Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA | EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2023ko EZOHIKOA | EXTRAORDINARIA 2023

MATEMATIKA II | **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x+y+\alpha z=0 \\ 2x+\alpha y+z=1 \\ 3x+\alpha y+z=\alpha-1 \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.
Resuelve el sistema para $\alpha=0$, si es posible.

Ejercicio B1
Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Sea la recta *r* y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta *r* y del plano π.

Ejercicio B2
Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2,\ \pi_2 \equiv x-y-z=2 \text{ y } \pi_3 \equiv x+ay+z=b.$$

¿Existen valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.
En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3
Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

Ejercicio B3
Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f*(0) = 2, las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas y *f* tenga un extremo relativo en el punto *x* = −1. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si *f* tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula $\int \left(x^2+1\right)e^{x+1}dx$ explicando el método utilizado.

Ejercicio B4
Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y=2x^2-4x+3$ e $y=x^2-2x+3$ y calcula el área de ese recinto.

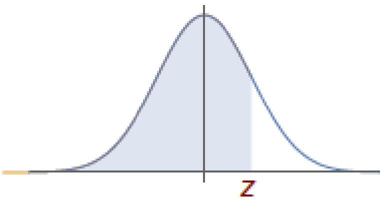
QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5
Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;
b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;
c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
Se considera el sistema de ecuaciones lineales que sigue:

$$\begin{cases} 3x+y+\alpha z=0 \\ 2x+\alpha y+z=1 \\ 3x+\alpha y+z=\alpha-1 \end{cases}$$

Discute su compatibilidad en función de los valores del parámetro α.
Resuelve el sistema para $\alpha=0$, si es posible.

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociadas al sistema son $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$ y $A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & \alpha & 0 \\ 2 & \alpha & 1 & 1 \\ 3 & \alpha & 1 & \alpha-1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 3 & 1 & \alpha \\ 2 & \alpha & 1 \\ 3 & \alpha & 1 \end{vmatrix}=3\alpha+3+2\alpha^2-3\alpha^2-2-3\alpha=-\alpha^2+1$$

$$|A|=0 \Rightarrow -\alpha^2+1=0 \Rightarrow \alpha^2=1 \Rightarrow \boxed{\alpha=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha\neq-1$ y $\alpha\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha=-1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & -1 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 2 & -2 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left.\begin{cases} 3\cdot Fila\,2^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 6 & -3 & 3 & 3 \\ -6 & -2 & 2 & 0 \\ \hline 0 & -5 & 5 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} 5\cdot Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -10 & 10 & -10 \\ 0 & 10 & -10 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -16 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ -16 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, pero la matriz A/B tiene rango 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $\alpha = 1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{cases} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{cases}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} 3\cdot Fila\,2^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 6 & 3 & 3 & 3 \\ -6 & -2 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B}\right) \Rightarrow$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq -1$ y $\alpha \neq 1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible y si $\alpha = 1$ el sistema es compatible indeterminado.

b) Para $\alpha = 0$ el sistema es compatible indeterminado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 2x + z = 1 \\ 3x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ z = 1 - 2x \\ 3x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ 3x + 1 - 2x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -3x \\ \boxed{x = -2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = -3(-2) = 6} \\ \boxed{z = 1 - 2(-2) = 5} \end{cases}$$

La solución del sistema es $x = -2;\ y = 6;\ z = 5$.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}.$$

La matriz A y B son de dimensiones 2×4.

$$\left.\begin{array}{l}A+B=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix},\\3A-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}A=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix}-B\\3A-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\left[\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix}-B\right]-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix}-3B-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}6&24&6&27\\6&18&6&33\end{pmatrix}-5B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}6&24&6&27\\6&18&6&33\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}=5B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}0&40&0&30\\10&0&10&15\end{pmatrix}=5B\Rightarrow B=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}0&40&0&30\\10&0&10&15\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{B=\begin{pmatrix}0&8&0&6\\2&0&2&3\end{pmatrix}}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&8&0&6\\2&0&2&3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{A=\begin{pmatrix}2&0&2&3\\0&6&0&8\end{pmatrix}}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea la recta *r* y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta *r* y del plano π.

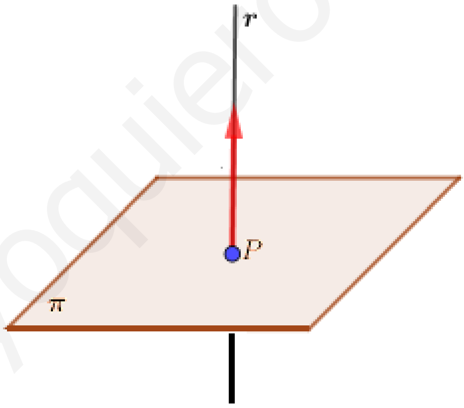
a) Hallamos la ecuación del plano.

El plano π pasa por el punto $Q(1,-1,2)$, por el punto $P(1,-1,2)$ y contiene al vector $(0,0,2)$.

$$\left.\begin{array}{l} Q(1,2,3)\in\pi \\ P(1,-1,2)\in\pi \\ \vec{v}=(0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(1,-1,2)\in\pi \\ \vec{u}=\overrightarrow{QP}=(1,-1,2)-(1,2,3)=(0,-3,-1) \\ \vec{v}=(0,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow -6(x-1)=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-1=0}$$

Hallamos la ecuación de la recta.



La recta *r* contiene el punto $P(1,-1,2)$ y tiene como vector director el vector normal del plano π.

$$\pi\equiv x-1=0\Rightarrow \vec{n}=(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-1,2)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r\equiv\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1 \\ z=2 \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R}}$$

Ejercicio B2
Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2,\ \pi_2 \equiv x-y-z=2 \text{ y } \pi_3 \equiv x+ay+z=b.$$

¿Existen valores de los parámetros *a* y *b* para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.
En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

Planteamos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos que nos permite hallar los puntos de corte de los tres planos.

$$\left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv 4x+2y-4z=2\\ \pi_2 \equiv x-y-z=2\\ \pi_3 \equiv x+ay+z=b\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\pi_1 \equiv 2x+y-2z=1\\ \pi_2 \equiv x-y-z=2\\ \pi_3 \equiv x+ay+z=b\end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada asociada al sistema son:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 1\end{pmatrix} \qquad A/B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 2\\ 1 & a & 1 & b\end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=-2-1-2a-2-1+2a=-6\neq 0$$

Al no anularse el determinante de A el rango de A es 3, así como el de la matriz ampliada A/B e igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución) por lo que los planos se cortan en un punto (la solución del sistema) sean cuáles sean los valores de *a* y *b*.

No existen valores de *a* y *b* para los que los planos se corten en una recta.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$. Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*, calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues el denominador no se anula para ningún valor de *x*.

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1}=No\,existe$$

Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x* = *–2* y la derivada vale

  $f'(-2)=\frac{1-(-2)^2}{((-2)^2+1)^2}=\frac{-3}{25}<0$. La función decrece en $(-\infty,-1)$.

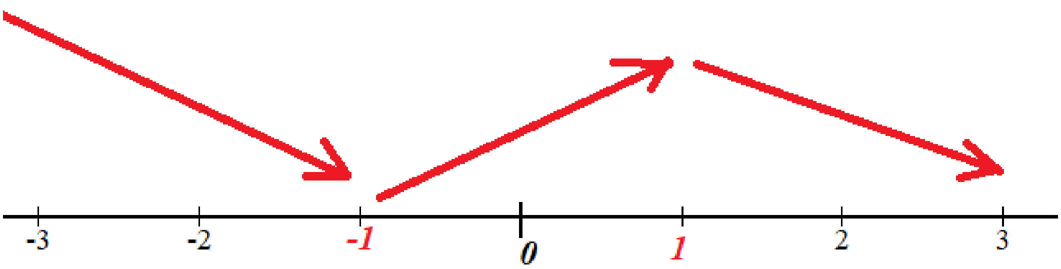
- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale $f'(0)=\frac{1-0^2}{(0^2+1)^2}=1>0$.

  La función crece en $(-1,1)$.

- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{1-2^2}{(2^2+1)^2}=\frac{-3}{25}<0$.

  La función decrece en $(1,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}$, por lo que no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1+0}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No tiene pues tiene asíntota horizontal.

La función solo tiene una asíntota horizontal: $y=0$.

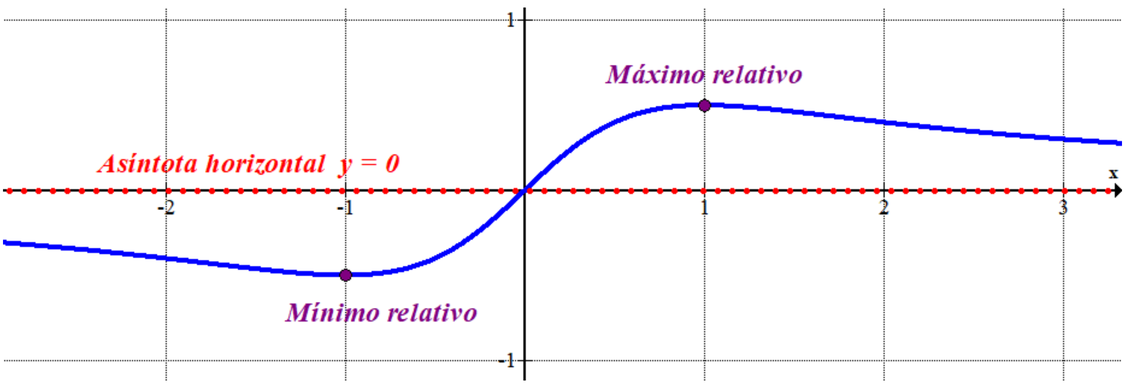
La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=\dfrac{0}{0^2+1}=0 \\ f'(0)=\dfrac{1-0^2}{\left(0^2+1\right)^2}=1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x}$$

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ tiene ecuación $y=x$.

Hacemos una tabla de valores de la función y la representamos.

x	$f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$
-3	-0.3
-1	$-1/2$
0	0
1	$1/2$
3	0.3



Ejercicio B3

Sea $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$ Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C* para que *f*(0) = 2, las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 sean paralelas y *f* tenga un extremo relativo en el punto *x* = −1. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si *f* tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

Sabemos que *f*(0) = 2 → $\left.\begin{array}{l} f(0)=0^3+A\cdot 0^2+B\cdot 0+C=C \\ f(0)=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C=2}$

La función queda $f(x)=x^3+Ax^2+Bx+2$.

Si las rectas tangentes a la gráfica de *f* en los puntos de abscisa *x* = 1 y *x* = 3 son paralelas entonces los valores de las derivadas en dichos puntos son iguales → $f'(1)=f'(3)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2Ax+B \\ f'(1)=f'(3) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 1^2+2A\cdot 1+B=3\cdot 3^2+2A\cdot 3+B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3+2A+\cancel{B}=27+6A+\cancel{B} \Rightarrow -4A=24 \Rightarrow \boxed{A=\frac{24}{-4}=-6}$$

La función queda $f(x)=x^3-6x^2+Bx+2$.

Si *f* tiene un extremo relativo en el punto *x* = −1 implica que $f'(-1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-12x+B \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2-12(-1)+B=0 \Rightarrow 3+12+B=0 \Rightarrow \boxed{B=-15}$$

La función queda $f(x)=x^3-6x^2-15x+2$.

Los valores buscados son $A=-6,\ B=-15,\ C=2$.

Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo?

Usamos la segunda derivada para averiguarlo.

$$f''(x)=6x-12 \Rightarrow f''(-1)=6(-1)-12=-18<0 \rightarrow \boxed{x=-1 \text{ es máximo relativo}}$$

Buscamos más puntos críticos de la función usando la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-12x-15 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-12x-15=0 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases} \dfrac{4+6}{2}=\boxed{5=x} \\ \dfrac{4-6}{2}=\boxed{-1=x} \end{cases}$$

La función tiene otro extremo relativo en $x=5$. Comprobamos si es máximo o mínimo usando la segunda derivada.

$$f''(5)=6\cdot 5-12=18>0 \rightarrow \boxed{x=5 \text{ es mínimo relativo}}$$

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int\left(x^2+1\right)e^{x+1}dx$ explicando el método utilizado.

Aplicamos el método de integración por partes.

$$\int\left(x^2+1\right)e^{x+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x^2+1\rightarrow du=2xdx\\ dv=e^{x+1}dx\rightarrow v=\int e^{x+1}dx=e^{x+1}\end{array}\right\}=$$

$$=\left(x^2+1\right)e^{x+1}-\int 2xe^{x+1}dx=\left(x^2+1\right)e^{x+1}-2\int xe^{x+1}dx=\ldots$$

$$\boxed{\int xe^{x+1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=x\rightarrow du=dx\\ dv=e^{x+1}dx\rightarrow v=\int e^{x+1}dx=e^{x+1}\end{array}\right\}=xe^{x+1}-\int e^{x+1}dx=xe^{x+1}-e^{x+1}}$$

$$\ldots=\left(x^2+1\right)e^{x+1}-2\left(xe^{x+1}-e^{x+1}\right)=x^2e^{x+1}+e^{x+1}-2xe^{x+1}+2e^{x+1}=\boxed{\left(x^2-2x+3\right)e^{x+1}+K}$$

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y=2x^2-4x+3$ e $y=x^2-2x+3$ y calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

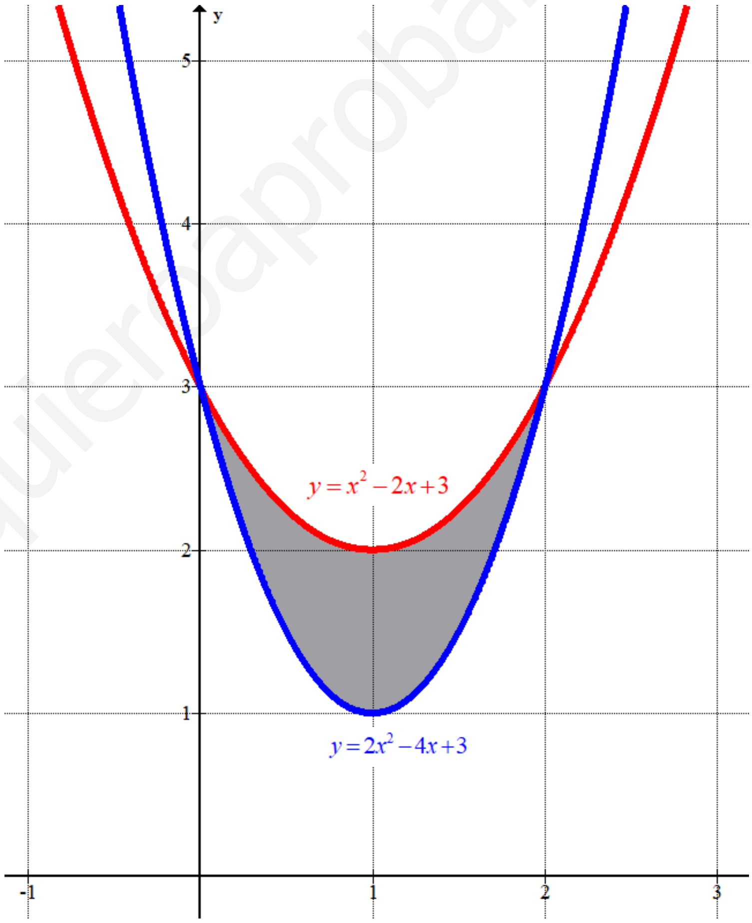
$$\left.\begin{array}{l} y=2x^2-4x+3 \\ y=x^2-2x+3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x^2-4x+\cancel{3}=x^2-2x+\cancel{3} \Rightarrow x^2-2x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x-2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores, dibujamos las gráficas de las funciones y el recinto limitado por sus gráficas.

x	$y=2x^2-4x+3$
-1	9
0	3
1	1
2	3
3	9

x	$y=x^2-2x+3$
-1	6
0	3
1	2
2	3
3	6



El área del recinto (pintado de gris en el dibujo superior) es el valor de la integral definida entre 0 y 2 de $y=x^2-2x+3$ menos $y=2x^2-4x+3$

$$\acute{A}rea=\int_0^2 \left(x^2-2x+3\right)-\left(2x^2-4x+3\right)dx=\int_0^2 x^2-2x+3-2x^2+4x-3dx=$$

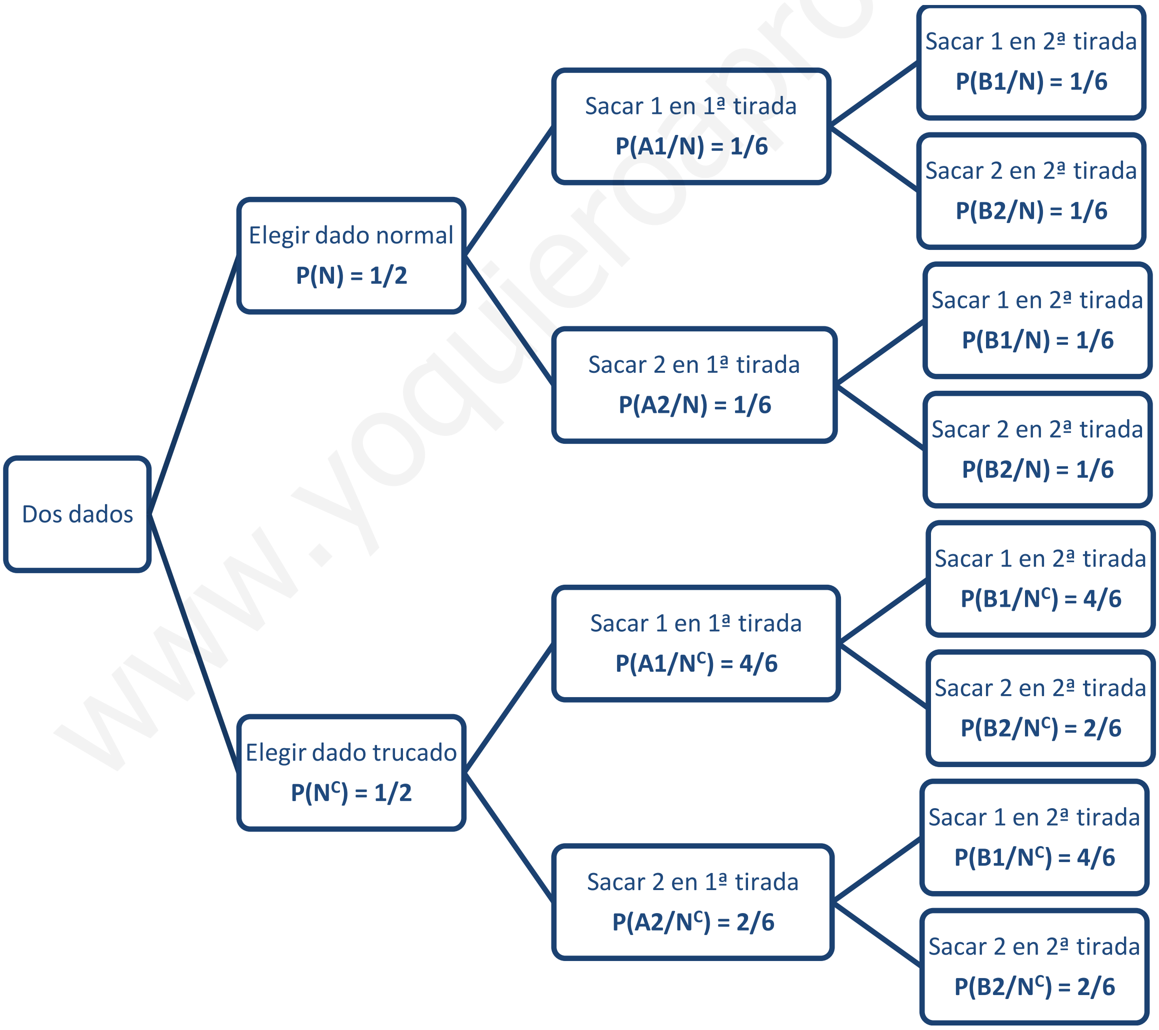
$$=\int_0^2 -x^2+2xdx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2\right]_0^2=\left[-\frac{2^3}{3}+2^2\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+0^2\right]=-\frac{8}{3}+4=\boxed{\frac{4}{3}\simeq 1.333\ u^2}$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.
a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?
b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Realizamos un diagrama de árbol para aclarar cómo funciona el experimento aleatorio.
Llamamos N al suceso "elegir dado normal" y N^C al suceso "elegir dado trucado".
Llamamos A1 al suceso "sacar 1 en la primera tirada", B1 al suceso "sacar 1 en la segunda tirada", A2 al suceso "sacar 2 en la primera tirada" y B2 a "sacar 2 en la 2ª tirada".
La primera tirada y la segunda son experimentos independientes.

$P(N) = 1/2$; $P(N^C) = 1/2$
$P(A1/N) = P(B1/N) = 1/6$; $P(A2/N) = P(B2/N) = 1/6$;
$P(A1/N^C) = P(B1/N^C) = 4/6$; $P(A2/N^C) = P(B2/N^C) = 2/6$.



(a) Nos piden calcular $P(1\text{en } 1^a \text{ y } 2\text{en}2^a)$. Este suceso puede ocurrir lanzando la moneda normal o la moneda trucada.

$$P\left(1\text{en } 1^{\text{a}} \text{ y } 2\text{en}2^{\text{a}}\right) = P\left(N \cap A1 \cap B2\right) + P\left(N^C \cap A1 \cap B2\right) =$$

$$= P(N)P(A1/N)P(B2/N) + P\left(N^C\right)P\left(A1/N^C\right)P\left(B2/N^C\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{72} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{1}{8} = 0.125}$$

(b) Nos piden calcular $P\left(N^C / \left(1\text{en } 1^{\text{a}} \text{ y } 2\text{en}2^{\text{a}}\right)\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(N^C / \left(1\text{en } 1^{\text{a}} \text{ y } 2\text{en}2^{\text{a}}\right)\right) = \frac{P\left(N^C \cap \left(1\text{en } 1^{\text{a}} \text{ y } 2\text{en}2^{\text{a}}\right)\right)}{P\left(\left(1\text{en } 1^{\text{a}} \text{ y } 2\text{en}2^{\text{a}}\right)\right)} =$$

$$= \frac{P\left(N^C \cap A1 \cap B2\right)}{P\left(N \cap A1 \cap B2\right) + P\left(N^C \cap A1 \cap B2\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \boxed{\frac{8}{9} \simeq 0.888}$$

Ejercicio B5
Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla
a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;
b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;
c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

X = Número de caras en 500 lanzamientos de una moneda.
Esta es una variable binomial siendo sus parámetros n = Número de repeticiones = 500 y p = probabilidad de éxito = probabilidad de sacar cara al lanzar una moneda = 0.5.

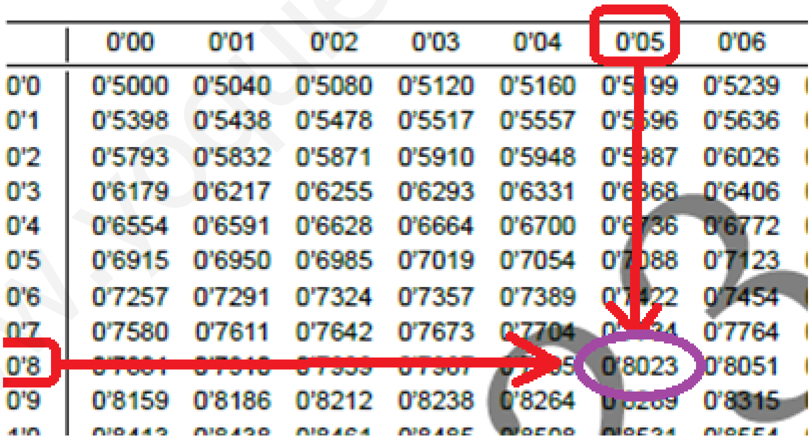
X = B(500, 0.5)

Como el número de repeticiones es muy alto y además n · p = 500 · 0.5 = 250 > 5 podemos aproximar la variable binomial X por una variable normal Y de parámetros media = μ = n · p = 250 y desviación típica = σ = $\sqrt{npq} = \sqrt{500 \cdot 0.5 \cdot 0.5} = 5\sqrt{5} \simeq 11.18$.
Y = N(250,11.18).

a) Nos piden calcular $P(X > 240)$.

$$P(X > 240) = \left\{ \begin{matrix} Corrección \\ de\,Yates \end{matrix} \right\} = P(Y \geq 240.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{240.5 - 250}{5\sqrt{5}}\right) = P(Z \geq -0.85) = P(Z \leq 0.85) = \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} = \boxed{0.8023}$$



	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	[illegible]	0'7764
0'8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'8023	0'8051
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	[illegible]	0'8315
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

b) Nos piden calcular $P(X < 230)$

$$P(X<230)=\left\{\begin{matrix}\textit{Corrección}\\ \textit{de Yates}\end{matrix}\right\}=P(Y\le 229.5)=\{\textit{Tipificamos}\}=$$

$$=P\left(Z\le\frac{229.5-250}{5\sqrt{5}}\right)=P(Z\le -1.83)=P(Z\ge 1.83)=$$

$$=1-P(Z\le 1.83)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.9664=\boxed{0.0336}$$

	0'00	0'01	0'02	0'03
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	[illegible]
1'8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0'9664
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732

c) Nos piden calcular $P(230\le X\le 240)$

$$P(230\le X\le 240)=\left\{\begin{matrix}\textit{Corrección}\\ \textit{de Yates}\end{matrix}\right\}=P(229.5\le Y\le 240.5)=$$

$$=P(Y\le 240.5)-P(Y\le 229.5)=1-P(Y>240.5)-P(Y\le 229.5)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Calculados en los}\\ \text{apartados a) y b)}\end{matrix}\right\}=1-0.8023-0.0336=\boxed{0.1641}$$