Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA — EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

2024ko OHIKOA — ORDINARIA 2024

MATEMATIKA II — **MATEMÁTICAS II**

Este examen tiene cinco partes, de 2,5 puntos cada una. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta.

En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario.

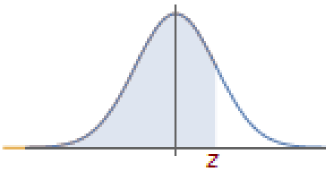
No olvides incluir el código en cada una de las hojas de examen.

No se podrán usar calculadoras que tengan alguna de las siguientes prestaciones:

- pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable,
- resolución de ecuaciones, operaciones con matrices,
- cálculo de determinantes,
- cálculo de derivadas e integrales,
- almacenamiento de datos alfanuméricos.

Universidad del País Vasco — Euskal Herriko Unibertsitatea

UNIBERTSITATERA SARTZEKO EBALUAZIOA	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
2024ko OHIKOA	ORDINARIA 2024
MATEMATIKA II	**MATEMÁTICAS II**



$N(0,1)$ kurbak $-\infty$-tik z-raino mugatutako azalerak

Áreas limitadas por la curva $N(0,1)$ desde $-\infty$ hasta z

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04	0'05	0'06	0'07	0'08	0'09
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160	0'5199	0'5239	0'5279	0'5319	0'5359
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557	0'5596	0'5636	0'5675	0'5714	0'5753
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948	0'5987	0'6026	0'6064	0'6103	0'6141
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331	0'6368	0'6406	0'6443	0'6480	0'6517
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700	0'6736	0'6772	0'6808	0'6844	0'6879
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054	0'7088	0'7123	0'7157	0'7190	0'7224
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389	0'7422	0'7454	0'7486	0'7517	0'7549
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704	0'7734	0'7764	0'7794	0'7823	0'7852
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995	0'8023	0'8051	0'8078	0'8106	0'8133
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264	0'8289	0'8315	0'8340	0'8365	0'8389
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508	0'8531	0'8554	0'8577	0'8599	0'8621
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729	0'8749	0'8770	0'8790	0'8810	0'8830
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925	0'8944	0'8962	0'8980	0'8997	0'9015
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099	0'9115	0'9131	0'9147	0'9162	0'9177
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251	0'9265	0'9279	0'9292	0'9306	0'9319
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382	0'9394	0'9406	0'9418	0'9429	0'9441
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495	0'9505	0'9515	0'9525	0'9535	0'9545
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591	0'9599	0'9608	0'9616	0'9625	0'9633
1'8	0'9641	0'9649	0'9656	0'9664	0'9671	0'9678	0'9686	0'9693	0'9699	0'9706
1'9	0'9713	0'9719	0'9726	0'9732	0'9738	0'9744	0'9750	0'9756	0'9761	0'9767
2'0	0'9772	0'9778	0'9783	0'9788	0'9793	0'9798	0'9803	0'9808	0'9812	0'9817
2'1	0'9821	0'9826	0'9830	0'9834	0'9838	0'9842	0'9846	0'9850	0'9854	0'9857
2'2	0'9861	0'9864	0'9868	0'9871	0'9875	0'9878	0'9881	0'9884	0'9887	0'9890
2'3	0'9893	0'9896	0'9898	0'9901	0'9904	0'9906	0'9909	0'9911	0'9913	0'9916
2'4	0'9918	0'9920	0'9922	0'9925	0'9927	0'9929	0'9931	0'9932	0'9934	0'9936
2'5	0'9938	0'9940	0'9941	0'9943	0'9945	0'9946	0'9948	0'9949	0'9951	0'9952
2'6	0'9953	0'9955	0'9956	0'9957	0'9959	0'9960	0'9961	0'9962	0'9963	0'9964
2'7	0'9965	0'9966	0'9967	0'9968	0'9969	0'9970	0'9971	0'9972	0'9973	0'9974
2'8	0'9974	0'9975	0'9976	0'9977	0'9977	0'9978	0'9979	0'9979	0'9980	0'9981
2'9	0'9981	0'9982	0'9982	0'9983	0'9984	0'9984	0'9985	0'9985	0'9986	0'9986
3'0	0'9987	0'9987	0'9987	0'9988	0'9988	0'9989	0'9989	0'9989	0'9990	0'9990
3'1	0'9990	0'9991	0'9991	0'9991	0'9992	0'9992	0'9992	0'9992	0'9993	0'9993
3'2	0'9993	0'9993	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9994	0'9995	0'9995	0'9995
3'3	0'9995	0'9995	0'9995	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9996	0'9997
3'4	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9997	0'9998
3'5	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998	0'9998
3'6	0'9998	0'9998	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'7	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'8	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999	0'9999
3'9	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000	1'0000

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x+y+z=2 \\ x+2y+(\alpha-1)z=-1 \\ 2x+y+(\alpha-2)z=1 \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha=1$.

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}=2.$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases} x=2\lambda, \\ y=-1+4\lambda, \\ z=2-\lambda; \end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} 2x-y=1, \\ z=3. \end{cases},$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
(c) **(0,75 p)** Dado el punto $P(-8,-8,0)$, calcula el punto Q de la recta *r* de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta *r*.

Ejercicio B2

Dados los puntos $P_1(1,4,5)$, $P_2(1,2,-1)$, $P_3(0,-2,3)$ y $P_4(-2,0,1)$, calcula:
(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4.
(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de *f*.
(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.

(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f.

Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx$ (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \frac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con bolas de colores, La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.

(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.

(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.

(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.

(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

Ejercicio B5

Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.

(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.

(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

Soluciones

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1
(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α :

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2 \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1 \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1 \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 & -1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \alpha - 1 \\ 2 & 1 & \alpha - 2 \end{vmatrix} = 2\alpha(\alpha - 2) + 2(\alpha - 1) + 1 - 4 - (\alpha - 2) - \alpha(\alpha - 1) =$$

$$= 2\alpha^2 - 4\alpha + 2\alpha - \cancel{2} + 1 - 4 - \cancel{\alpha} + \cancel{2} - \alpha^2 + \cancel{\alpha} = \alpha^2 - 2\alpha - 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{2+4}{2} = \boxed{3 = \alpha} \\ \frac{2-4}{2} = \boxed{-1 = \alpha} \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$.

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

CASO 2. Si $\alpha = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\1&2&-2&-1\\2&1&-3&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{Fila\,2^{a}+Fila\,1^{a}}\\1&2&-2&-1\\-1&1&1&2\\\hline 0&3&-1&1\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{a}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{Fila\,3^{a}+2\cdot Fila\,1^{a}}\\2&1&-3&1\\-2&2&2&4\\\hline 0&3&-1&5\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{a}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&2\\0&3&-1&1\\0&3&-1&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{Fila\,3^{a}-Fila\,2^{a}}\\0&3&-1&5\\0&-3&1&-1\\\hline 0&0&0&4\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{a}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}-1&1&1\\0&3&-1\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}2\\1\\4\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

La matriz A tiene rango 2 y la matriz ampliada A/B tiene rango 3. Las matrices tienen rangos distintos. El sistema es incompatible (sin solución).

CASO 3. Si $\alpha=3$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.
Transformamos la matriz ampliada A/B en otra equivalente más fácil de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}3&1&1&2\\1&2&2&-1\\2&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{2\cdot Fila\,2^{a}-Fila\,3^{a}}\\2&4&4&-2\\-2&-1&-1&-1\\\hline 0&3&3&-3\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{a}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{3\cdot Fila\,2^{a}-Fila\,1^{a}}\\3&6&6&-3\\-3&-1&-1&-2\\\hline 0&5&5&-5\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{a}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&1&2\\0&5&5&-5\\0&3&3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{3\cdot Fila\,2^{a}-5\cdot Fila\,3^{a}}\\0&15&15&-15\\0&-15&-15&15\\\hline 0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{a}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}3&1&1\\0&5&5\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}2\\-5\\0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

Resumiendo: Si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$ el sistema es compatible determinado, si $\alpha = -1$ el sistema es incompatible y si $\alpha = 3$ el sistema es compatible indeterminado.

Para $\alpha = 1$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Resolvemos el sistema.

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x+2y=-1 \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=2 \\ x=-1-2y \\ 2x+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-2y+y+z=2 \\ 2(-1-2y)+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -y+z=3 \\ -2-4y+y-z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=3+y \\ -3y-z=3 \end{cases} \Rightarrow -3y-3-y=3 \Rightarrow -4y=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{-6}{4}=\frac{-3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}} \\ \boxed{x=-1-2\frac{-3}{2}=2} \end{cases}$$

La solución es $x=2;\ y=\frac{-3}{2};\ z=\frac{3}{2}$.

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 .$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$ (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$

a) Si se multiplican todos los elementos de una fila por una misma contante, el determinante también queda multiplicado por esa constante.

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$$

Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el valor del determinante no cambia. Sumamos a la fila 3ª la fila 1ª y a la fila 2ª le restamos la fila 1ª.

$$3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$$

Por la primera propiedad utilizada podemos extraer (–1) de la fila 2ª y 2 de la fila 3ª.

$$3\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = 3(-1)2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -6(2) = \boxed{-12}$$

b) El determinante de una matriz y el de su traspuesta valen lo mismo.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 2$$

Si intercambiamos la columna 2ª y 3ª el determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -2$$

Y por la primera propiedad enunciada en el ejercicio podemos multiplicar la columna 3ª por 2 y multiplicar por 2 el determinante.

$$\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix} = -2(2) = \boxed{-4}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2
Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1+4\lambda, \\ z = 2-\lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x-y=1, \\ z=3. \end{cases},$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas *r* y *s*.
(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.
(c) **(0,75 p)** Dado el punto *P*(−8,−8, 0), calcula el punto *Q* de la recta *r* de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta *r*.

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1+4\lambda, \\ z = 2-\lambda; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ P_r(0,-1,2) \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} 2x-y=1, \\ z=3. \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} y=-1+2x, \\ z=3. \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+2\alpha, \\ z=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \\ Q_s(0,-1,3) \end{cases}$$

Comprobamos si los vectores directores tienen coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2}{1} = \frac{4}{2} \neq \frac{-1}{0}$$

No tienen coordenadas proporcionales y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o cruzan.
Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$.

$$\overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-1,3)-(0,-1,2) = (0,0,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,4,-1) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,2,0) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4-4 = 0$$

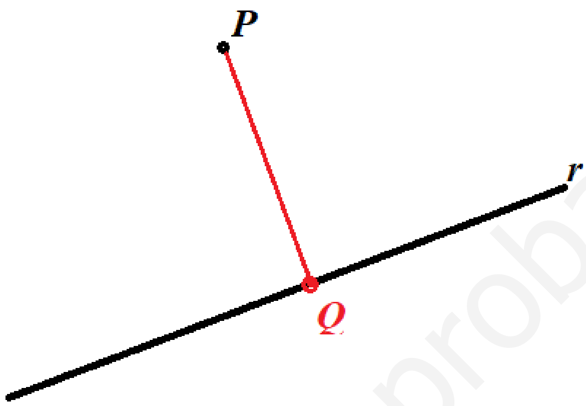
Como el producto mixto es nulo las rectas se cortan. Están en un mismo plano y coinciden en un único punto.

b) El plano que contiene ambas rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y pasa por el punto $P_r(0,-1,2)$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{v_s}=(1,2,0)\\ P_r(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y+1 & z-2\\ 2 & 4 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -y-1+4z-8-4z+8+2x=0\Rightarrow \boxed{\pi:2x-y-1=0}$$

c) Nos piden hallar el punto Q del dibujo.



Hallamos el plano perpendicular a la recta que pasa por el punto P. Luego hallamos el punto de corte del plano y la recta que será el punto Q.
El plano π´ perpendicular a la recta tiene como vector normal el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \overrightarrow{n'}=\overrightarrow{u_r}=(2,4,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}P(-8,-8,0)\in\pi'\\ \pi':2x+4y-z+D=0\end{array}\right\}\Rightarrow -16-32+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=48\Rightarrow \pi':2x+4y-z+48=0$$

Hallamos el punto Q de corte de la recta r y el plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}r\equiv\begin{cases}x=2\lambda,\\ y=-1+4\lambda,\\ z=2-\lambda;\end{cases}\\ \pi':2x+4y-z+48=0\end{array}\right\}\Rightarrow 4\lambda+4(-1+4\lambda)-2+\lambda+48=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4\lambda-4+16\lambda-2+\lambda+48=0\Rightarrow 21\lambda=-42\Rightarrow\lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2(-2)=-4\\ y=-1+4(-2)=-9\\ z=2+2=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{Q(-4,-9,4)}$$

El punto buscado es $Q(-4,-9,4)$.

Ejercicio B2
Dados los puntos $P_1(1, 4, 5)$, $P_2(1, 2,-1)$, $P_3(0,-2, 3)$ y $P_4(-2, 0, 1)$, calcula:
(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4.
(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

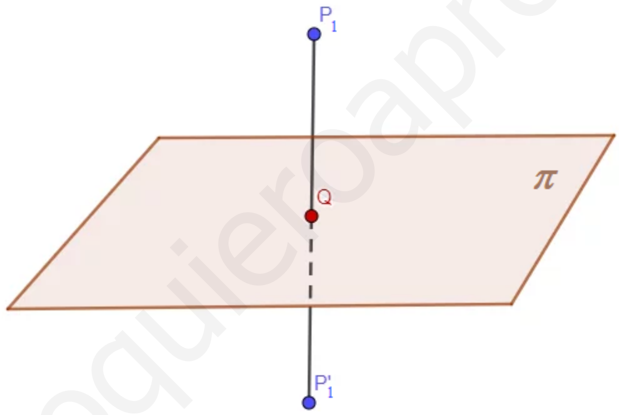
a) Hallamos la ecuación del plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{P_2P_3}=(0,-2,3)-(1,2,-1)=(-1,-4,4) \\ \vec{v}=\overrightarrow{P_2P_4}=(-2,0,1)-(1,2,-1)=(-3,-2,2) \\ P_4(-2,0,1)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x+2 & y & z-1 \\ -1 & -4 & 4 \\ -3 & -2 & 2 \end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8\cancel{(x+2)}-12y+2(z-1)-12(z-1)+2y+8\cancel{(x+2)}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12y+2z-2-12z+12+2y=0\Rightarrow -10y-10z+10=0\Rightarrow \boxed{\pi: y+z-1=0}$$

b) Nos piden hallar el punto P_1' del dibujo.



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por P_1, después hallamos el punto Q de corte de recta y plano. El punto Q es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_1'}$.
La recta perpendicular al plano tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: y+z-1=0\Rightarrow \vec{n}=(0,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=\vec{n}=(0,1,1) \\ P_1(1,4,5)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=4+\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto Q de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: y+z-1=0 \\ r:\begin{cases} x=1 \\ y=4+\alpha \\ z=5+\alpha \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow 4+\alpha+5+\alpha-1=0\Rightarrow 2\alpha=-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -4 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 - 4 = 0 \Rightarrow Q(1,0,1) \\ z = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

Para obtener el punto P_1' simétrico de P_1 respecto del plano π le sumamos al punto Q el vector $\overrightarrow{P_1Q}$.

$$\overrightarrow{P_1Q} = (1,0,1) - (1,4,5) = (0,-4,-4)$$

$$P_1' = Q + \overrightarrow{P_1Q} = (1,0,1) + (0,-4,-4) = (1,-4,-3)$$

El punto simétrico de P_1 respecto del plano π tiene coordenadas $P_1'(1,-4,-3)$.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea $f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de *f*.
(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*.
(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$
(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función *f*.

a) Hallamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-2x+1}=\frac{1}{1^2-2+1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-2x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-2\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-2\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-2\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty^2}}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$

La recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

b) Hallamos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{1(x^2-2x+1)-(2x-2)x}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{x^2-\cancel{2x}+1-2x^2+\cancel{2x}}{(x^2-2x+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-x^2+1}{(x^2-2x+1)^2}=0\Rightarrow -x^2+1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\boxed{x=\sqrt{1}=\pm 1}$$

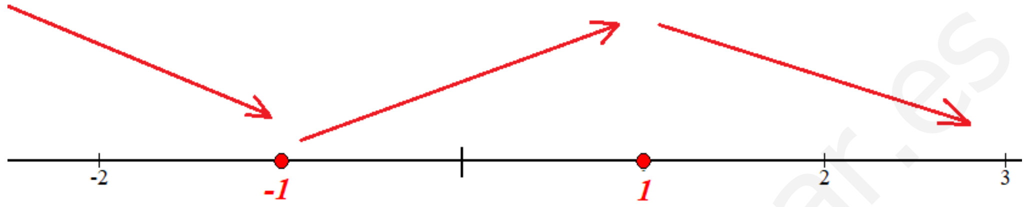
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores obtenidos.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale

$$f'(-2)=\frac{-(-2)^2+1}{\left((-2)^2-2(-2)+1\right)^2}=\frac{-3}{81}<0.$$ La función decrece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale
  $f'(0)=\dfrac{-0^2+1}{\left(0^2-2\cdot 0+1\right)^2}=1>0$. La función crece en $(-1,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale
  $f'(2)=\dfrac{-2^2+1}{\left(2^2-2\cdot 2+1\right)^2}=-3<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

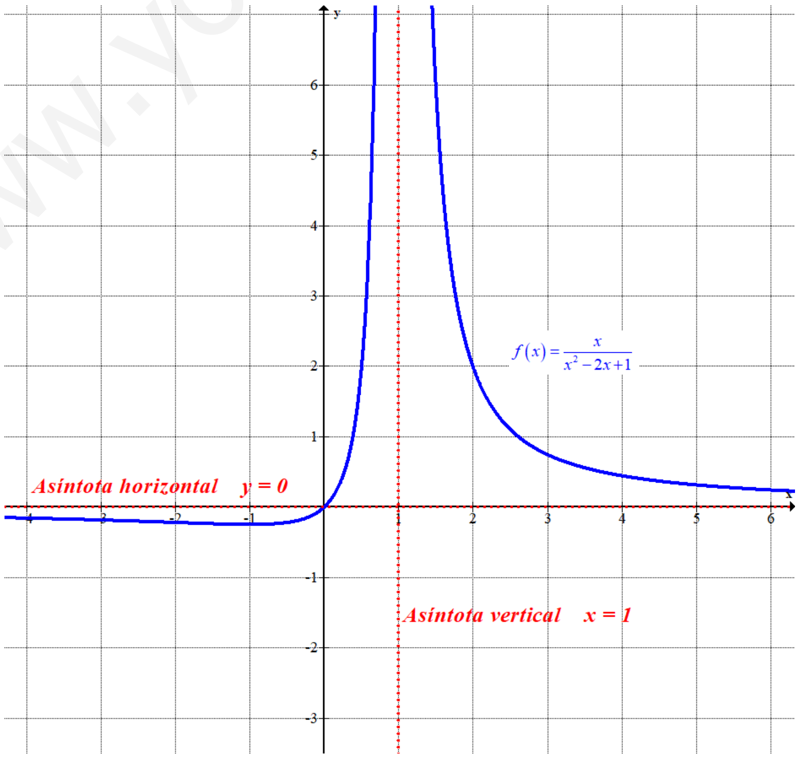
La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(-1,1)$.

c) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa *x* = 0 tiene ecuación $y-f(0)=f'(0)(x-0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}\Rightarrow f(0)=\dfrac{0}{0^2-2\cdot 0+1}=0 \\ f'(x)=\dfrac{-x^2+1}{\left(x^2-2x+1\right)^2}\Rightarrow f'(0)=\dfrac{-0^2+1}{\left(0^2-2\cdot 0+1\right)^2}=1 \\ y-f(0)=f'(0)(x-0) \end{array}\right\}\Rightarrow y-0=1(x-0)\Rightarrow \boxed{y=x}$$



Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x)=Ax^4+Bx^2+C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros *A*, *B* y *C*.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función *f* y razona si son máximos o mínimos.

a) Si la función tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ entonces la derivada se anula para este valor → $f'\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4Ax^3+2Bx \\ f'\left(\frac{1}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4A\left(\frac{1}{2}\right)^3+2B\frac{1}{2}=0 \Rightarrow \frac{A}{2}+B=0 \Rightarrow A+2B=0 \Rightarrow \boxed{A=-2B}$$

Si la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$ significa que recta tangente y la función coinciden en $x = 1$ y que la derivada de la función para $x = 1$ vale 6 (pendiente de la recta tangente).

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=Ax^4+Bx^2+C \\ \text{Tan}\,gente \rightarrow x=1 \rightarrow y=6-2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 4=A\cdot 1^4+B\cdot 1^2+C \Rightarrow \boxed{4=A+B+C}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4Ax^3+2Bx \\ f'(1)=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 4A\cdot 1^3+2B=6 \Rightarrow 4A+2B=6 \Rightarrow \boxed{2A+B=3}$$

Juntamos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A=-2B \\ 4=A+B+C \\ 2A+B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-2B+B+C \\ 2(-2B)+B=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4=-B+C \\ -4B+B=3 \rightarrow -3B=3 \rightarrow \boxed{B=-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4=1+C \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{C=3} \\ \boxed{A=-2(-1)=2} \end{array}\right.$$

Los valores buscados son A = 2, B = –1 y C = 3.

b) La función queda $f(x)=2x^4-x^2+3$. Buscamos el resto de puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=8x^3-2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 8x^3-2x=0 \Rightarrow 2x\left(4x^2-1\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ 4x^2-1=0 \to 4x^2=1 \to x^2=\dfrac{1}{4} \to \boxed{x=\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\pm\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en estos tres puntos críticos.

$$f''(x)=16x^2-2 \Rightarrow \begin{cases} f''(-1/2)=16(-1/2)^2-2=2>0 \to \textit{Mínimo} \\ f''(0)=16\cdot 0^2-2=-2<0 \to \textit{Máximo} \\ f''(1/2)=16(1/2)^2-2=2>0 \to \textit{Mínimo} \end{cases}$$

La función tiene dos mínimos relativos: en $x=\dfrac{-1}{2}$ y en $x=\dfrac{1}{2}$.

La función tiene un máximo relativo en $x = 0$.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4
Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx$ (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx$

a) Resolvemos la primera integral.

$$\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}dx = \ldots$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 \qquad -3x+2 & x^2+2x+1 \\ \hline -x^3-2x^2-x & x-2 \\ \hline -2x^2-4x+2 & \\ 2x^2+4x+2 & \\ \hline 4 & \end{array} \Rightarrow \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{4}{x^2+2x+1}$$

$$\ldots = \int x-2+\frac{4}{x^2+2x+1}dx = \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{x^2+2x+1}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+\int \frac{4}{(x+1)^2}dx = \frac{x^2}{2}-2x+4\int (x+1)^{-2}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}-2x+4\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{\frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x+1}+K}$$

b) Resolvemos la segunda integral

$$\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}dx = \ldots$$

Descomposición en fracciones simples

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow \frac{2-3x}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)}{(x+1)^2}+\frac{B}{(x+1)^2} \Rightarrow$$

$$2-3x = A(x+1)+B \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \rightarrow 2+3=B \rightarrow B=5 \\ x=0 \rightarrow 2=A+B \rightarrow 2=A+5 \rightarrow A=-3 \end{cases}$$

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{-3}{x+1}+\frac{5}{(x+1)^2}$$

$$\ldots = \int \frac{-3}{x+1} + \frac{5}{(x+1)^2} dx = \int \frac{-3}{x+1} dx + \int \frac{5}{(x+1)^2} dx = -3\int \frac{1}{x+1} dx + 5\int (x+1)^{-2} dx =$$

$$= -3\ln|x+1| + 5\frac{(x+1)^{-1}}{-1} = \boxed{-3\ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + K}$$

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y=x^2$ e $y=\frac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y=x$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.
(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

Averiguamos donde se cortan sus gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=x^2 \Rightarrow x^2=3x^2 \Rightarrow 2x^2=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} y=\frac{x^2}{3} \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{3}=x \Rightarrow x^2=3x \Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=3} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} y=x^2 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=x \Rightarrow x^2-x=0 \Rightarrow x(x-1)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=0} \\ \boxed{x=1} \end{array}\right.$$

Hacemos una tabla de valores y representamos las gráficas y el recinto limitado por ellas.

$y=x^2$

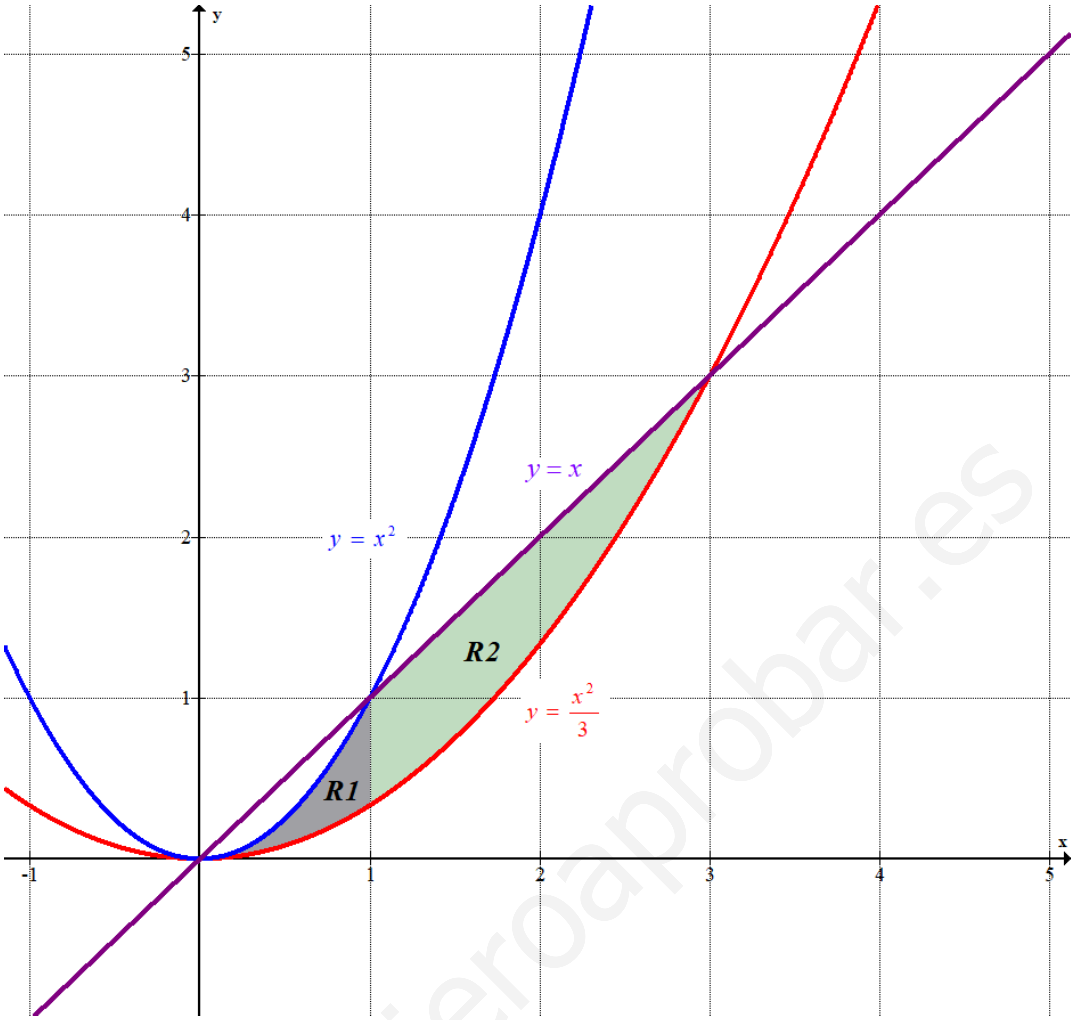
x	$y=x^2$
-1	1
0	0
1	1
2	4
3	9

$y=\frac{x^2}{3}$

x	$y=x^2/3$
-1	$1/3$
0	0
1	$1/3$
2	$4/3$
3	3

$y=x$

x	$y=x$
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3



El recinto limitado por las curvas lo dividimos en dos partes para hallar su área.
Hallamos el valor del área de R1.

$$Área\,1 = \int_0^1 x^2 - \frac{x^2}{3}\,dx = \int_0^1 \frac{2x^2}{3}\,dx = \frac{2}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left[\frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \boxed{\frac{2}{9}\,u^2}$$

Hallamos el valor del área de R2.

$$Área\,2 = \int_1^3 x - \frac{x^2}{3}\,dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 =$$

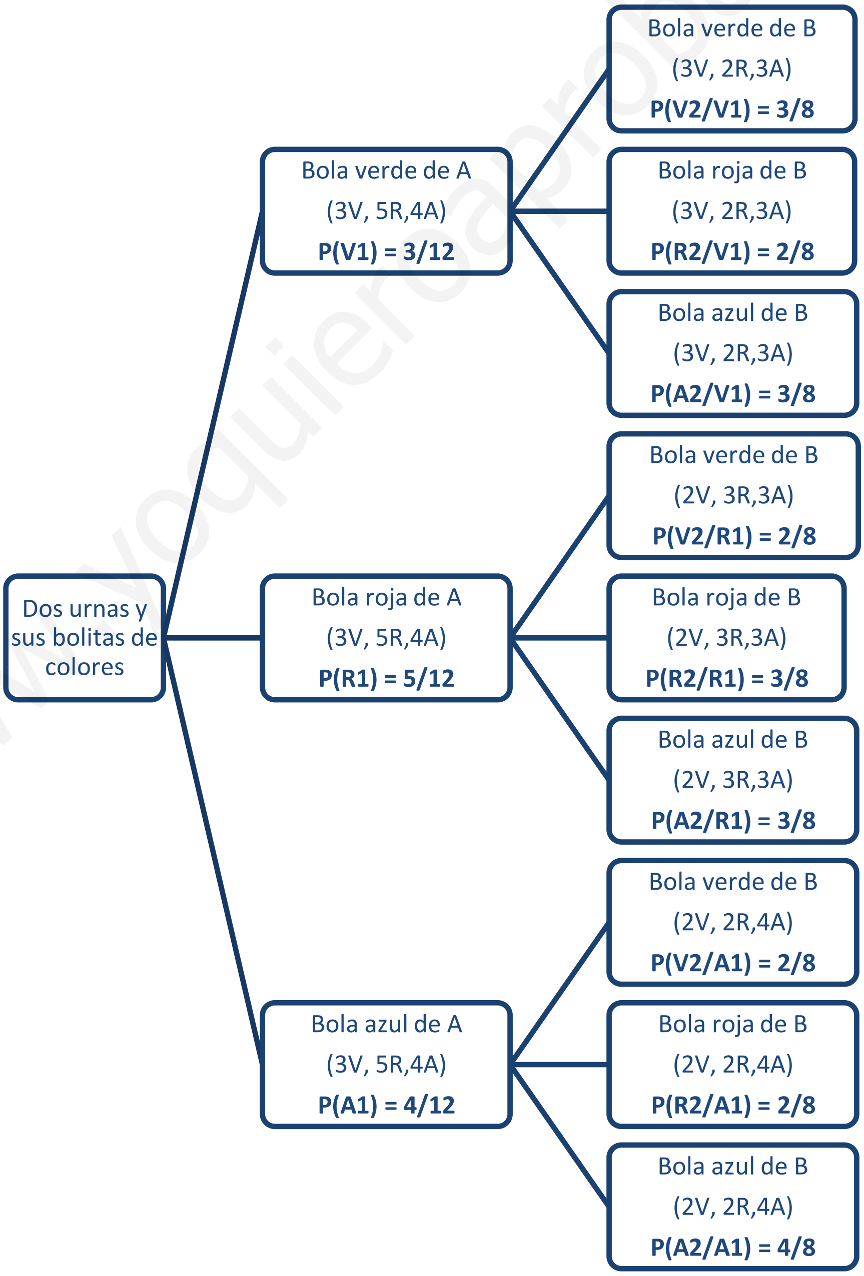
$$= \left[\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{9}\right] - \left[\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{9}\right] = \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{10}{9} \simeq 1.111\,u^2}$$

El área total es la suma de las áreas obtenidas → $\frac{2}{9} + \frac{10}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} \simeq 1.33u^2$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde sólo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5
Tenemos dos urnas con bolas de colores, La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.
(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.
(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.
(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.
(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

a) Llamamos A1 y A2 al suceso “sacar bola azul de la urna A o B respectivamente”, V2 y V2 al suceso “sacar bola verde de la urna A o B respectivamente” y R1 y R2 al suceso “sacar bola roja de la urna A o B respectivamente”.



a) Nos piden calcular $P(V2)$. Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V2)=P(V1)P(V2/V1)+P(R1)P(V2/R1)+P(A1)P(V2/A1)=$$

$$=\frac{3}{12}\cdot\frac{3}{8}+\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{8}+\frac{4}{12}\cdot\frac{2}{8}=\frac{27}{96}=\boxed{\frac{9}{32}=0.28125}$$

b) Nos piden calcular $P(V2/R1)$. Esta probabilidad aparece reflejada en el diagrama de árbol y vale $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}=0.25$.Como se ha pasado una bola roja de la urna A a la urna B tenemos 2 bolas verdes, 3 rojas y 3 azules, por lo que aplicando la regla de Laplace la probabilidad de sacar una bola verde (2 bolas verdes) de la urna B (un total de 8 bolas) vale 2/8.

c) Nos piden calcular $P(R1/V2)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(R1/V2)=\frac{P(R1\cap V2)}{P(V2)}=\frac{P(R1)P(V2/R1)}{P(V2)}=\frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{2}{8}}{\frac{9}{32}}=\boxed{\frac{10}{27}\simeq 0.37}$$

Ejercicio B5
Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.
(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.
(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

X = segundos que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar.
X = N(45, 7.3)

a) Nos piden calcular $P(X>57)$.

$$P(X>57)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{57-45}{7.3}\right)=P(Z>1.64)=1-P(Z\le 1.64)=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en}\\ \text{la tabla N(0,1)}\end{Bmatrix}=1-0.9495=\boxed{0.0505}$$

El porcentaje de adultos que aguantan debajo del agua sin respirar más de 57 segundos es de 5.05 %.

b) Nos piden calcular $P(39<X<57)$.

$$P(39<X<57)=\{Tipificamos\}=P\left(\frac{39-45}{7.3}<Z<\frac{57-45}{7.3}\right)=$$

$$=P(-0.82<Z<1.64)=P(Z<1.64)-P(Z<-0.82)=$$

$$=P(Z<1.64)-P(Z>0.82)=P(Z<1.64)-\left[1-P(Z<0.82)\right]=$$

$$=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en}\\ \text{la tabla N(0,1)}\end{Bmatrix}=0.9495-\left[1-0.7939\right]=\boxed{0.7434}$$

El porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos es del 74.34 %.

	0'00	0'01	0'02
0'0	0'5000	0'5040	0'5080
0'1	0'5398	0'5438	0'5478
0'2	0'5793	0'5832	0'5871
0'3	0'6179	0'6217	0'6255
0'4	0'6554	0'6591	0'6628
0'5	0'6915	0'6950	0'6985
0'6	0'7257	0'7291	0'7324
0'7	0'7580	0'7611	0'7642
0'8	0'7881	0'7910	0'7939
0'9	0'8159	0'8186	0'8212

	0'00	0'01	0'02	0'03	0'04
0'0	0'5000	0'5040	0'5080	0'5120	0'5160
0'1	0'5398	0'5438	0'5478	0'5517	0'5557
0'2	0'5793	0'5832	0'5871	0'5910	0'5948
0'3	0'6179	0'6217	0'6255	0'6293	0'6331
0'4	0'6554	0'6591	0'6628	0'6664	0'6700
0'5	0'6915	0'6950	0'6985	0'7019	0'7054
0'6	0'7257	0'7291	0'7324	0'7357	0'7389
0'7	0'7580	0'7611	0'7642	0'7673	0'7704
0'8	0'7881	0'7910	0'7939	0'7967	0'7995
0'9	0'8159	0'8186	0'8212	0'8238	0'8264
1'0	0'8413	0'8438	0'8461	0'8485	0'8508
1'1	0'8643	0'8665	0'8686	0'8708	0'8729
1'2	0'8849	0'8869	0'8888	0'8907	0'8925
1'3	0'9032	0'9049	0'9066	0'9082	0'9099
1'4	0'9192	0'9207	0'9222	0'9236	0'9251
1'5	0'9332	0'9345	0'9357	0'9370	0'9382
1'6	0'9452	0'9463	0'9474	0'9484	0'9495
1'7	0'9554	0'9564	0'9573	0'9582	0'9591