Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

Curso: 2023-2024

Asignatura: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2+a\right)z=0 \\ x+(2a-1)y+(a+1)z=a \\ (2a-1)y+(a+1)z=0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q\cdot A\cdot P=I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A\cdot P\cdot Q\cdot A=Q^{-1}\cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

P3) Se consideran el plano $\pi\equiv 2x+y-z-5=0$, la recta $r\equiv\begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,2,-1)$ y $B(1,1,-1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1.25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r\equiv\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1.25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1.25 puntos)

P6) Se considera la función $f(x)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0, 1]. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$.

(1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\ln x \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+\left(a^2+a\right)z=0 \\ x+(2a-1)y+(a+1)z=a \\ (2a-1)y+(a+1)z=0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

La matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 1 & 2a-1 & a+1 \\ 0 & 2a-1 & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ -1 & 0 & -a^2-a & 0 \\ \hline 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \end{array} \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \\ 0 & -2a+1 & a^2-1 & -a \\ \hline 0 & 0 & a^2+a & -a \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 \\ 0 & 0 & a^2+a \end{vmatrix} = (2a-1)\left(a^2+a\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \to 2a=1 \to \boxed{a=\dfrac{1}{2}} \\ a^2+a=0 \to a(a+1)=0 \to \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a+1=0 \to \boxed{a=-1} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a=-1$, $a=0$ y cuando $a=\frac{1}{2}$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1,\ a \neq 0\ y\ a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad\qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ (a^2+a)z = -a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad\qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ \boxed{z = \frac{-a}{a^2+a} = \frac{-a}{a(a+1)} = \frac{-1}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad\qquad (a^2+a)\frac{-1}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)\frac{-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a^2-a}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{a^2-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a(a+1)}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - a = 0 \\ (2a-1)y + a - 1 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x - a = 0 \\ (2a-1)y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x = a} \\ \boxed{y = \frac{1}{2a-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La solución es $x = a,\ y = \frac{1}{2a-1},\ z = \frac{-1}{a+1}$.

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix}}^{A/B}\right)$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ -3y=-1 \\ 0=1 \end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=0$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

CASO 4. $a=\frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a\neq -1,\ a\neq 0\ y\ a\neq \frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=a,\ y=\frac{1}{2a-1},\ z=\frac{-1}{a+1}$, si $a=-1$ o $a=\frac{1}{2}$ el sistema es incompatible y si $a=0$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$.

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q\cdot A\cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A\cdot P\cdot Q\cdot A = Q^{-1}\cdot P^{-1}$ (1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (1 punto)

a) Partimos de la igualdad $Q\cdot A\cdot P = I$.

$$\left.\begin{array}{l} Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow Q^{-1}\cdot Q\cdot A\cdot P = Q^{-1}\cdot I = Q^{-1} \Rightarrow A\cdot P = Q^{-1} \\ Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow Q\cdot A\cdot P\cdot P^{-1} = I\cdot P^{-1} = P^{-1} \Rightarrow Q\cdot A = P^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot P\cdot Q\cdot A = Q^{-1}\cdot P^{-1}$$

b) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2 que cumple $Q\cdot A\cdot P = I$.

$$Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b & a-b \\ -a-2c+2b+4d & a+2c-b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2b = 1 \\ a-b = 0 \\ -a+2b-2c+4d = 0 \\ a-b+2c-2d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b = 1 \\ a = b \\ -a+2b-2c+4d = 0 \\ a-b+2c-2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b+2b = 1 \to \boxed{b=1} \to \boxed{a=1} \\ -b+2b-2c+4d = 0 \\ b-b+2c-2d = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2c+4d = 0 \\ 2c-2d = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c+4d = -1 \\ 2c = 1+2d \end{cases} \Rightarrow -1-2d+4d = -1 \Rightarrow 2d = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d=0} \Rightarrow 2c-0 = 1 \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{2}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,2,-1)$ y $B(1,1,-1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1.25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

a) Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x+z+4=y \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ 2x-x+z+4-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ x-1=0 \to \boxed{x=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=-4 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{2}=-2} \Rightarrow \boxed{y=-1-2+4=1} \Rightarrow C(1,1,-2)$$

Las coordenadas del punto C son $C(1,1,-2)$.

Si los puntos A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} A(3,2,-1) \\ B(1,1,-1) \\ C(1,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}=(1,1,-2)-(3,2,-1)=(-2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AB}=(1,1,-1)-(3,2,-1)=(-2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{0}$$

Como los vectores no tienen coordenadas proporcionales los tres puntos no están alineados.

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=i+0+2k-2k-2j-0=$$

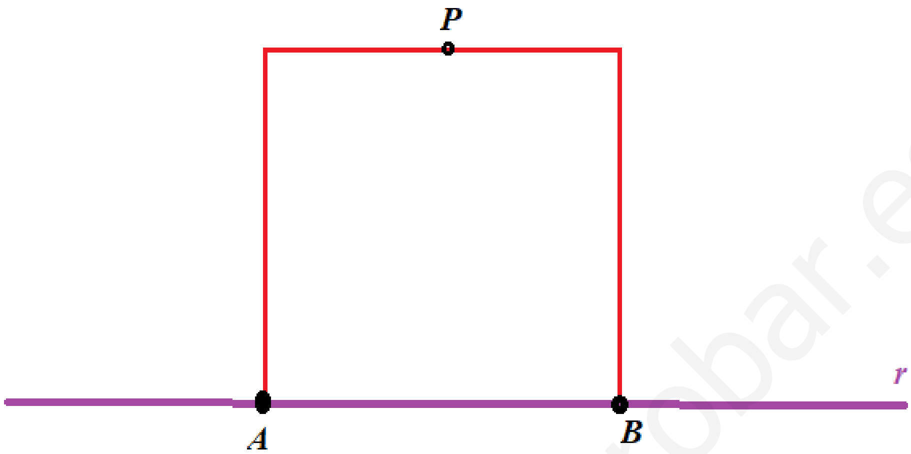
$$=i-2j=(1,-2,0)$$

$$Área\ \ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado. (2,5 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



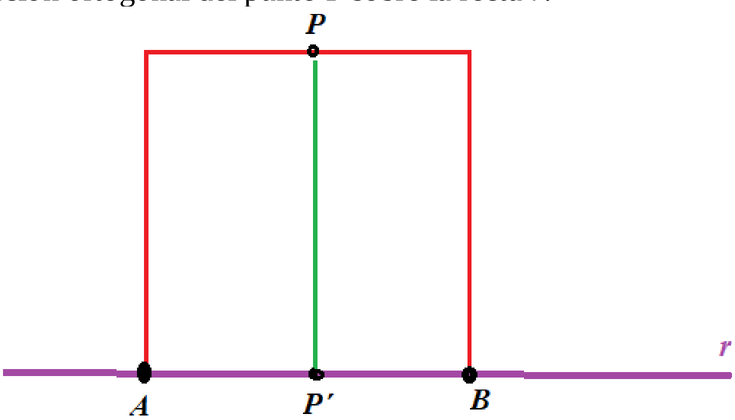
Nos piden hallar las coordenadas de los puntos A y B.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta *r*

$$r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x-2y \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+2x+2y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2y-2=0 \Rightarrow 2x+y-1=0 \Rightarrow y=1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=-2x-2(1-2x)=-2x-2+4x=-2+2x \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta *r*.



El punto P´ pertenece a la recta y tiene coordenadas $P´(\lambda,1-2\lambda,-2+2\lambda)$. El vector $\overrightarrow{PP´}$ es perpendicular al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(1,-2,2)$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PP'} = (\lambda, 1-2\lambda, -2+2\lambda) - (4,5,0) = (\lambda-4, -4-2\lambda, -2+2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PP'} = (\lambda-4, -4-2\lambda, -2+2\lambda) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,2) \\ \overrightarrow{PP'} \perp \overrightarrow{v_r} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (\lambda-4, -4-2\lambda, -2+2\lambda)(1,-2,2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda - 4 + 8 + 4\lambda - 4 + 4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \boxed{P'(0,1,-2)}$$

Hallamos la longitud del lado del cuadrado obteniendo el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'} = (0,1,-2) - (4,5,0) = (-4,-4,-2)$$

$$Lado = \sqrt{(-4)^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = 6\,unidades$$

Si A es uno de los vértices del cuadrado pertenece a la recta tiene coordenadas $A(\alpha, 1-2\alpha, -2+2\alpha)$. Además, la distancia de A a P´ es la mitad de la longitud del lado (3).

$$\overrightarrow{AP'} = (0,1,-2) - (\alpha, 1-2\alpha, -2+2\alpha) = (-\alpha, 2\alpha, 2\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{AP'}\right| = \sqrt{(-\alpha)^2 + (2\alpha)^2 + (2\alpha)^2} = \sqrt{9\alpha^2} = \begin{cases} 3\alpha \\ -3\alpha \end{cases} \\ d(A,P') = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha = 3 \to \alpha = 1 \to A(1, 1-2, -2+2) \to A(1,-1,0) \\ -3\alpha = 3 \to \alpha = -1 \to B(-1,3,-4) \end{cases}$$

Los vértices del cuadrado situados en la recta son A(1,–1,0) y B(–1,3,–4).
Comprobamos que P´ es el punto medio del segmento AB.

$$\frac{(1,-1,0) + (-1,3,-4)}{2} = (0,1,-2) = P'$$

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1.25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1.25 puntos)

a) Utilizamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt{x}\ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\infty} = \boxed{0}$$

b) Tomamos logaritmo neperiano.

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = L \Rightarrow \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{2x}{x-1}} = \ln L \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1}\ln x = \ln L \Rightarrow \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1}\ln x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \\[2ex] = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln x + 2x\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to 1} 2\ln x + 2 = 2\ln 1 + 2 = 2 \end{array}}$$

$$\ldots \Rightarrow 2 = \ln L \Rightarrow L = e^2$$

Hemos obtenido el valor del límite: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$

P6) Se considera la función $f(x)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x)$.
a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo [0, 1]. (0,5 puntos)
b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

a) La función es suma de funciones continuas y es una función continua en el intervalo [0, 1].

b) La función *f(x)* es continua y derivable en el intervalo [0, 1].
Podemos aplicar el teorema de Weierstrass que nos dice que si la función es continua en un intervalo existen puntos dentro del intervalo donde la función alcanza su máximo y mínimo absolutos.
También podemos aplicar el teorema de Fermat que nos dice que si una función derivable tiene un extremo relativo en un intervalo en dicho punto la derivada se anula.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\cos(\pi x)+\sin(\pi x) \Rightarrow f'(x)=-\pi\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow -\pi\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x)=0 \Rightarrow -\sin(\pi x)+\cos(\pi x)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\pi x)=\sin(\pi x) \Rightarrow \left.\begin{cases} 0<x<1 \\ 0<\pi x<\pi \end{cases}\right\} \Rightarrow \pi x=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x)=-\pi\sin(\pi x)+\pi\cos(\pi x) \Rightarrow f''(x)=-\pi^2\cos(\pi x)-\pi^2\sin(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right)=-\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2}=-\pi^2\sqrt{2}<0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x=\frac{1}{4}$ hay un máximo relativo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico.

$$f(0)=\cos(0)+\sin(0)=1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

$$f(1)=\cos(\pi)+\sin(\pi)=-1+0=-1$$

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{1}{4},\sqrt{2}\right)$ y un mínimo absoluto en $(1,-1)$.

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$.

(1.25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (1.25 puntos)

a) Comprobamos que el radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

$$2x^2+2x+3=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(2)(3)}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}=\text{ No existe}$$

El polinomio no cambia de signo en el intervalo $[-1,3]$. Tomamos $0\in[-1,3]$ y la expresión del radicando toma el valor 3 > 0.

El radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.

La función es continua en $[-1,3]$. La función es derivable en el intervalo $(-1,3)$ por ser composición de funciones derivables.

b) Utilizamos el teorema del valor medio.

Sea *f* continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un valor $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$ en el intervalo $[-1,3]$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, por lo que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$.

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{\sqrt{2\cdot3^2+2\cdot3+3}-\sqrt{2(-1)^2+2(-1)+3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que queda demostrado que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\ln x \text{ y } g(x)=\frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \ln x=\frac{x-1}{e-1}\Rightarrow \begin{cases} \ln x=\frac{x-1}{e-1}=0\to x=1 \\ \ln x=\frac{x-1}{e-1}=1\to x=e \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y e tenemos que $f(2)=\ln 2\simeq 0.69$ y $g(2)=\frac{2-1}{e-1}\simeq 0.58$.

Tenemos que $f(x)>g(x)$ en el intervalo (1, e).

El valor del área es la integral definida entre 1 y e de $f(x)-g(x)$.

$$Área=\int_1^e \ln x-\frac{x-1}{e-1}dx=\int_1^e \ln xdx-\frac{1}{e-1}\int_1^e x-1dx=\ldots$$

$$\int \ln xdx=\begin{Bmatrix} \text{Integración por partes} \\ u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=dx\to v=x \end{Bmatrix}=x\ln x-\int \frac{1}{x}xdx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\ldots=\left[x\ln x-x\right]_1^e-\frac{1}{e-1}\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^e=$$

$$=\left[e\ln e-e\right]-\left[1\cdot\ln 1-1\right]-\frac{1}{e-1}\left(\left[\frac{e^2}{2}-e\right]-\left[\frac{1^2}{2}-1\right]\right)=1-\frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2}-e+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{e-1}\cdot\frac{e^2-2e+1}{2}=1-\frac{1}{e-1}\cdot\frac{(e-1)^2}{2}=1-\frac{e-1}{2}=\boxed{\frac{3-e}{2}\simeq 0.14u^2}$$

El área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas tiene un valor de $\frac{3-e}{2}\simeq 0.14$ unidades cuadradas.