$$z = \frac{x+y}{2} + 1 \Longrightarrow x + y - 2z = -2.$$

Por lo tanto, hay que resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 10 \\ 4x + 2y + z & = & 20 \\ x + y - 2z & = & -2 \end{array} \right.$$

El sistema se puede resolver por cualquiera de los métodos que se desee. En este caso optamos por el que pensamos que es más sencillo, pero cualquier método utilizado, siendo correcto, es válido. Si restamos la tercera ecuación a la primera llegamos directamente a

$$3z = 12 \Longrightarrow z = \frac{12}{3} = 4.$$

Reemplazamos el valor de $z = 4$ en la primera y en la segunda ecuación y resulta un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas para x e y:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 6 \\ 4x + 2y & = & 16 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 6 \\ 2x + y & = & 8 \end{array} \right.$$

Restando la primera ecuación a las segunda se tiene directamente

$$x = 2.$$

Finalmente, con la primera ecuación calculamos $y = 4$.

Por lo tanto, en los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó 2 torneos de Grand Slam (US Open 2022 y Wimbledon 2023), 4 torneos de Masters 1000 (Miami 2022, Madrid 2022, Indian Wells 2023 y Madrid 2023) y 4 de ATP 500 (Río de Janeiro 2022, Barcelona 2022, Barcelona 2023 y Queen's Club 2023).

Cuestión 2.

Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **(1 p.)** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) **(0,75 p.)** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **(0,75 p.)** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución: a) Ambas matrices están formadas solo por 1's y -1's. Para determinar cuál de ellas es o no de Hadamard basta con comprobar si cumplen la identidad $A \cdot A^t = 2I$. En el primer caso, un sencillo cálculo nos muestra que

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I,$$

por lo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ sí es de Hadamard. En el segundo caso, resulta

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \neq 2I,$$

por lo que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ no es de Hadamard.

b) Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, sabemos que $A \cdot A^t = 2I$. Tomando determinantes en esta igualdad y utilizando propiedades básicas de los determinantes, se tiene

$$|A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A|^2 = |2I| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 \Longrightarrow |A| = \pm\sqrt{4} = \pm 2.$$

c) Por el apartado anterior, sabemos ya que cualquier matriz A de Hadamard de orden 2 tiene $|A| \neq 0$, por lo que es regular. Además, a partir de la condición $A \cdot A^t = 2I$ podemos calcular explícitamente su inversa en términos de A^t, ya que

$$A \cdot A^t = 2I \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot (A \cdot A^t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}A^t\right) = \frac{1}{2}(2I) = I\,.$$

Es decir,

$$A \cdot \left(\frac{1}{2}A^t\right) = I \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}A^t\,.$$

Bloque 2: Cuestiones 3 y 4. Análisis (2,5 puntos cada una)

Cuestión 3.

Calcule los siguientes límites:

a) **(1 p.)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2}$.

b) **(0,75 p.)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+9} - \sqrt{x-9}$.

c) **(0,75 p.)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

Solución: a) Comenzamos calculando

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2} = \frac{\cos(0) - \cos(0)}{0^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) + 2\operatorname{sen}(2x)}{2x} = \frac{-3\operatorname{sen}(0) + 2\operatorname{sen}(0)}{0} = \frac{-3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{0} = \frac{0}{0}.$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{-3\operatorname{sen}(3x) + 2\operatorname{sen}(2x)}{2x} &= \lim_{x \to 0} \frac{-9\cos(3x) + 4\cos(2x)}{2} \\ &= \frac{-9\cos(0) + 4\cos(0)}{2} \\ &= \frac{-9 \cdot 1 + 4 \cdot 1}{2} = -\frac{5}{2}. \end{aligned}$$

En resumen
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=-\frac{5}{2}.$$

Otra forma: Utilizando la fórmula trigonométrica
$$\cos A-\cos B=-2\,\mathrm{sen}\left(\frac{A+B}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{A-B}{2}\right),\qquad \text{con } A=3x \text{ y } B=2x.$$
se tiene que
$$\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\frac{-2\,\mathrm{sen}(\frac{5x}{2})\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2})}{x^2}=-2\frac{\mathrm{sen}(\frac{5x}{2})}{x}\frac{\mathrm{sen}(\frac{x}{2})}{x},$$
de manera que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=-2\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\frac{5x}{2})}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\frac{x}{2})}{x}.$$
A continuación, observamos que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\frac{5x}{2})}{x}=\frac{\mathrm{sen}(0)}{0}=\frac{0}{0}$$
y, aplicando la regla de L'Hôpital, se llega a
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\frac{5x}{2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{5}{2}\cos(\frac{5x}{2})}{1}=\frac{5}{2}\cos(0)=\frac{5}{2}.$$
Análogamente
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(\frac{x}{2})}{x}=\frac{\mathrm{sen}(0)}{0}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cos(\frac{x}{2})}{1}=\frac{1}{2}\cos(0)=\frac{1}{2}.$$
En definitiva
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=-2\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{5}{2}.$$

b) En primer lugar observamos que
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}=\infty-\infty.$$

Un modo sencillo de resolver esta indeterminación es multiplicando y dividiendo por el conjugado y operando algebraicamente:
$$\begin{aligned}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}&=\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}\\&=\frac{(\sqrt{x+9})^2-(\sqrt{x-9})^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{x+9-(x-9)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}\\&=\frac{x+9-x+9}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+9}-\sqrt{x-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}} = \frac{18}{+\infty} = 0.$$

c) En este caso, un primer cálculo nos indica que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Podemos resolver esta indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital y se tiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{2}{+\infty} = 0.$$

Cuestión 4.

a) **(1,5 p.)** Calcule la siguiente integral indefinida $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$.

b) **(1 p.)** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$.

Solución: a) Se trata de una integral típica que se resuelve por partes haciendo $u = x^2$ y $dv = \operatorname{sen} x dx$. En ese caso se tiene $du = 2x dx$ y $v = \int \operatorname{sen} x dx = -\cos x$, por lo que

$$\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx.$$

Hacemos de nuevo integración por partes en la nueva integral, tomando ahora $u = x$ y $dv = \cos x dx$, de manera que $du = dx$ y $v = \int \cos x dx = \operatorname{sen} x$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 \operatorname{sen} x dx &= -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x dx\right)\\ &= -x^2 \cos x + 2\left(x \operatorname{sen} x + \cos x\right) = -x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x + C.\end{aligned}$$

b) En primer lugar, estudiamos el signo de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ en el intervalo de integración $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La función x^2 es siempre no negativa, $x^2 \geq 0$, por lo que el signo de $f(x)$ depende únicamente del signo de la función $\operatorname{sen} x$. Por resultados de trigonometría básica, sabemos que la función seno es negativa en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, se anula justo en en $x = 0$ y es positiva en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$. Por lo tanto, el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 \operatorname{sen} x$ viene dado por

$$\text{Área} = \left|\int_{-\pi/2}^{0} x^2 \operatorname{sen} x dx\right| + \left|\int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x dx\right| = -\int_{-\pi/2}^{0} x^2 \operatorname{sen} x dx + \int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x dx.$$

Haciendo uso de la regla de Barrow y de la integral indefinida calculada en el apartado anterior, se tiene

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 \operatorname{sen} x dx = (-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x)\Big|_{-\pi/2}^{0} = 2 - \pi < 0.$$

Análogamente,

$$\int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x dx = (-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2\cos x)\Big|_{0}^{\pi/2} = \pi - 2 > 0.$$

Con todo esto, concluimos que

$$\text{Área} = 2(\pi - 2).$$

También se podría haber razonado por simetría, dado que $f(-x) = -f(x)$ y el intervalo es simétrico respecto del origen, para justificar que

$$\text{Área} = -\int_{-\pi/2}^{0} x^2 \operatorname{sen} x dx + \int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x dx = 2\int_{0}^{\pi/2} x^2 \operatorname{sen} x dx = 2(\pi - 2).$$

Bloque 3: Cuestiones 5 y 6. Geometría (2,5 puntos cada una)

Cuestión 5.

Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{0}$.

a) **(1 p.)** Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.

b) **(0,5 p.)** Calcule la distancia de la recta r al plano π.

c) **(1 p.)** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución: a) El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (1, -1, 0)$ y el vector normal del plano π es $\vec{n}_\pi = (1, 1, 1)$. Observamos que el producto escalar de ambos vectores es

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1, -1, 0) \cdot (1, 1, 1) = 1 - 1 = 0.$$

Por lo tanto, o bien la recta está contenida en el plano o bien la recta y el plano son paralelos. Para descartar el primer caso, basta con comprobar que un punto cualquiera de la recta no esté en el plano. Tomamos el punto de la recta $P(0, 1, 0)$ y vemos que no está en el plano, ya que sus coordenadas no cumplen la ecuación del plano, puesto que

$$0 + 1 + 0 = 1 \neq -1.$$

En consecuencia, la recta r y el plano π son paralelos.

b) Como ya sabemos que son paralelos, $d(\pi, r) = d(\pi, P)$ para cualquier punto P de r. Tomamos de nuevo el punto $P(0,1,0)$ y concluimos que

$$d(\pi, r) = d(\pi, P) = \frac{|0+1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

c) Como el plano contiene a la recta r, podemos tomar como punto del plano el propio punto $P(0,1,0) \in r$ y como uno de los dos vectores directores del plano el propio vector $\vec{v}_r = (1,-1,0)$. Además, como el plano que estamos buscando debe ser también perpendicular al plano π, podemos tomar como segundo vector director del plano el vector normal del plano π, es decir, $\vec{n}_\pi = (1,1,1)$. Con estos ingredientes, podemos calcular la ecuación general del plano requerido, haciendo simplemente el determinante

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & 1 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -x+2z-y+1=0 \Longrightarrow x+y-2z=1.$$

Cuestión 6.

Considere las siguientes rectas:

$$r: \begin{cases} x+2y & = & 13 \\ z & = & 2 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad s: \begin{cases} y+2z & = & 4 \\ -x+y & = & 3 \end{cases}$$

a) **(1 p.)** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **(0,5 p.)** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **(1 p.)** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución: a) Veamos en primer lugar que las rectas no se cortan. Como ambas rectas vienen dadas por sus ecuaciones implícitas, la manera más sencilla de comprobar que no se cortan es comprobar que el sistema de 4 ecuaciones con 3 incógnitas obtenido al unir las 2 ecuaciones implícitas de las rectas es un sistema incompatible (no tiene ninguna solución). Consideramos, por tanto, el sistema

$$\begin{cases} x+2y & = & 13 \\ z & = & 2 \\ y+2z & = & 4 \\ -x+y & = & 3 \end{cases}$$

Por la segunda ecuación sabemos ya que $z=2$. Reemplazando este valor de z en la tercera ecuación se tiene que

$$y+4=4 \Longrightarrow y=0.$$

Y reemplazando ahora este valor de y en la primera ecuación resulta $x=13$. Pero, si lo reemplazamos en la cuarta ecuación, resulta $x=-3$. Por lo tanto, el sistema es incompatible lo que significa, geométricamente, que las rectas no se cortan. En ese caso, puede ocurrir que sean paralelas o que se crucen en el espacio.

Para descartar que las rectas sean paralelas, basta con comprobar que los vectores directores de ambas rectas no son proporcionales. Calculamos el vector director de la recta r haciendo

$$\vec{v}_r = (1,2,0)\times(0,0,1) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2,-1,0).$$

y, análogamente, el de la recta s

$$\vec{v}_s = (0,1,2)\times(-1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i} = (-2,-2,1).$$

Vemos entonces que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, ya que no existe ningún $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{v}_s = \lambda\vec{v}_r$, ya que

$$\lambda\vec{v}_r = \lambda(2,-1,0) = (2\lambda,-\lambda,0) \neq (-2,-2,1) \text{ para cualquier } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Otra forma de razonar que $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales es argumentando que su producto vectorial es $\vec{v}_r \times \vec{v}_s \neq (0,0,0)$,

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - 2\vec{j} - 6\vec{k} = (-1,-2,-6) \neq (0,0,0).$$

Así mismo, también se puede hacer justificando que el rango de la matriz $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ es 2 porque tiene algún menor de orden 2 distinto de 0, por ejemplo $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$.

b) Para ello, basta con comprobar que las coordenadas de $P(0,3,0)$ no cumplen ninguna de las dos ecuaciones. En el caso de las ecuaciones de la recta r, se tiene

$$\begin{cases} 0 + 2\cdot 3 = 6 & \neq & 13 \\ 0 & \neq & 2 \end{cases}$$

Y para el caso de la recta s

$$\begin{cases} 3 + 2\cdot 0 = 3 & \neq & 4 \\ -0 + 3 = 3 & = & 3 \end{cases}$$

Por tanto P no está en ninguna de ellas.

c) Como el plano contiene al punto P y es paralelo a las rectas r y s, podemos tomar como punto del plano el propio punto $P(0,3,0)$ y como vectores directores del plano los vectores $\vec{v}_r = (2,-1,0)$ y $\vec{v}_s = (-2,-2,1)$. Con estos ingredientes, podemos calcular la ecuación general del plano requerido, haciendo simplemente el determinante

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-3 & -1 & -2 \\ z-0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow -x - 4z - 2z - 2y + 6 = 0 \Longrightarrow x + 2y + 6z = 6.$$

Con estos mismos ingredientes, también se podría haber calculado la ecuación vectorial, haciendo

$$(x, y, z) = (0, 3, 0) + \lambda \cdot (2, -1, 0) + \mu \cdot (-2, -2, 1)$$

o la paramétrica, llegando a

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x = 0 + 2\lambda - 2\mu & = & 2\lambda - 2\mu \\ y = 3 - \lambda - 2\mu & = & 3 - \lambda - 2\mu \\ z = 0 + 0\lambda + \mu & = & \mu \end{array} \right. \quad \text{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Cuestiones 7 y 8. Estadística y Probabilidad (2,5 puntos cada una)

Cuestión 7.

El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **(0,5 p.)** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

b) **(0,75 p.)** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

c) **(0,5 p.)** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

d) **(0,75 p.)** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución: a) Independientemente de lo que saque Ana, Bea sacará un 3. Por tanto el suceso "Ana gana a Bea" es equivalente al suceso "Ana saca un 4" y se tiene

$$P(\text{Ana gana a Bea}) = P(\text{Ana=4}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

b) Por lo visto ya en el apartado anterior, observamos en primer lugar que si Ana juega contra Bea 1 vez, la probabilidad de que gane Bea es

$$p = P(\text{Bea gana a Ana}) = 1 - P(\text{Ana gana a Bea}) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Si esto se repite 8 veces y denotamos por X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que gana Bea, sabemos que X sigue una distribución binomial de parámetros $n = 8$ (número de veces que Ana juega contra Bea) y $p = 1/3$ (probabilidad de que gane Bea en una partida). Por lo tanto, se trata de calular la probabilidad de que $X \geq 3$, es decir,

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)).$$

Consultando la tabla de la binomial proporcionada con el examen (con $n = 8$ y $p = 1/3$), se tiene

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) \\ &= 1 - (0,0390 + 0,1561 + 0,2731) \\ &= 1 - 0,4682 = 0,5318. \end{aligned}$$

Por supuesto, esto último también se puede resolver utilizando la fórmula de las probabilidades de una distribución binomial,

$$\begin{aligned} P(X \geq 3) &= 1 - P(X \leq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) \\ &= 1 - \binom{8}{0}(1/3)^0(2/3)^8 - \binom{8}{1}(1/3)^1(2/3)^7 - \binom{8}{2}(1/3)^2(2/3)^6 \\ &= 1 - 0,0390184425 - 0,156073769 - 0,273129096 \\ &= = 1 - 0,4682213075 = 0,5317786925 \approx 0,5318. \end{aligned}$$

c) Para que Ceci gane a Ana pueden suceder dos cosas. O bien Ana saca un 0 (y en ese caso no importa lo que saque Ceci), o bien Ana saca un 4 y Ceci saca un 6. Por tanto, el suceso "Ceci gana a Ana" se puede descomponer como unión disjunta de dos sucesos: "Ana saca un 0" y "Ana saca un 4 y Ceci saca un 6":

$$\text{“Ceci gana a Ana”} = (\text{Ana}{=}0) \cup (\text{Ana } {=}4 \text{ y Ceci}{=}6)$$

y esta unión es disjunta, porque

$$(\text{Ana}{=}0) \cap (\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6) = \emptyset,$$

ya que Ana no puede sacar a la vez un 0 y un 4.

Por lo tanto,

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ana}{=}0) + P(\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6).$$

Calculamos a continuación estas dos probabilidades. En primer lugar

$$P(\text{Ana}{=}0) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por otro lado, el suceso "Ana saca un 4 y Ceci saca un 6" es la intersección de dos sucesos independientes, ya que

$$(\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci saca un } 6) = (\text{Ana}{=}\ 4) \cap (\text{Ceci}{=}6)$$

y los sucesos (Ana=4) y (Ceci=6) son independientes porque cada una juega con su dado y lo que saque una no afecta a lo que saque la otra. Por lo tanto

$$P(\text{Ana=4 y Ceci=6}) = P(\text{Ana= 4}) \cdot P(\text{Ceci=6}).$$

Sabemos ya que

$$P(\text{Ana=4}) = \frac{2}{3}$$

Además,

$$P(\text{Ceci=6}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

En definitiva, con todo esto concluimos que

$$\begin{aligned} P(\text{Ceci gana a Ana}) &= P(\text{Ana=0}) + P(\text{Ana=4 y Ceci=6}) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Otra forma: Para que Ceci gane a Ana pueden suceder dos cosas. O bien Ceci saca un 6 (y en ese caso no importa lo que saque Ana), o bien Ceci saca un 2 y Ana saca un 0. Por tanto, el suceso "Ceci gana a Ana" se puede descomponer como unión disjunta de dos sucesos: "Ceci saca un 6" y "Ceci saca un 2 y Ana saca un 0":

$$\text{“Ceci gana a Ana”} = (\text{Ceci=6}) \cup (\text{Ceci =2 y Ana=0})$$

y esta unión es disjunta, porque

$$(\text{Ceci=6}) \cap (\text{Ceci=2 y Ana=0}) = \emptyset,$$

ya que Ceci no puede sacar a la vez un 6 y un 2.

Por lo tanto,

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci=6}) + P(\text{Ceci=2 y Ana=0}).$$

Calculamos a continuación estas dos probabilidades. En primer lugar

$$P(\text{Ceci=6}) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Por otro lado, el suceso "Ceci saca un 2 y Ana saca un 0" es la intersección de dos sucesos independientes, ya que

$$(\text{Ceci saca un 2 y Ana saca un 0}) = (\text{Ceci=2}) \cap (\text{Ana=0})$$

y los sucesos (Ceci=2) y (Ana=0) son independientes porque cada una juega con su dado y lo que saque una no afecta a lo que saque la otra. Por lo tanto

$$P(\text{Ceci=2 y Ana=0}) = P(\text{Ceci=2}) \cdot P(\text{Ana=0}).$$

Sabemos ya que

$$P(\text{Ana}{=}0) = \frac{1}{3}$$

Además,

$$P(\text{Ceci}{=}2) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

En definitiva, con todo esto concluimos que

$$\begin{aligned} P(\text{Ceci gana a Ana}) &= P(\text{Ceci}{=}6) + P(\text{Ceci}{=}2 \text{ y Ana}{=}0) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

d) Cuando juegan todos contra todos, para que Ana ni gane ni pierda tiene que sacar necesariamente un 4 porque si saca un 0 pierde, independientemente de lo que saquen los demás. Además, habiendo sacado Ana un 4, necesita que o bien Ceci saque un 6 o bien Delia saque un 5 porque en caso contrario ganaría Ana. Por lo tanto, el suceso "Ana ni gana ni pierde" se puede descomponer como unión de dos sucesos: "Ana saca un 4 y Ceci saca un 6" y "Ana saca un 4 y Delia saca un 5":

$$\text{“Ana ni gana ni pierde”} = (\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6) \cup (\text{Ana}{=}4 \text{ y Delia}{=}5).$$

Pero esta unión no es disjunta ya que

$$(\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6) \cap (\text{Ana}{=}4 \text{ y Delia}{=}5) = (\text{Ana}{=}4,\ \text{Ceci}{=}\ 6 \text{ y Delia}{=}5).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} P(\text{Ana ni gana ni pierde}) &= P(\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6) + P(\text{Ana}{=}4 \text{ y Delia}{=}5) \\ &\quad - P(\text{Ana}{=}4,\ \text{Ceci}{=}\ 6 \text{ y Delia}{=}5). \end{aligned}$$

Como cada jugadora juega con su dado y lo que saque una no afecta a lo que saque la otra, los sucesos (Ana=4), (Ceci=6) y (Delia=5) son todos independendientes entre sí, de manera que

$$\begin{aligned} P(\text{Ana}{=}4 \text{ y Ceci}{=}6) &= P((\text{Ana}{=}4)\cap(\text{Ceci}{=}6)) = P(\text{Ana}{=}4)\cdot P(\text{Ceci}{=}6) \\ P(\text{Ana}{=}4 \text{ y Delia}{=}5) &= P((\text{Ana}{=}4)\cap(\text{Delia}{=}5)) = P(\text{Ana}{=}4)\cdot P(\text{Delia}{=}5) \\ P(\text{Ana}{=}4,\ \text{Ceci}{=}6 \text{ y Delia}{=}5) &= P((\text{Ana}{=}4)\cap(\text{Ceci}{=}6)\cap(\text{Delia}{=}5)) \\ &= P(\text{Ana}{=}4)\cdot P(\text{Ceci}{=}6)\cdot P(\text{Delia }{=}5). \end{aligned}$$

Sabemos ya que

$$P(\text{Ana}{=}4) = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad P(\text{Ceci}{=}6) = \frac{1}{3}$$

Además,

$$P(\text{Delia}{=}5) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Con todo esto, concluimos que

$$P(\text{Ana ni gana ni pierde}) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{4+6-2}{18} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9}.$$

Observación: Evidentemente, este apartado también se puede hacer por diagrama de árbol.

Cuestión 8.

Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68 % de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87 % tiene un CI menor que 102,5.

a) **(0,5 p.)** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b) **(1 p.)** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

c) **(1 p.)** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución: Denotamos por X la variable aleatoria dada por el CI de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia, y sabemos que X sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ.

a) Sabemos que el 6,68 % de los estudiantes tiene un CI mayor que 115, es decir, $X > 115$, y que el 59,87 % tiene CI menor que 102,4, es decir, $X < 102,4$. Por lo tanto, el resto de los estudiantes tendrá un CI comprendido entre 102,4 y 115, es decir, $102,5 < X < 115$, lo que supone un porcentaje de

$$100 - (6,68 + 59,87) = 100 - 66,55 = 33,45 \Longrightarrow 33,45\,\%.$$

b) Elegimos al azar 6 estudiantes y llamamos Y a la variable aleatoria que cuenta el número de los que tienen un CI menor que 115. La variable aleatoria Y sigue una distribución binomial de parámetros $n = 6$, porque elegimos 6 estudiantes al azar, y $p = P(X < 115)$, porque el éxito de nuestro experimento es "tener un CI menor que 115". Por los datos del ejercicio, sabemos que

$$p = P(X < 115) = 1 - P(X > 115) = 1 - 0,0668 = 0,9332$$

y, en consecuencia,

$$q = 1 - p = 1 - 0,9332 = 0,0668.$$

En términos de Y, la probabilidad de que al menos 5 tengan un CI menor que 115 viene dada por

$$\begin{aligned} P(Y \geq 5) &= P(Y = 5) + P(Y = 6) = \binom{6}{5} \cdot 0,9332^5 \cdot 0,0668^1 + \binom{6}{6} \cdot 0,9332^6 \\ &= 6 \cdot 0,9332^5 \cdot 0,0668^1 + 1 \cdot 0,9332^6 = 0,9332^5 \cdot (6 \cdot 0,0668 + 0,9332) \\ &= 0,9332^5 \cdot 1,334 = 0,944124962 \approx 0,9441. \end{aligned}$$

c) Sabemos que $X \sim N(\mu, \sigma)$ con μ y σ desconocidas. Además, sabemos que el 6,68 % de los estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87 % tiene un CI menor que 102,5, por lo que, en términos de probabilidad se tiene

$$P(X > 115) = 0,0668 \quad \text{y} \quad P(X < 102,5) = 0,5987,$$

Haciendo uso de la tipificación $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ sabemos que $Z \sim N(0, 1)$. A partir del primer dato, se tiene que

$$P(X < 115) = 1 - P(X > 115) = 1 - 0,0668 = 0,9332.$$

Pero, por otro lado

$$P(X < 115) = P\left(Z < \frac{115 - \mu}{\sigma}\right) = 0,9332.$$

Consultando en la tabla de $Z \sim N(0, 1)$, vemos que dicho valor de la probabilidad corresponde al valor de $z = 1,5$, es decir,

$$\frac{115 - \mu}{\sigma} = 1,5 \Longrightarrow 115 - \mu = 1,5\sigma \Longrightarrow \mu + 1,5\sigma = 115.$$

A partir del segundo dato, se tiene que

$$P(X < 102,5) = P\left(Z < \frac{102,5 - \mu}{\sigma}\right) = 0,5987$$

y, consultando de nuevo en la tabla de $Z \sim N(0, 1)$, vemos que dicho valor de la probabilidad corresponde al valor de $z = 0,25$, es decir,

$$\frac{102,5 - \mu}{\sigma} = 0,25 \Longrightarrow 102,5 - \mu = 0,25\sigma \Longrightarrow \mu + 0,25\sigma = 102,5.$$

Tenemos entonces un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (μ y σ)

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mu + 1,5\sigma & = & 115 \\ \mu + 0,25\sigma & = & 102,5 \end{array} \right.$$

cuya solución es media= $\mu = 100$ y desviación típica= $\sigma = 10$.