OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. En el plano *XY* está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, con $0 \le x \le 40$, siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.

Se pretende urbanizar un rectángulo *R* inscrito en la parcela *A*, de manera que los vértices de *R* sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la parcela *A*. *(3 puntos).*

b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. *(5 puntos).*

c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos).*

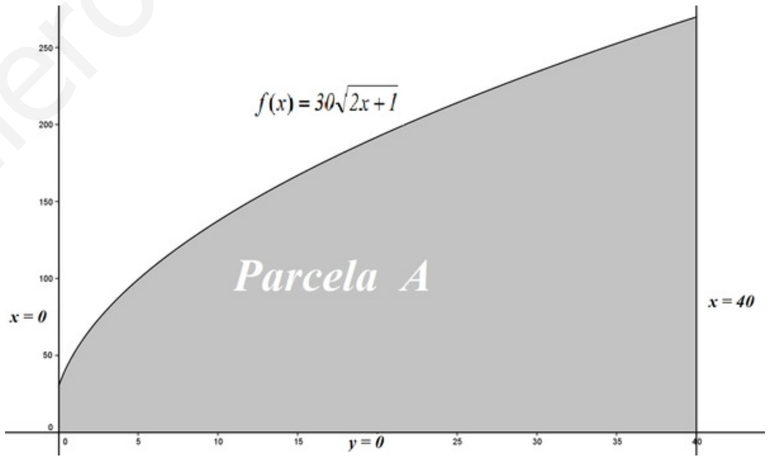
Solución:

Para representar la parcela A el dibujo de las rectas verticales $x = 0$ y $x = 40$ y de la recta horizontal $y = 0$ es sencillo. Efectuemos los cálculos necesarios para representar la función f(x),

$f(x) = 30\sqrt{2x+1}$

x	$f(x)$
0	$30\sqrt{2 \cdot 0+1} = 30\sqrt{1} = 30$
12	$30\sqrt{2 \cdot 12+1} = 30\sqrt{25} = 150$
40	$30\sqrt{2 \cdot 40+1} = 30\sqrt{81} = 270$

La representación gráfica de la parcela A será:



a) Obtendremos el área de la parcela A mediante el siguiente cálculo integral,

$$\text{Área}_A = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\, dx$$

Calculemos, previamente, la integral indefinida,

$$\int 30\sqrt{2x+1}\, dx = 30\int (2x+1)^{1/2} dx = 30\,\frac{1}{2}\int 2\,(2x+1)^{1/2} dx = 30\,\frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$$

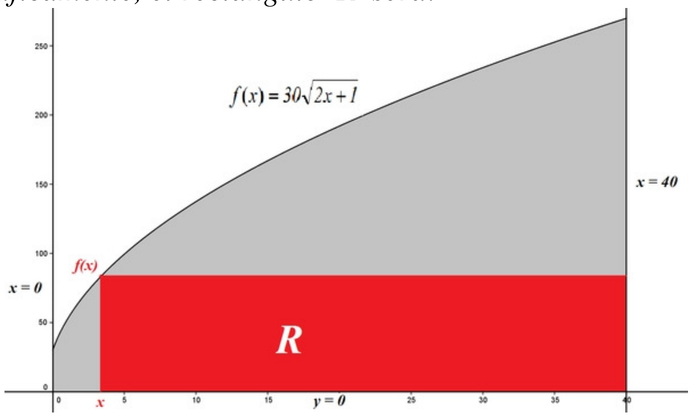
$$= 15\,\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 10(2x+1)^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{(2x+1)^3}$$

Por lo tanto $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx = \left[10\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^{40} = 10\sqrt{(2\,.\,40+1)^3} - 10\sqrt{(2\,.\,0+1)^3} =$

$= 10\sqrt{81^3} - 10\sqrt{1^3} = 10\,.\,81\sqrt{81} - 10 = 810\,.\,9 - 10 = 7280$

Finalmente, ***el área de la parcela A es de 7280 u²***.

b) Gráficamente, el rectángulo R será:



Es un rectángulo de base $(40 - x)$ *y altura* $f(x)$.

El área de este rectángulo será: $A_R(x) = f(x)\,(40-x) = 30\sqrt{2x+1}\,(40-x)$

Obtengamos el máximo de A_R

$$A_R'(x) = 30\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}(40-x) + 30\sqrt{2x+1}\,(-1) = \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$$

$$A_R'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1} = 0 \;\rightarrow\; 30(40-x) - 30(2x+1) = 0 \;\rightarrow\; 40 - x - 2x - 1 = 0$$

$$39 - 3x = 0 \;\rightarrow\; 39 = 3x \;\rightarrow\; x = 13$$

Para determinar si $x = 13$ *es máximo o mínimo estudiaremos el signo de* $A_R'(x)$ *a la izquierda y derecha de 13,*

$$x = 10 \rightarrow \quad A_R'(10) = \frac{30(40-10)}{\sqrt{2\,.\,10+1}} - 30\sqrt{2\,.\,10+1} = \frac{900}{\sqrt{21}} - 30\sqrt{21} = \frac{900 - 30\,.\,21}{\sqrt{21}} = \frac{270}{\sqrt{21}} > 0$$

$$x = 20 \rightarrow \quad A_R'(20) = \frac{30(40-20)}{\sqrt{2\,.\,20+1}} - 30\sqrt{2\,.\,20+1} = \frac{300}{\sqrt{41}} - 30\sqrt{41} = \frac{300 - 30\,.\,41}{\sqrt{41}} = \frac{-930}{\sqrt{41}} < 0$$

Como a la izquierda de 13 la derivada es positiva, la función A_R *es creciente; a la derecha de 13 la derivada es negativa, la función* A_R *es decreciente. Por lo tanto en* $x = 13$ *hay un máximo que, además, es máximo absoluto porque la función pasa de creciente a decreciente.*

Obtengamos los vértices del rectángulo R para $x = 13$.

Sólo necesitamos calcular el valor de $f(13) = 30\sqrt{2\,.\,13+1} = 30\sqrt{27} = 30\,.\,3\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

Finalmente, ***los vértices del rectángulo R de área máxima son:***

$\mathbf{(13, 0), (13, 90\sqrt{3}), (40, 90\sqrt{3})}$ ***y*** $\mathbf{(40, 0)}$

c) El valor del área máxima la obtenemos calculando $A_R(13)$.

$$A_R(13) = 30\sqrt{2\,.\,13+1}\,(40-13) = 30\sqrt{27}\;27 = 810\sqrt{27} = 810\,.\,3\sqrt{3} = 2430\sqrt{3}$$

El valor del área máxima es $\mathbf{2430\sqrt{3}\ u^2}$

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x) = x\,e^x - 3\,x$.
Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).
b) El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x > 2$. (2 *puntos*).
c) El área limitada por el eje X y la curva $y = f(x)$, cuando $0 \le x \le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

Solución:
a) $y = f(x) = x\,e^x - 3\,x$, *¿corte con eje X?*

$$y = 0 \;\rightarrow\; x\,e^x - 3\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(e^x - 3) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ e^x - 3 = 0 \;\rightarrow\; e^x = 3 \;\rightarrow\; x = Ln\,3 \end{cases}$$

Finalmente, ***los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X son $(0, 0)$ y $(Ln\,3, 0)$.***

b) Para estudiar el crecimiento de $y = f(x)$ tenemos que estudiar y', y para obtener sus puntos de inflexión y''. Calculemos y' e y''.

$y = x\,e^x - 3\,x$

En primer lugar, Dom $y = \Re$

$y' = e^x + x\,e^x - 3$

$y'' = e^x + e^x + x\,e^x = 2\,e^x + x\,e^x = (2 + x)\,e^x$

Obtengamos el punto de inflexión de la curva.
Resolvemos $y'' = 0$

$$(2 + x)\,e^x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 2 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -2 \\ e^x = 0 \quad \text{sin solución} \end{cases}$$

Podemos determinar si para $x = -2$ hay un punto de inflexión de dos formas:

1^a	*Calculamos* $y''' = 2\,e^x + e^x + x\,e^x = 3\,e^x + x\,e^x = (3 + x)\,e^x$ $y'''_{x=-2} = (3-2)e^{-2} = e^{-2} \neq 0 \;\rightarrow\;$ *En $x = -2$ hay un punto de inflexión.*
2^a	*Estudiamos el signo de y''* *En y'' hay dos factores, uno de ellos e^x es siempre positivo, luego el signo de y'' depende del signo del segundo factor, $2 + x$, que es un polinomio de 1[er] grado con coeficiente de x positivo y raíz $x = -2$.* *Por tanto, a la izquierda de -2 y'' es negativa y a la derecha positiva, luego en $x = -2$ hay un punto de inflexión.*

Calculemos el punto de inflexión.

$$x = -2 \;\rightarrow\; y = -2\,e^{-2} - 3(-2) = -2\,e^{-2} + 6 = 6 - \frac{2}{e^2}$$

El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$ es $\left(-2\,,\,6 - \dfrac{2}{e^2}\right)$

Veamos que f es creciente cuando $x > 2$.
Como $f'(x) = e^x + x\,e^x - 3 = e^x\,(x + 1) - 3$,

$$Si\;\; x > 2 \;\begin{cases} x + 1 > 3 \\ e^x > 1 \end{cases} \;\rightarrow\; e^x(x+1) > 3 \;\rightarrow\; e^x(x+1) - 3 > 0$$

Es decir, si $x > 2$ entonces $f'(x) > 0$ y por tanto $f(x)$ es creciente.

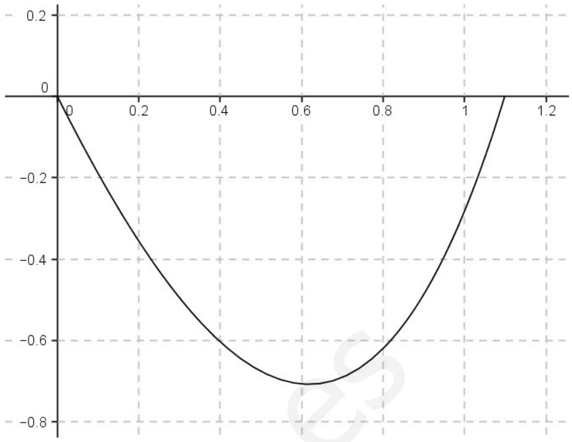
c) *Es conveniente representar, de forma aproximada,* $y = f(x)$ *cuando* $0 \le x \le Ln\,3$ ($Ln\,3 \cong 1{,}098$)

$y = f(x) = x\,e^x - 3\,x$

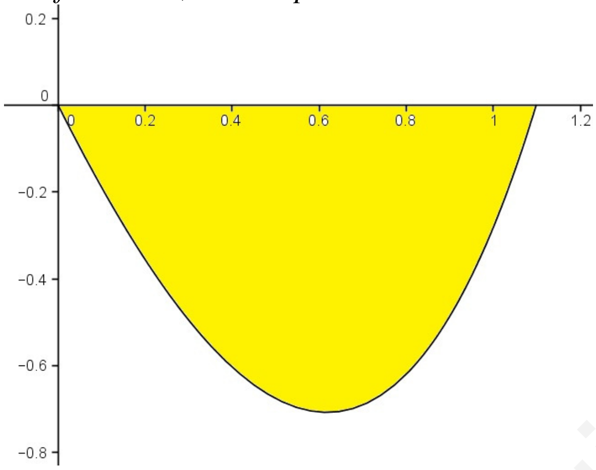
Del apartado a) sabemos que la curva corta al eje X en $(0\,,\,0)$ *y* $(Ln\,3\,,\,0)$. *Calculemos un punto de la curva para un valor de* x *entre* 0 *y* $Ln\,3$, *por ejemplo,* $x = 1$

$x = 1 \;\rightarrow\; y = 1\,.\,e^1 - 3\,.\,1 = e - 3 = -0{,}281\ldots$

A partir de estos datos la representación gráfica de f(x) será,



Gráficamente, el área pedida es:



El área pedida se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$A = -\int_0^{Ln\,3} \left(x\,e^x - 3x\right) dx$$

En primer lugar calculamos la integral indefinida:,

$$\int \left(x\,e^x - 3x\right) dx = \int x\,e^x\,dx - \int 3x\,dx \overset{*}{=}$$

La primera integral es más complicada, calculémosla previamente.

$$\int x\,e^x\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^x\,dx & \rightarrow & v = e^x \end{matrix}\right\} = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x$$

La segunda integral es más sencilla: $\int 3x\,dx = 3\dfrac{x^2}{2}$

Luego, $\overset{*}{=} x\,e^x - e^x - 3\dfrac{x^2}{2}$

Por tanto, $$A = -\left[x\,e^x - e^x - 3\frac{x^2}{2}\right]_0^{Ln\,3} = -\left[\left((Ln\,3)\,e^{Ln\,3} - e^{Ln\,3} - 3\frac{(Ln\,3)^2}{2}\right) - \left(0\,e^0 - e^0 - 3\frac{0^2}{2}\right)\right] =$$

$$= -\left[\left((Ln\,3)\;3 - 3 - 3\frac{(Ln\,3)^2}{2}\right) - (-1)\right] = -\left[3Ln\,3 - 3 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 + 1\right] = -\left[3Ln\,3 - 2 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2\right] =$$

$$= 2 + \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3 = 0{,}5145865\ldots \cong 0{,}51459$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(2 + \dfrac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3\right) u.a. \cong 0{,}51459\ u.a.$

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función f. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(4 puntos)*

c) La integral $\displaystyle\int \frac{x}{(x+1)^2}dx.$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas de f.

Dominio,

$$(x+1)^2=0 \quad \rightarrow \quad x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

Luego, Dom f(x) = $\Re-\{-1\}$.

Asíntotas,

Asíntotas verticales:

Posible $x=-1$,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{(x+1)^2}=\frac{-1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad es \quad a.v.$$

Asíntota horizontal

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como el denominador es un polinomio de 2º grado y el numerador de 1}^{er}\text{ grado}\}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{(x+1)^2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\{\text{como en el límite anterior}\}=0$$

La asíntota horizontal es: $y=0$.

Por ser la función f un cociente de funciones polinómicas con el denominador de mayor grado que el numerador, no tiene asíntota oblicua.

Solución: Dom f(x) = $\Re-\{-1\}$***, asíntota vertical:*** $x=-1$ ***y asíntota horizontal:*** $y=0$***.***

b) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de f´(x).

$$f(x)=\frac{x}{(x+1)^2}$$

Dom f(x) = $\Re-\{-1\}$

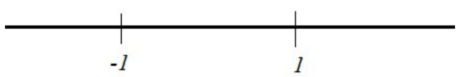
$$f'(x)=\frac{1.(x+1)^2-x.2.(x+1)}{\left((x+1)^2\right)^2}=\frac{x^2+2x+1-2x^2-2x}{(x+1)^4}=\frac{-x^2+1}{(x+1)^4}$$

Calculamos las raíces del numerador y denominador:

$-x^2+1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm 1$

$(x+1)^4=0;\quad x+1=0;\quad x=-1$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos:



En f´(x) el denominador está elevado a la cuarta, será positivo; luego el signo de f´(x) depende del numerador que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *negativo y raíces* -1 *y 1. Por tanto, el signo de f´(x) será:*

$-$		$+$		$-$
	-1		1	

Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(-1, 1)$ ***y decreciente en*** $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

c) Cálculo de $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

Es una integral racional, descomponemos el integrando:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2} == \frac{Ax+A+B}{(x+1)^2}$$

Por tanto, comparando los polinomios de los numeradores inicial y final, debe ser:

$$\begin{cases} A = 1 \\ A+B = 0 \end{cases} \rightarrow \quad A = 1 \quad y \quad B = -1$$

$$\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+1}\,dx + \int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx =$$

Calculemos cada integral por separado:

$$\int \frac{1}{x+1}\,dx = Ln\,|x+1|$$

$$\int \frac{-1}{(x+1)^2}\,dx = \int -(x+1)^{-2}\,dx = \begin{Bmatrix} t = x+1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int -t^{-2}\,dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{t^{-1}}{-1} = \frac{1}{t} = \frac{1}{x+1}$$

Luego: $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx = Ln\,|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. *(1 + 2 puntos)*

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. *(3 puntos)*

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. *(2 puntos)*

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \;\rightarrow\; y = f(0) = 0^3 - a\,.\,0 = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$$

$$y = 0 \;\rightarrow\; x^3 - a\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(x^2 - a) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \;\rightarrow\; x^2 = a \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\left(como \quad a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{a}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(0, 0)$, $\left(\sqrt{a}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$.

Monotonía.

$y = x^3 - a\,x, \quad a > 0$

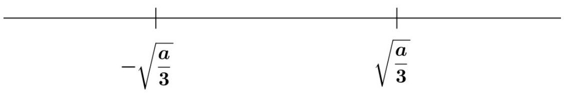
$y' = 3\,x^2 - a$

$3\,x^2 - a = 0$

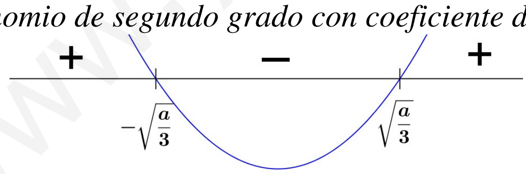
$3\,x^2 = a$

$$x^2 = \frac{a}{3} \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad como\ a > 0 \;\rightarrow\; \exists\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:



y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, ***la función f es creciente en*** $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.

b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9\,x$

Dom $y = \Re$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

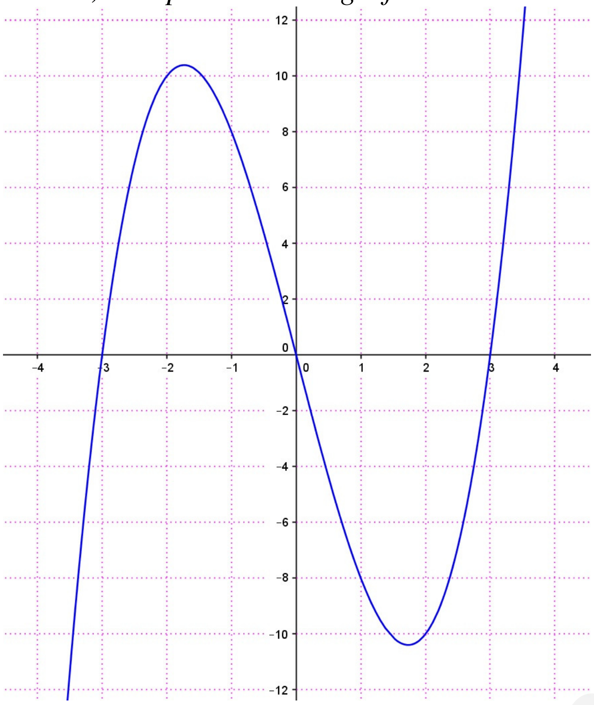
Monotonía: creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; y = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}\right)\approx(-1'73\,,10'39)$ *hay un máximo relativo y en* $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}\right)\approx(1'73\,,-10'39)$ *hay un mínimo relativo.*

Con esta información, la representación gráfica será:



c) *Área entre* $y = x^3$, $y = a\,x$ $(\ a > 1\ )$, *en* 1^{er} *cuadrante.*

Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:

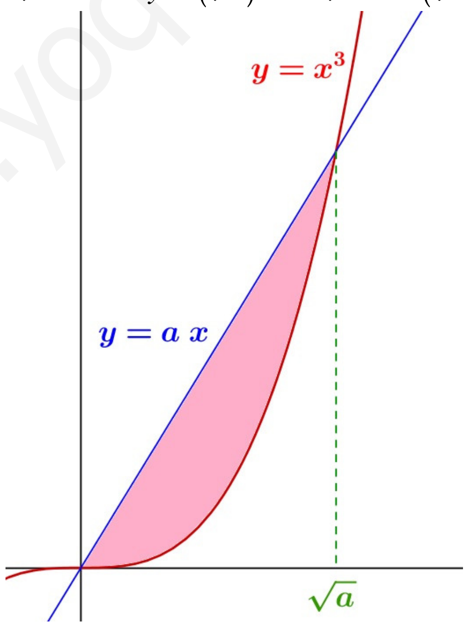
$x^3 = a\,x$, *resuelta en el apartado a) "*$x^3 - a\,x = 0$*", las soluciones:* $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$

Como el área a calcular es en el 1^{er} *cuadrante, las soluciones que nos interesan son* $x = 0$ *y* $x = \sqrt{a}$.

Los puntos de corte serán: $x = 0 \ \rightarrow\ y = 0^3 = 0 \ \rightarrow\ (\ 0\,,0\ )$

$$x=\sqrt{a} \ \rightarrow\ y=\left(\sqrt{a}\right)^3 = a\sqrt{a} \ \rightarrow \left(\sqrt{a}\,,a\sqrt{a}\right)$$

La representación gráfica es:



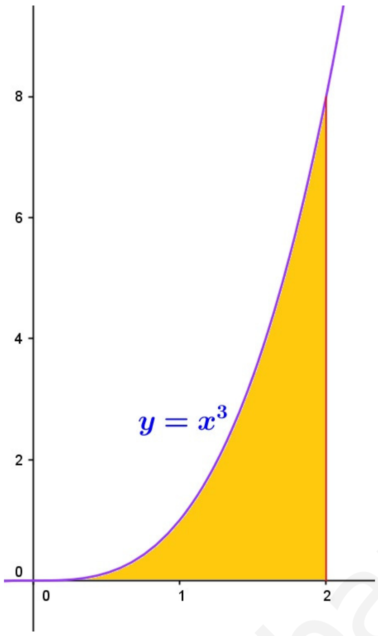
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}}\left(a\,x-x^3\right)dx=\left[a\,\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}}=\left(a\,\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right)-0=a\,\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

Finalmente, ***el área de la región pedida es*** $\dfrac{a^2}{4}$ *u.a.*

d) Área entre $y = x^3$, eje OX, $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3\ dx == \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\frac{a^2}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad (\text{como } a > 0) \quad a = 4$

Finalmente, ***el valor del parámetro a buscado es a = 4.***

PROBLEMA A.3. Consideramos la función $f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x\cos(\pi x)$, que depende de los parámetros a, b, c. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La relación entre los coeficientes a, b, c sabiendo que $f(x)$ toma el valor 22 cuando $x = 1$. *(2 puntos)*

b) La relación que deben verificar los coeficientes a, b y c para que sea horizontal la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P de dicha curva, sabiendo que la abscisa del punto P es $x = 1$. *(4 puntos)*

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$ *(4 puntos)*

Solución:

a) Para $x = 1$, $f(1) = 22$.

$22 = a\,.\,1^3 + b\,.\,1^2 + c\,.\,1\,.\cos(\pi\,.\,1)$

$22 = a + b + c\,.\,(-1)$

$22 = a + b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $a + b - c = 22$.

b) P es el punto de $y = f(x)$ cuando $x = 1$; según el apartado anterior $P(1, 22)$.

Para que la tangente a $y = f(x)$ en P sea horizontal, debe ser $y'_{x=1} = 0$

$y' = 3a\,x^2 + 2b\,x + c\cos(\pi x) + c\,x\,(-sen(\pi x))\,\pi = 3a\,x^2 + 2b\,x + c\cos(\pi x) - \pi c\,x\,sen(\pi x)$

$y'_{x=1} = 3a\,1^2 + 2b\,1 + c\cos(\pi\,1) - \pi\,c\,1\,sen(\pi\,1) = 3a + 2b - c$

Solución: la relación entre los coeficientes es $3a + 2b - c = 0$.

c) $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx$. *Calculemos* $\int x\cos(\pi x)\,dx$, *la resolvemos por partes,*

$$\int x\cos(\pi x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} u = x \quad\to\quad du = dx \\ dv = \cos(\pi x)\,dx \quad\to\quad v = \int\cos(\pi x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,sen(\pi x)\end{array}\right\} =$$

$$= x\,\frac{1}{\pi}\,sen(\pi x) - \int\frac{1}{\pi}\,sen(\pi x)\,dx = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int sen(\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi x)\right)\right] = \frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}$$

Finalmente,

$$\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = \left[\frac{x\,sen(\pi x)}{\pi} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi^2}\right]_0^1 = \left(\frac{1\,.\,sen(\pi\,.\,1)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,1)}{\pi^2}\right) -$$

$$-\left(\frac{0\,.\,sen(\pi\,.\,0)}{\pi} + \frac{\cos(\pi\,.\,0)}{\pi^2}\right) = \left(\frac{1\,.\,0}{\pi} + \frac{-1}{\pi^2}\right) - \left(0 + \frac{1}{\pi^2}\right) == \frac{-1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$$

Solución: $\int_0^1 x\cos(\pi x)\,dx = -\frac{2}{\pi^2} \approx -0'2026$

PROBLEMA B.3. un proyectil está unido al punto (0, 2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La función de la variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto (0, 2). *(2 puntos)*

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0, 2) para $-2 \le x \le 2$. *(2 puntos)*

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \le x \le 2$. *(4 puntos)*

Solución:

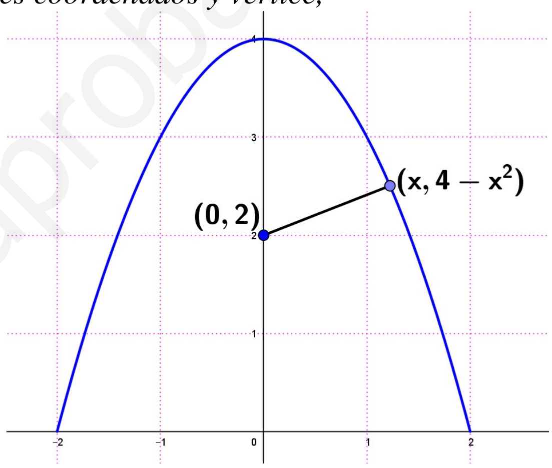
La representación gráfica del problema es:

$y = 4 - x^2$ *es una parábola, calculemos puntos de corte con ejes coordenados y vértice,*

$x = 0, \quad y = 4 \quad (0, 4)$

$$y=0, \quad 4-x^2=0, \quad 4=x^2, \quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad \begin{cases}(-2,0)\\(2,0)\end{cases}$$

$$\text{Vértice} \quad x=\frac{-b}{2a}=\frac{0}{2(-1)}=0 \qquad (0,4)$$



a) $d\left((0,2),\left(x,4-x^2\right)\right)=\sqrt{(x-0)^2+\left(4-x^2-2\right)^2}=\sqrt{x^2+\left(2-x^2\right)^2}=\sqrt{x^2+4-4x^2+x^4}=\sqrt{x^4-3x^2+4}$

La función pedida es $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4} \qquad -2\le x\le 2$

b) *Debemos buscar el máximo absoluto de la función anterior.*

$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4} \qquad -2\le x\le 2$

Teniendo en cuenta que en el cálculo inicial de f(x) el radicando es la suma de dos términos al cuadrado, este radicando es siempre positivo.

Para encontrar el máximo absoluto de f(x) necesitamos obtener sus extremos relativos.

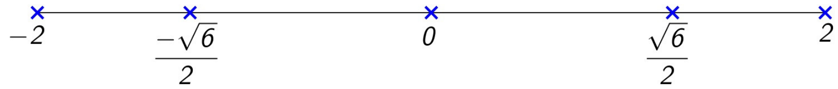
Considerando que si $h(x)=\sqrt{g(x)}$ *siendo* $g(x)>0$ *entonces como* $h'(x)=\dfrac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$, *entonces el signo de* $h'(x)$ *coincide con el signo de* $g'(x)$. *Es decir, para calcular los extremos relativos de* $h(x)$ *basta con obtener los de* $g(x)$

Luego, los extremos relativos de $f(x)$ *son lo de* $y = x^4 - 3x^2 + 4$. *Calculémoslos,*

$y=x^4-3x^2+4, \qquad y'=4x^3-6x$

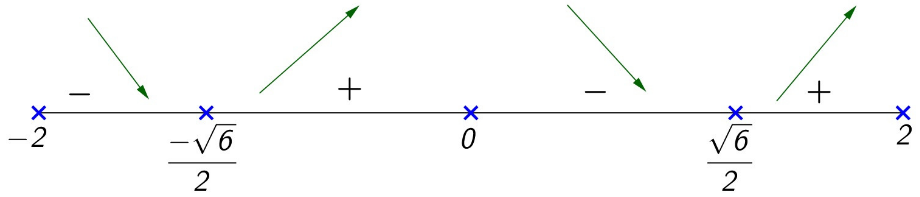
$$4x^3-6x=0, \quad x\left(4x^2-6\right)=0 \begin{cases} x=0 \\ 4x^2-6=0, \quad 4x^2=6, \quad x^2=\dfrac{6}{4}, \quad x=\pm\sqrt{\dfrac{6}{4}}=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}\cong\pm 1'2247\end{cases}$$

Estudiemos el signo de y' *en los siguientes intervalos*



x	$y' = 4x^3 - 6x$	
$-1'5$	$4\,(-1'5)^3 - 6\,(-1'5) = -4'5$	$-$
-1	$4\,(-1)^3 - 6\,(-1) = 2$	$+$
1	$4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1 = -2$	$-$
$1'5$	$4 \cdot 1'5^3 - 6 \cdot 1'5 = 4'5$	$+$

Luego,



El máximo relativo de y está en x = 0, por tanto el máximo relativo de f(x) está en x =0. Pero como f(x) está definida en un intervalo debemos obtener el valor de f(x) en los extremos para determinar el máximo absoluto,

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
-2	$\sqrt{(-2)^4 - 3(-2)^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$
0	$\sqrt{0^4 - 3 \cdot 0^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$
2	$\sqrt{2^4 - 3 \cdot 2^2 + 4} = \sqrt{8} = 2'8284$

El máximo absoluto de f(x) se alcanza en x = – 2 y x = 2.

Por lo que, ***los puntos de la curva a mayor distancia absoluta del punto (0 , 2) son los puntos (– 2 , 0) y (2 , 0)*** *{para los valores de x obtenidos, los puntos los calculamos en el apartado a)}.*

c) Obtengamos el mínimo absoluto de f(x).

De lo estudiado en el apartado anterior sabemos que los mínimos relativos están en $x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2}$*. Como a la izquierda de ellos la función es decreciente y a la derecha creciente, el mínimo absoluto será alguno de ellos. Calculemos f(x) para estos valores de x,*

x	$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^4 - 3\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + 4} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

El mínimo absoluto se alcanza en los dos valores.

Calculemos los puntos de la curva correspondientes,

x	$y = 4 - x^2$
$\frac{-\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	$4 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$

*Finalmente, **los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0, 2)$ son** $\left(\dfrac{-\sqrt{6}}{2}, \dfrac{5}{2} \right)$ y $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}, \dfrac{5}{2} \right)$.*

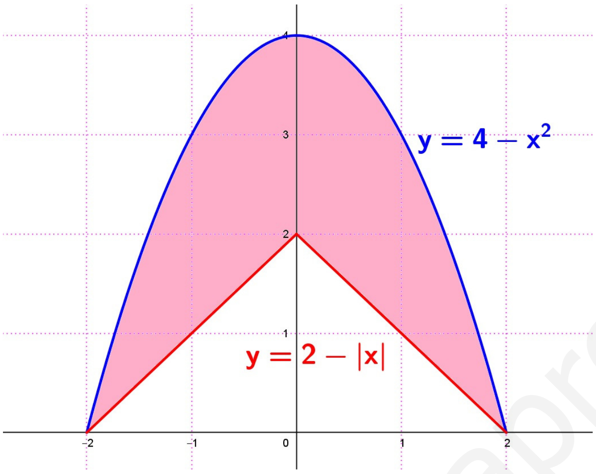
d) Representemos la superficie de la que debemos calcular su área. {sabemos que $-2 \leq x \leq 2$}
$y = 4 - x^2$ la representamos en el apartado a)

$$y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 - x, & x > 0 \\ 2 + x, & x \leq 0 \end{cases}$$

x	$2-x$
0	2
2	0

x	$2+x$
0	2
-2	0

La representación es,



Esta figura es simétrica respecto del eje OY ya que,

1) $\begin{array}{l} g(x) = 4 - x^2 \\ g(-x) = 4 - (-x)^2 = 4 - x^2 \end{array} \quad \rightarrow \quad g(x) = g(-x)$

2) $\begin{array}{l} h(x) = 2 - |x| \\ h(-x) = 2 - |-x| = 2 - |x| \end{array} \quad \rightarrow \quad h(x) = h(-x)$

Calculamos:

$$\int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx = \int_0^2 \left(4 - x^2 - 2 + x \right) dx = \int_0^2 \left(2 - x^2 + x \right) dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 =$$

$$= \left[2 \cdot 2 - \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} \right] - \left[2 \cdot 0 - \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} \right] = \frac{10}{3}$$

Y $A_S = 2 \cdot \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3}$ *u.a.*

El área de la superficie pedida es $\dfrac{20}{3}$ u.a.

* * *

En caso de no observar la simetría de la figura, el cálculo sería,

$A_1 = \int_{-0}^{0} \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx$ y $A_2 = \int_0^2 \left(\left(4 - x^2\right) - (2 - x) \right) dx$

Y $A_S = A_1 + A_2$.

PROBLEMA 3. Se da la función real f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) La integral $\int f(x)\,dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2 , 0). *(3+1 puntos)*

c) El área de la región limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y* = 0, *x* = 2, *x* = 4. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$

Dom f(x),

$$x^2\,(x-1)=0 \left\langle \begin{array}{l} x^2=0 \to x=0 \\ x-1=0 \to x=1 \end{array} \right. \quad \to \quad Dom\ f(x) = \Re - \{0,1\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)} = \frac{1}{0} = \infty \quad \to \quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)} = \frac{2}{0} = \infty \quad \to \quad x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+1}{x^3-x^2} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0 \end{array}\right\} \to \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x) = \Re - \{0,1\}$, ***las asíntotas verticales son x = 0 y x = 1 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2}{x^2\,(x-1)} \quad \to \quad x^2+1 = A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2$$

$$x=0 \to 0^2+1 = A\cdot 0\,(0-1)+B\,(0-1)+C\cdot 0^2 \quad \to \quad 1=-B \quad \to \quad B=-1$$

$$x=1 \to 2=C \quad \to \quad C=2$$

$$x=2 \to 2^2+1 = A\cdot 2\,(2-1)+B\,(2-1)+C\cdot 2^2 \quad \to \quad 5=2A+B+4C \quad \to \quad 5=2A-1+4\cdot 2$$

$$5=2A+7; \quad -2=2A; \quad A=-1$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\right)dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = (*)$$

$$\int \frac{-1}{x^2}\,dx = \int -x^{-2}dx = -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(*) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

$$Luego\ ,\ \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

La primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) será,

Para $x = 2,\ \ -Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1| + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\,Ln\,1 + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\cdot 0 + C = 0$

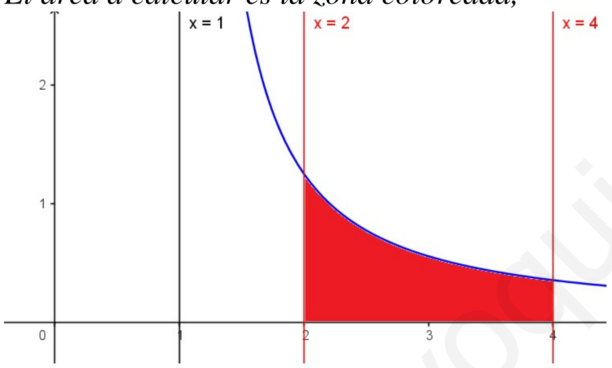
$$-Ln\,2 + \frac{1}{2} + C = 0;\quad C = -\frac{1}{2} + Ln\,2$$

Finalmente, ***la primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) es*** $F(x) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1| - \frac{1}{2} + Ln\,2$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 2$, $x = 4$.

El área a calcular la dibujamos considerando las asíntotas de la función obtenidas en el apartado a) y que para $x \geq 2$, tanto el numerado como el denominador de $f(x)$ son positivos, $f(x)$ es positiva.

El área a calcular es la zona coloreada,



Esta área la calculamos mediante la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[-Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1|\right]_2^4 = \left(-Ln|4| + \frac{1}{4} + 2Ln|4-1|\right) - \left(-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1|\right) =$$

$$= -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2Ln\,1 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2\cdot 0 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 2Ln\,3 + Ln\,2 - Ln\,4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = Ln\,3^2 + Ln\,2 - Ln\,4 - \frac{1}{4} = Ln\frac{9\cdot 2}{4} - \frac{1}{4} = Ln\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \cong 1'25407739\ u.a.$$

El área de la región pedida es 1´25407739 u.a.

PROBLEMA 3. Se considera la función $f(x) = x\, e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. *(4 puntos)*

b) Las asíntotas y la gráfica de *f*. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\, dx$. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x) = x\, e^{1-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$.

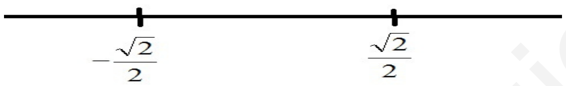
Monotonía.

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x\, e^{1-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

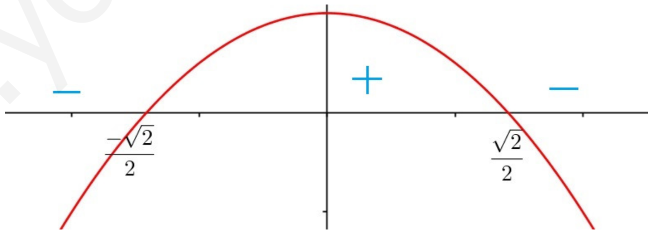
Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 \quad \text{sin } \textit{solución} \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:



En f´(x) el factor e^{1-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2e}}{2} \;\rightarrow\; \textit{Máximo relativo } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right) \cong (0'7071, 1'1658)$$

$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \;\rightarrow\; f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{\frac{1}{2}} = \frac{-\sqrt{2e}}{2} \;\rightarrow\; \textit{Mínimo relativo } \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2e}}{2}\right) \cong (-0'7071, -1'1658)$$

b) Asíntotas y gráfica de y = f(x)

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(\text{aplicando L´Hopital})=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Asíntota oblícua.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

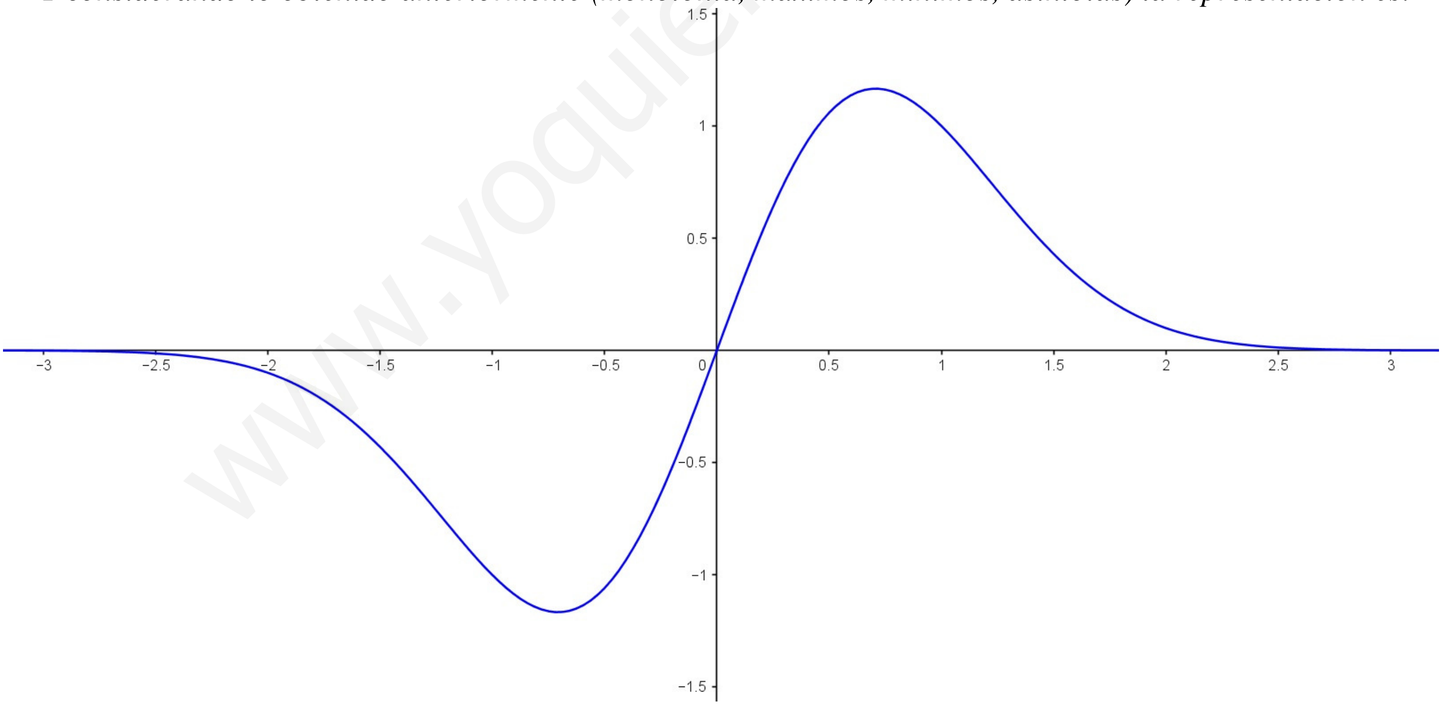
Por lo que no tiene ***asíntota oblícua.***

Representación gráfica.

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\rightarrow\quad y=0\cdot e^{1-0^2}=0 \\ y=0 \quad\rightarrow\quad x\cdot e^{1-x^2}=0 \quad\rightarrow \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ e^{1-x^2}=0 \quad \text{sin solución}\end{array}\right. \end{array}\right\} \quad pto.\,corte \quad (0,0)$$

Y considerando lo obtenido anteriormente (monotonía, máximos, mínimos, asíntotas) la representación es:



c)

$$\int f(x)\,dx=\int x\,e^{1-x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}t=1-x^2\\ dt=-2x\,dx\rightarrow \dfrac{dt}{-2}=x\,dx\end{array}\right\}=\int e^t\,\frac{dt}{-2}=\frac{-1}{2}\int e^t dt=$$

$$=\frac{-1}{2}\,e^t+C=\frac{-1}{2}\,e^{1-x^2}+C$$

Luego $\int f(x)\,dx=\dfrac{-1}{2}\,e^{1-x^2}+C$

Problema 5.

a) Calcular indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: *(5 puntos)*

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx.$$

b) Determinar, en función de *t*, el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx.$ *(2 puntos)*

c) Determinar el valor de *t* mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx$ *sea igual a* $\ln\frac{25}{4}.$

(2 puntos)

Solución:

a) Para calcular la integral definida dada, obtengamos las raíces del denominador del integrando:

$$x^2-5x-14=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.(-14)}}{2.1}=\frac{5\pm 9}{2}=\begin{cases} x_1=\frac{5+9}{2}=7 \\ x_2=\frac{5-9}{2}=-2 \end{cases}$$

Descomponemos el integrando de la siguiente forma:

$$\frac{18}{x^2-5x-14}=\frac{18}{(x-7)\,(x+2)}=\frac{A}{x-7}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-7)}{(x-7)\,(x+2)} \quad \rightarrow \quad 18=A(x+2)+B(x-7)$$

$$Para \quad x=-2 \quad \rightarrow \quad 18=A(-2+2)+B(-2-7); \quad 18=-9B; \quad B=-2$$

$$Para \quad x=7 \quad \rightarrow \quad 18=A(7+2)+B(7-7); \quad 18=9A; \quad A=2$$

Por lo que :

$$\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-7}-\frac{2}{x+2}\right)dx=\int\frac{2}{x-7}\,dx-\int\frac{2}{x+2}\,dx=2\,Ln|x-7|-2\,Ln|x+2|+C$$

Solución: $\int \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx=2\,Ln|x-7|-2\,Ln|x+2|+C$

b) $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx.$

Hemos calculado la integral indefinida en el apartado anterior, por lo tanto:

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx=\left[2\,Ln|x-7|-2\,Ln|x+2|\right]_8^t=\left(2\,Ln|t-7|-2\,Ln|t+2|\right)-\left(2\,Ln|8-7|-2\,Ln|8+2|\right)=$$

$$=2\,Ln|t-7|-2\,Ln|t+2|-2\,Ln|1|+2\,Ln|10|=2\,Ln|t-7|-2\,Ln|t+2|+2\,Ln\,10$$

Solución: $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx=2\,Ln|t-7|-2\,Ln|t+2|+2\,Ln\,10$

c) ¿t? / t > 8 y $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14}\,dx=Ln\frac{25}{4}$

A partir del resultado obtenido en el apartado anterior, la ecuación a resolver es:

$2\,Ln|t-7|-2\,Ln|t+2|+2\,Ln\,10=Ln\,\frac{25}{4},$ *aplicando propiedades de los logaritmos:*

$$Ln\,(t-7)^2 - Ln\,(t+2)^2 + Ln\,10^2 = Ln\,\frac{25}{4}$$

$$Ln\,\frac{(t-7)^2}{(t+2)^2} + Ln\,100 = Ln\,\frac{25}{4}$$

$$Ln\,\frac{(t-7)^2\cdot 100}{(t+2)^2} = Ln\,\frac{25}{4} \quad\rightarrow\quad \frac{(t-7)^2\cdot 100}{(t+2)^2} = \frac{25}{4} \quad\rightarrow\quad 400\,(t-7)^2 = 25\,(t+2)^2$$

$$16\,(t-7)^2 = (t+2)^2;\quad 16\,(t^2-14t+49) = t^2+4t+4;\quad 16t^2-224t+784 = t^2+4t+4$$

$$15t^2-228t+780=0 \quad\rightarrow\quad t=\frac{-(-228)\pm\sqrt{(-228)^2-4.15.720}}{2.15}=\frac{228\pm 72}{30}=\left\langle \begin{array}{l} t_1=\dfrac{228+72}{30}=10>8 \\ t_2=\dfrac{228-72}{30}=\dfrac{26}{5}=5'2<8 \end{array}\right.$$

Por tanto, ***solución t = 10***.

Problema 5. Consideramos la función $f(x)=\dfrac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x=-\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. *(2 puntos)*

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(4 puntos)*

c) Obtener $\int f(x)\,dx.$ *(4 puntos)*

Solución:

a)

$$x=-\frac{1}{2} \quad \textit{es discontinuidad evitable de f(x) si} \quad \begin{cases} a)\ \textit{No existe} \quad f\left(\dfrac{-1}{2}\right) \quad y \\ b)\ \textit{Existe} \quad \lim\limits_{x\to -1/2} f(x) \end{cases}$$

$$a)\ f\left(-1/2\right)=\frac{-2\left(-1/2\right)^2+\left(-1/2\right)+1}{2\left(-1/2\right)^2+5\left(-1/2\right)+2}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2}=\frac{0}{0} \rightarrow \textit{No existe } f\left(-1/2\right)$$

El cálculo realizado anteriormente indica que $\dfrac{-1}{2}$ *es raíz del numerador y denominador, por lo que podremos simplificar la expresión de f(x).*

$$-2x^2+x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-2)\cdot 1}}{2\cdot(-2)}=\frac{-1\pm 3}{-4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-1+3}{-4}=\dfrac{-1}{2} \\ x_2=\dfrac{-1-3}{-4}=1 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2x^2+5x+2=0 \rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 2\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-5\pm 3}{4}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-5+3}{4}=\dfrac{-1}{2} \\ x_2=\dfrac{-5-3}{4}=-2 \end{cases} \rightarrow -2x^2+x+1=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$\textit{Entonces} \quad f(x)=\frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}=\frac{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x+2)}=\frac{-(x-1)}{x+2}=\frac{-x+1}{x+2}$$

$$b)\ \lim_{x\to -1/2} f(x)=\lim_{x\to -1/2}\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-\left(-1/2\right)+1}{-1/2+2}=\frac{3/2}{3/2}=1 \rightarrow \textit{Existe } \lim_{x\to -1/2} f(x)$$

Hemos comprobado las dos condiciones por tanto f(x) tiene una discontinuidad evitable en x = $-1/2$.

b) Monotonía de f(x).

En el apartado anterior hemos obtenido las raíces del denominador de f(x). Por tanto sabemos que Dom f(x) = $\Re-\left\{-2,\dfrac{-1}{2}\right\}$.

También hemos simplificado la expresión de f(x) que será la que utilicemos para obtener f´(x).

$$f(x)=\frac{-x+1}{x+2}, \quad f'(x)=\frac{-1(x+2)-(-x+1)1}{(x+2)^2}=\frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2}=\frac{-3}{(x+2)^2}$$

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un número negativo. Por tanto f´(x) es negativa en su dominio.

f(x) es decreciente en $\Re-\left\{-2, \frac{-1}{2}\right\}$.

c) $\int f(x)\, dx$

Para el cáculo de la integral utilizamos la expresión simplificada de $f(x)=\frac{-x+1}{x+2}$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-x-2+2+1}{x+2}=\frac{-x-2}{x+2}+\frac{3}{x+2}=-1+\frac{3}{x+2}$$

Luego, $\int \frac{-x+1}{x+2} dx=\int\left(-1+\frac{3}{x+2}\right) dx=\int(-1)\, dx+\int \frac{3}{x+2} dx=-x+3\, Ln|x+2|+C$

Finalmente, $\int f(x)\, dx=-x+3\, Ln|x+2|+C$

Problema 5. Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4}$.

$$h'(x) = a + 2x; \quad a + 2x = 0; \quad 2x = -a; \quad x = \frac{-a}{2}.$$

$$h''(x) = 2 \quad \to \quad h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \quad \to \quad \text{en } x = \frac{-a}{2} \text{ hay un mínimo relativo.}$$

Por tanto, $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \quad \to \quad -a = \frac{-6}{4} \quad \to \quad a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ dibujar las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

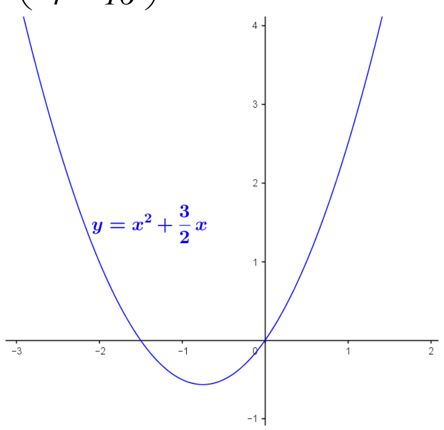
Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ *y* $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$$x = 0 \quad \to \quad y = 0$$

$$y = 0 \quad \to \quad x^2 + \frac{3}{2}x = 0; \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \to x = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4} \quad \to \quad y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

Mínimo relativo $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



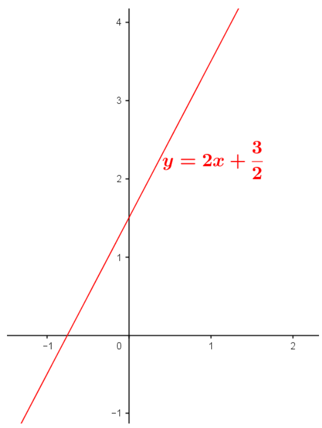
$$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$$x = 0 \to y = 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

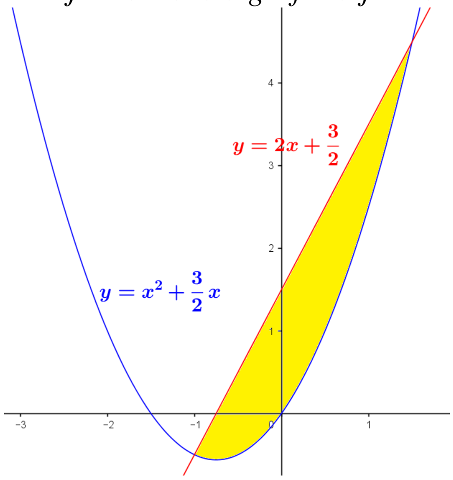
$$y = 0 \to 2x + \frac{3}{2} = 0; \; 2x = \frac{-3}{2}; \; x = \frac{-3}{4}$$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{array} \right.$$

El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48}$ *u.a.* $\cong 2'6042$ *u.a.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Hallar el valor positivo de a para que $\int_0^{a-1}(x+1)\,dx=\frac{9}{2}$ (2 puntos).

Obtener, razonadamente, la integral que da el área de la superficie comprendida entre el eje OX, la curva y=x+1 y las rectas x=0 y x=2. (*1,3 puntos*)

Solución:

a)

$$\int_0^{a-1}(x+1)\,dx=\frac{9}{2}$$

$$\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^{a-1}=\frac{9}{2}$$

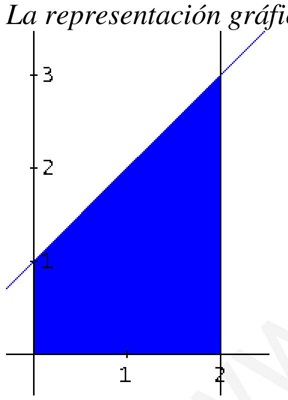
$$\frac{(a-1+1)^2}{2}-\frac{(0+1)^2}{2}=\frac{9}{2}$$

$$\frac{a^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$

$$a^2-1=9 \quad\rightarrow\quad a^2=10 \quad\rightarrow\quad a=\pm\sqrt{10}$$

Como a debe ser positivo $a=\sqrt{10}$

b) *La representación gráfica de la superficie cuya área debemos calcular es la siguiente*



El área la obtenemos a partir de la siguiente integral definida

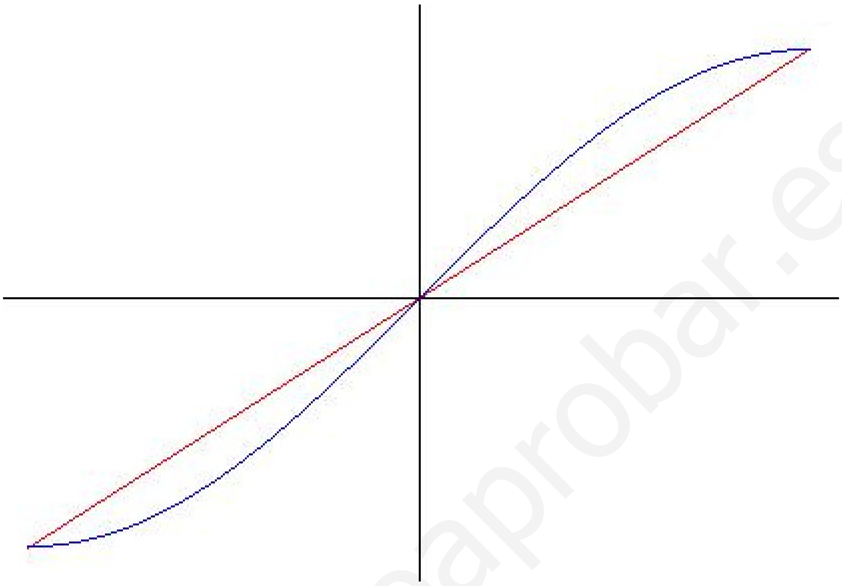
$$A=\int_0^2(x+1)\,dx=\left[\frac{(x+1)^2}{2}\right]_0^2=\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=\frac{8}{2}=4\ u.a.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. a) Dibujar la recta de ecuación *y = (2/π) x* y la curva de ecuación *y = sen x* cuando $-\pi/2 \le x \le \pi/2$; obtener razonadamente por cálculo integral el área limitada entre la recta y la curva *(1,6 puntos).*
b) Calcular la integral del producto de las dos funciones consideradas en el apartado anterior, es decir, $\int (2/\pi)\, x \, sen\, x \quad dx$, indicando los pasos realizados *(1,7 puntos).*

Solución:
a) Dibujamos las dos funciones mediante una tabla de valores

x	$y=\frac{2x}{\pi}$	$y = sen\ x$
$\frac{-\pi}{2}$	-1	-1
$\frac{-\pi}{4}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-\sqrt{2}}{2} = -0'7$
0	0	0
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0'7$
$\frac{\pi}{2}$	1	1



Las dos funciones son continuas en el intervalo considerado, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$, por lo tanto en el cálculo del área limitada entre ellas podemos emplear la regla de Barrow. Descomponemos el cálculo del área en dos trozos según que la recta esté por encima o por debajo de la curva y = sen x,

$$A = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} \left(\frac{2x}{\pi} - sen\ x \right) dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(sen\ x - \frac{2x}{\pi} \right) dx = \left[\frac{x^2}{\pi} + \cos x \right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0} + \left[-\cos x - \frac{x^2}{\pi} \right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[0 + \cos 0 - \left(\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}{\pi} + \cos \frac{-\pi}{2} \right) \right] + \left[-\cos \frac{\pi}{2} - \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{\pi} - (-\cos 0 - 0) \right] = 1 - \frac{\pi}{4} + 1 - \frac{\pi}{4} = \left(2 - \frac{\pi}{2} \right) u.a.$$

b) Para resolver esta integral primero extraemos la constante fuera de la integral y ésta la resolvemos por partes,

$$\int (\frac{2}{\pi})\ x\ sen\ x\ dx = \frac{2}{\pi} \int x\ sen\ x\ dx = (1)$$

Calculamos $\int x\ sen\ x\ dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x \rightarrow & du = dx \\ dv = sen\ x\ dx \rightarrow & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x \cos x - \int -\cos x\ dx =$

$$= -x \cos x + \int \cos x\ dx = -x \cos x + sen\ x$$

Luego

$$(1) = \frac{2}{\pi} \left(-x \cos x + sen\ x + C \right)$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. En un plano, el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x,$ siendo un río el eje OX. En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

Solución:

Como $y = \frac{x^2}{4} - x,$ *es una parábola, hacemos una representación gráfica aproximada.*

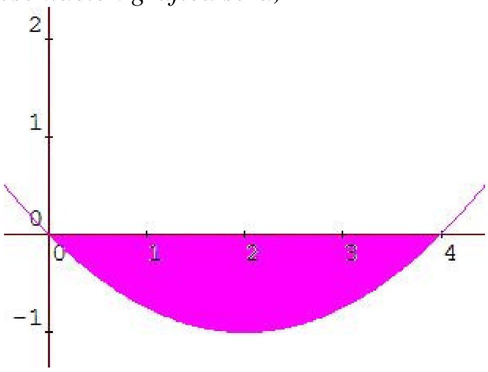
Calculamos los puntos de corte con el eje OX

$$\frac{x^2}{4} - x = 0$$

$$x^2 - 4x = 0$$

$$x(x-4) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 4 \end{cases}$$

La representación gráfica será,



El terreno en que está el pinar será la zona sombreada del gráfico. Calculemos el área del pinar, como las distancias están en Km, las unidades del área son Km^2,

$$A = \left| \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} x \right) dx \right| = \left| \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 \right| = \left| \frac{4^3}{12} - \frac{4^2}{2} \right| = \left| \frac{64}{12} - \frac{16}{2} \right| = \left| \frac{16}{3} - 8 \right| = \left| \frac{16 - 24}{3} \right| = \left| \frac{-8}{3} \right| = \frac{8}{3} Km^2$$

Expresemos el área del pinar en hectáreas. 1 área = 1 dam^2, 1 hectárea = 100 áreas = 100 dam^2.

$$\frac{8}{3} Km^2 = \frac{8}{3} 10000\, dam^2 = \frac{8}{3} 100\, ha = \frac{800}{3}\ ha$$

$$Valor = \frac{800}{3} 60 = 16000\ euros$$

Solución: el pinar vale 16000 €.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar todos los valores reales z tales que $\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \ln 25$ (*3,3 puntos*).

Solución:

Estudiamos la continuidad de la función integrando, $y = \frac{-16}{x^2-2x-15}$

$$x^2-2x-15=0$$

$$x = \frac{2\pm\sqrt{4+60}}{2} = \frac{2\pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

Luego $y = \frac{-16}{x^2-2x-15}$ *es continua en* $\Re - \{-3, 5\}$

En primer lugar calculamos la integral indefinida, descomponemos el integrando en suma de dos fracciones

$$\frac{-16}{x^2-2x-15} = \frac{-16}{(x-5)\,(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-5)}{(x-5)\,(x+3)}$$

$$-16 = A(x+3)+B(x-5)$$

$$-16 = (A+B)x + (3A-5B) \;\rightarrow\; \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \;\rightarrow\; \begin{cases} 5A+5B=0 \\ 3A-5B=-16 \end{cases} \;\rightarrow\; 8A=-16 \;\rightarrow\; A=-2$$

sustituyendo en 1^{a} *ecuación* $-2+B=0 \;\rightarrow B=2$

$$\int \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \int\left(\frac{-2}{x-5}+\frac{2}{x+3}\right)dx = \int\frac{-2}{x-5}\,dx + \int\frac{2}{x+3}\,dx = -2\,Ln\,|x-5| + 2\,Ln\,|x+3| + C =$$

$$= Ln\,(x+3)^2 - Ln\,(x-5)^2 + C = Ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2 + C$$

Calculemos ahora la integral definida, el cálculo que realizaremos es válido cuando la función integrando es continua en el intervalo [0, z].

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2-2x-15}\,dx = \left[Ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)^2\right]_0^z = Ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 - Ln\left(\frac{3}{-5}\right)^2$$

Buscamos z *de manera que,*

$$Ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 - Ln\left(\frac{3}{-5}\right)^2 = Ln\,25 \;\rightarrow\; Ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 = Ln\,\frac{9}{25} + Ln\,25 \;\rightarrow\; Ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 = Ln\left(\frac{9}{25}\,25\right) \;\rightarrow\; Ln\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 = Ln\,9$$

$$\left(\frac{z+3}{z-5}\right)^2 = 9 \;\rightarrow\; \frac{z+3}{z-5} = \pm 3 \quad \begin{cases} \frac{z+3}{z-5} = 3 \;\rightarrow\; z+3 = 3z-15 \;\rightarrow\; 18 = 2z \;\rightarrow\; z=9 \\ \frac{z+3}{z-5} = -3 \;\rightarrow\; z+3 = -3z+15 \;\rightarrow\; 4z = 12 \;\rightarrow\; z = 3 \end{cases}$$

En el caso z = 9, el integrando no es continuo en [0, 9] por lo que esta solución no es válida.

En el caso z = 3, el integrando es continuo en el intervalo [0, 3], esta solución es válida.

Solución z = 3.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las curvas $y = (x - 1)^3$, $y = 5 - x^2$ calcular razonadamente:
a) Su punto de corte *(1,1 puntos)*. b) El área encerrada por ellas y el eje OY *(2,2 puntos)*.

Solución:
a) Calculamos el punto de corte resolviendo la ecuación $(x - 1)^3 = 5 - x^2$
$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = 5 - x^2$
$x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$; *buscamos soluciones por Ruffini*

	1	−2	3	−6	*Una solución x = 2*
2		2	0	6	*Resolvemos* $x^2 + 3 = 0$; $x^2 = -3$ *No tiene soluciones reales*
	1	0	3	0	

Ambas curvas se cortan en el punto de abcisa x = 2
$y = 5 - 2^2 = 1$; *el punto de corte de las curvas es (2 , 1)*

b) Para calcular el área pedida hacemos una representación gráfica aproximada,
$y = (x - 1)^3$ *es una cúbica e* $y = 5 - x^2$ *es una parábola, ambas sencillas, ambas pasan por (2,1)*

$y = (x-1)^3$

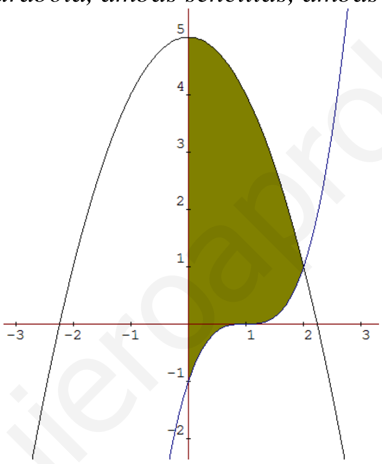
x	y
0	−1
1	0

$y = 5 - x^2$

x	y
$\sqrt{5}$	0
0	5
$-\sqrt{5}$	0

El área a calcular es la zona pintada del gráfico:

El cálculo mediante la integral definida entre 0 y 2 de la parábola menos la cúbica.



$$A = \int_0^2 \left[\left(5 - x^2\right) - (x-1)^3\right]dx = \int_0^2 \left[\left(5 - x^2\right) - \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\right]dx = \int_0^2 \left[5 - x^2 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1\right]dx =$$

$$= \int_0^2 \left[-x^3 + 2x^2 - 3x + 6\right]dx = \left[\frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 6x\right]_0^2 = \frac{-16}{4} + \frac{16}{3} - \frac{12}{2} + 12 = -4 + \frac{16}{3} - 6 + 12 = \frac{16}{3} + 2 =$$

$$= \frac{22}{3}\ u.\ a.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos)*.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ en el intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos)*.

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos)*.

Solución:

a)

Como la función g(x) esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de g(x).

$y = x^2 - 4$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0, -4)$

eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

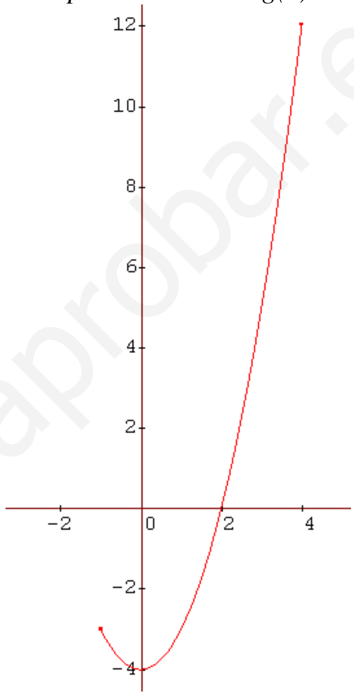
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad (0, -4)$$

Calculemos el inicio y fin de g(x)

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$

La representación de g(x) será:



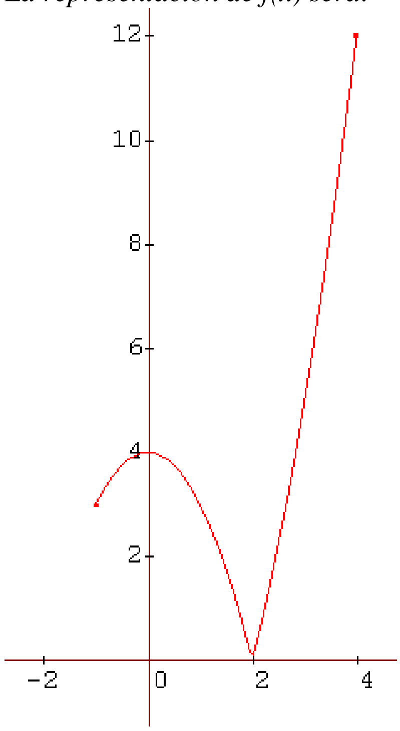
b)

$f(x) = \left| x^2 - 4 \right|$ *en el intervalo [-1, 4]*

Por su definición $f(x) = \left| g(x) \right|$

Por lo que podemos dibujar la función f(x) a partir de la representación de g(x) trazando la parte negativa de g(x) simétrica respecto del eje OX.

La representación de f(x) será:



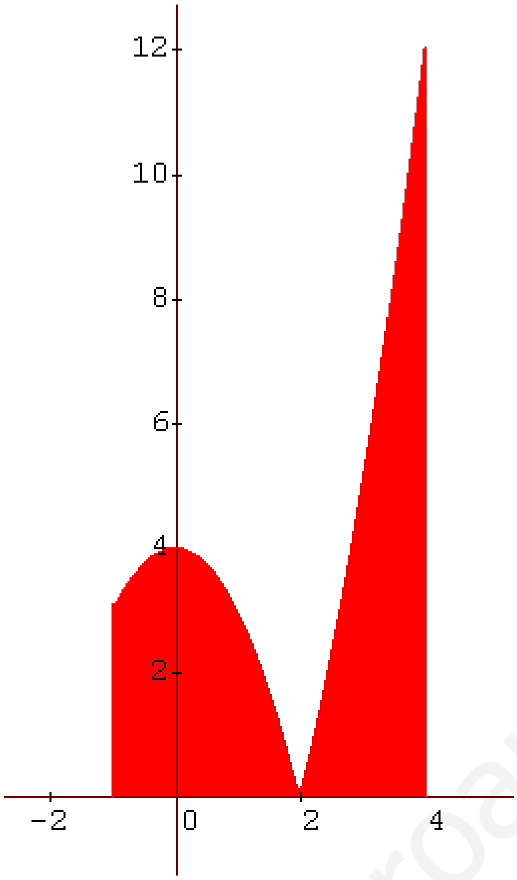
Los valores máximo y mínimo absoluto de f(x) podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

el máximo absoluto se alcanza en el punto (4 , 12)

el mínimo absoluto se alcanza en el punto (2 , 0) *c)*

La definición de f(x) es $f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & , \quad -1\le x<2 \\ x^2-4 & , \quad 2\le x\le 4\end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=\frac{47}{3}+4=\frac{47+12}{3}=\frac{59}{3}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ *u. a.*

PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo que $Dom\ f(x) = \Re - \{1, 2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = 2.

x = 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1^2 - 3\,.\,1 + 2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es a. v.}$$

x = 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{2^2 - 3\,.\,2 + 2} = \frac{2}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ es a. v.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,
La asíntota oblicua será la recta de ecuación y = m x + n; calculando los coeficientes m y n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como m = 0, no hay asíntota oblicua.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x),
Estudiemos el signo de y´,

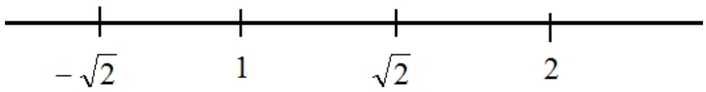
$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

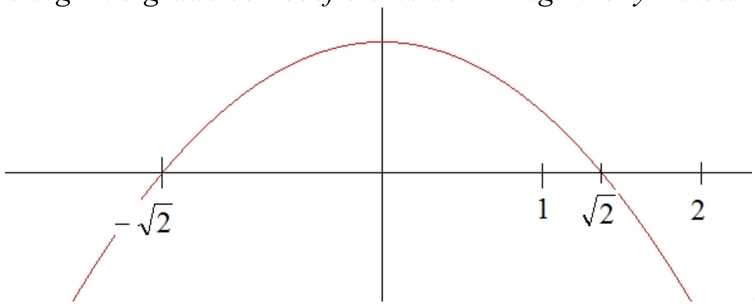
$-x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad$ (*resuelta en el apartado a*)) $\quad x=1,2$

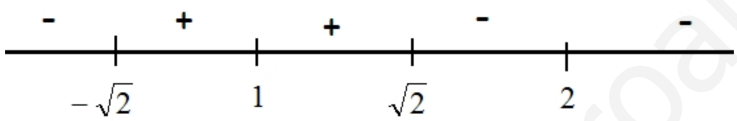
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y´ está elevado al cuadrado, el signo de y´ sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{2}$, es decir:



Por lo que el signo de y´ será:



Finalmente f(x) es creciente en $\left(-\sqrt{2}\,,1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty\,,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}\,,2\right)\cup\left(2\,,+\infty\right)$.

c) Cálculo de la integral,
El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*

para $x = 1 \rightarrow 1 = -A + 0 \rightarrow A = -1$
para $x = 2 \rightarrow 2 = 0 + B \cdot 1 \rightarrow B = 2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{-1}{x-1}\,dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx =$$
$$= -Ln\left|x-1\right| + 2\,Ln\left|x-2\right| + C$$

PROBLEMA A.3. Con el símbolo *ln x* se representa el logaritmo de un número positivo *x* cuando la base del logaritmo es el número *e*. Sea *f* la función que para un número positivo *x* está definida por la igualdad

$$f(x) = 4\,x\,ln\,x.$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo. *(4 puntos)*

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4\,x\,ln\,x$ en el punto (1,0). *(3 puntos)*

c) El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4\,x\,ln\,x$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Mínimo relativo de f(x)

Primero obtengamos el dominio de f(x).

Como ln x sólo puede calcularse para valores de x > 0, Dom f(x) = (0 , +∞)

$$f'(x) = 4\ln x + 4\,x\,\frac{1}{x} = 4\ln x + 4$$

$$f'(x) = 0 \quad \rightarrow \quad 4\ln x + 4 = 0$$

$$4\ln x = -4$$

$$\ln x = -1 \quad \rightarrow \quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo,

$$f''(x) = 4\,\frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$Para \quad x = \frac{1}{e} \quad \rightarrow \quad f''(x) = \frac{4}{1/e} = 4\,e > 0 \quad \Rightarrow \quad mínimo$$

La función f(x) alcanza el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

b) Recta tangente a y = 4 x ln x en (1 , 0)

Para x = 1, y = 4 . 1 . ln 1 = 0, el punto (1 , 0) es de la curva.

De la recta pedida, un punto es (1 , 0) y la pendiente será $y'_{x=1}$.

y´ = 4 ln x + 4 (según hemos obtenido en el apartado anterior al calcular f´(x))

$$y'_{x=1} = 4\ln 1 + 4 = 4$$

Por lo tanto, la recta tangente será:

y – 0 = 4 (x – 1); ***y = 4 x – 4***

c) Área limitada entre las rectas y = 0, x = e y $x = e^2$ *y la curva y = 4 x ln x.*

Para obtener esta área es conveniente realizar la representación gráfica del problema.

En primer lugar representemos la curva y = 4 x ln x,

Por cálculos de los apartados anteriores, de esta curva conocemos:

Dom y = (0 , +∞)

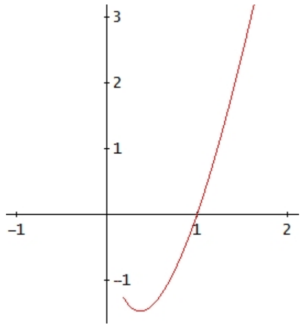
Su único extremo es el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e} \quad \rightarrow \quad y = 4\,\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-4}{e} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{1}{e}, \frac{-4}{e}\right) \approx (0'368, -1'472)$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

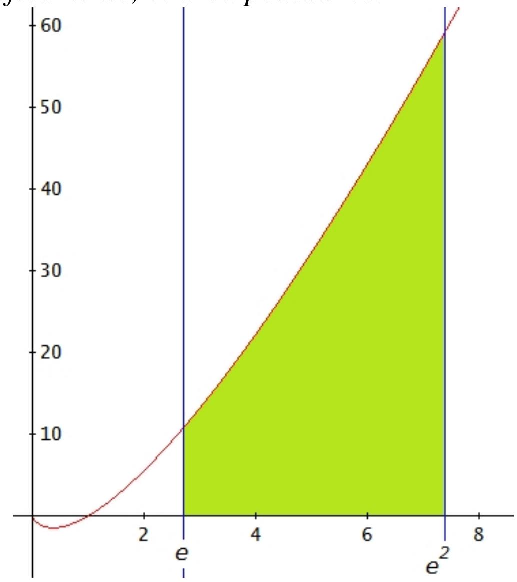
x = 0, no es del dominio

$$y = 0, \quad 4\,x\,ln\,x = 0 \begin{cases} 4x = 0 & \rightarrow \quad x = 0 \notin Dom\, y \\ \ln x = 0 & \rightarrow \quad x = 1 \end{cases} \quad \rightarrow \quad (1{,}0)$$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Para obtener la región del plano de la que debemos calcular su área nos falta por representar las rectas $x = e$ y $x = e^2$. Tanto e como e^2 son mayores que 1, por lo que no necesitamos realizar más cálculos sobre la curva. Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_e^{e^2} (4\,x \ln x)\,dx$$

Calculemos en primer lugar la integral indefinida.

$$\int (4\,x \ln x)\,dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = 4x\,dx \quad \rightarrow \quad v = 2x^2 \end{array} \right\} = 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2x^2 \ln x - \int 2x\,dx = 2x^2 \ln x - x^2$$

Por lo que,

$$\int_e^{e^2} (4\,x \ln x)\,dx = \left[2x^2 \ln x - x^2\right]_e^{e^2} = \left[2\left(e^2\right)^2 \ln e^2 - \left(e^2\right)^2\right] - \left[2\,e^2 \ln e - e^2\right] =$$

$$= \left(2\,e^4\;2\ln e - e^4\right) - \left(2\,e^2\;1 - e^2\right) = 4\,e^4 - e^4 - \left(e^2\right) = 3e^4 - e^2 \approx 156'405394$$

Finalmente, el área pedida mide: $(3\,e^4 - e^2)$ *u.a.* $\approx$ *156´405394 u.a.*

PROBLEMA B.3. Para diseñar un escudo se dibuja un triángulo T de vértices $A = (0, 12)$, $B = (-x, x^2)$ y $C = (x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Obtener **razonadamente**:

a) El área del triángulo T en función de la abscisa x del vértice C. *(2 puntos).*

b) Las coordenadas de los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima. *(3 puntos).*

Para completar el escudo se añade al triángulo T de área máxima la superficie S limitada entre la recta $y = 4$ y el arco de parábola $y = x^2$, cuando $-2 \le x \le 2$.

Obtener **razonadamente**:

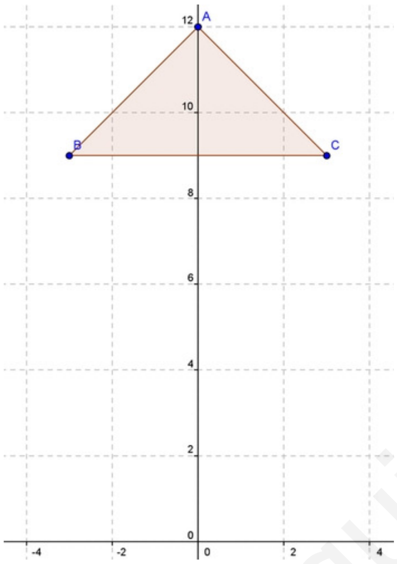
c) El área de la superficie S. (3 puntos).

d) El área total del escudo. (2 puntos).

Solución:

a) El triángulo T tiene de vértices los puntos $A(0, 12)$, $B(-x, x^2)$ y $C(x, x^2)$, siendo $x^2 < 12$.

Gráficamente será:



El triángulo T tiene de base $2x$ y de altura $12 - x^2$.
Luego su área será,

$$A_T(x) = \frac{2x(12 - x^2)}{2} = x(12 - x^2) = 12x - x^3$$

Por definición de los vértices B y C del triángulo T y como debe cumplirse que $x^2 < 12$, $\quad Dom\ A_T(x) = \left(0, \sqrt{12}\right)$

Es decir: $A_T(x) = 12x - x^3$, $\quad Dom\ A_T(x) = \left(0, \sqrt{12}\right)$

b) El área del triángulo T debe ser máxima.

$$A'_T(x) = 12 - 3x^2$$

$$12 - 3x^2 = 0$$

$$12 = 3x^2$$

$$x^2 = \frac{12}{3} = 4$$

$$x = \pm 2$$

Pero como $Dom\ A_T(x) = \left(0, \sqrt{12}\right)$, *$x = 2$. Determinemos qué tipo de extremo es.*

$A''_T(x) = -6x \quad \rightarrow \quad A''_T(2) = -6.2 = -12 < 0$, *luego en $x = 2$ hay un máximo relativo.*

Estudiemos la monotonía de $A_T(x)$ para comprobar que es el máximo absoluto.

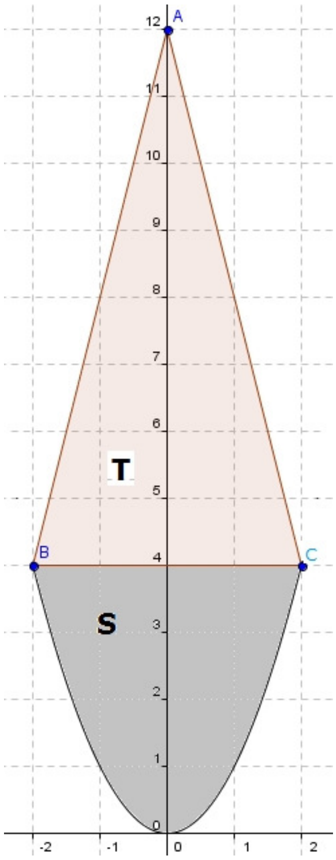
$A'_T(1) = 12 - 3.1^2 = 9 > 0$ *creciente*

$A'_T(3) = 12 - 3.3^2 = -15 < 0$ *decreciente*

Como a la izquierda de $x = 2$ $A_T(x)$ es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto.
Luego, el área del triángulo T es máxima para $x = 2$.

Y finalmente, los vértices B y C para que el área del triángulo T sea máxima son ***B (– 2 , 4) y C (2 , 4).***

El escudo completo será:



c) Área de la superficie S

La recta que pasa por los puntos B y C es y = 4. Por lo tanto la superficie S está limitada por las funciones $y = 4$ e $y = x^2$ para $-2 \le x \le 2$. Su área podemos calcularla mediante la siguiente integral definida,

$$A_S = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^{2} = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{8}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}\ u.a.$$

La superficie S mide $\frac{32}{3}$ ***u.a.***

d) Para obtener el área total del escudo, calculemos el área del triángulo T máximo (para x = 2),

$A_T(2) = 12 \cdot 2 - 2^3 = 24 - 8 = 16$, es decir, el área del triángulo máximo es de 16 u.a.

Obtengamos el área del escudo, $A_E = 16 + \frac{32}{3} = \frac{48 + 32}{3} = \frac{80}{3}$ *u.a.*

El área total del escudo es $\frac{80}{3}$ *u.a.*

PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\,sen\,x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en x = 0. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x + 1)e^{2x}$. *(3 puntos)*

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$, *(2 puntos)* y el área limitada por la curva $y = (x + 1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

a) m? / f(x) es continua en x = 0

Condiciones para que f(x) sea continua en x = 0.

1) ¿Existe f(0)?

$f(0) = m\,(0 + 1)\,e^{2\cdot 0} = m\,e^0 = m\cdot 1 = m.$ *Existe* $f(0) = m$

2) ¿Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$*?*

$\lim_{x\to 0} f(x)$, *como a la izquierda y derecha de 0 la función f(x) tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\left(m(x+1)e^{2x}\right)=m(0+1)e^{2.0}=m$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\,sen\,x}{x}=\frac{(0+1)\,sen\,0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ *(resolvemos la indeterminación aplicando la Regla de L´Hopital)* $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x+(x+1)\cos x}{1}=sen\,0+(0+1)\cos 0=1$$

Para que exista $\lim_{x\to 0} f(x)$ *los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto m = 1.*

3) Para este valor de m se cumple la tercera condición de continuidad: $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Luego, ***f(x) es continua en x = 0 para m = 1***.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = (x + 1)\,e^{2x}$

En primer lugar, Dom y = $\Re$

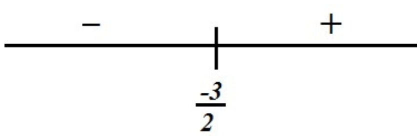
Calculemos y´

$$y' = e^{2x}+(x+1)\,2\,e^{2x}=e^{2x}+(2x+2)\,e^{2x}=(1+2x+2)\,e^{2x}=(2x+3)\,e^{2x}$$

Estudiemos el signo de y´

$$(2x+3)e^{2x}=0\quad\begin{cases} 2x+3=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-3}{2} \\ e^{2x}=0 \;\rightarrow\; \text{sin } solución \end{cases}$$

$\forall x\in\Re\;\; e^{2x}>0$, *luego el signo de y´ solo depende de (2 x + 3) que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y cuya raíz es* $\frac{-3}{2}$, *por lo tanto el signo de (2 x + 3) es:*



Y finalmente, $y = (x + 1)\,e^{2x}$ *es decreciente en* $\left(-\infty,\frac{-3}{2}\right)$ *y creciente en* $\left(\frac{-3}{2},+\infty\right)$.

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x+1 & \rightarrow \quad du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array} \right\} = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

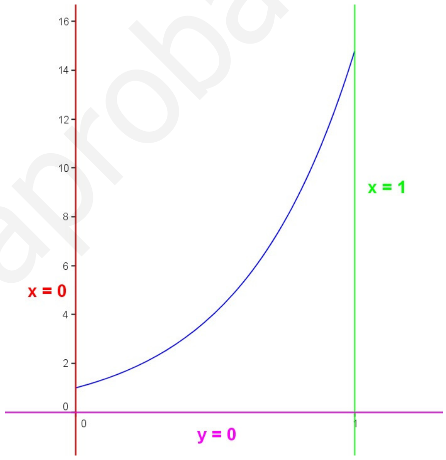
$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\,e^{2x} + C = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4}e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$$

Es decir, $\int (x+1)e^{2x}\,dx = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$

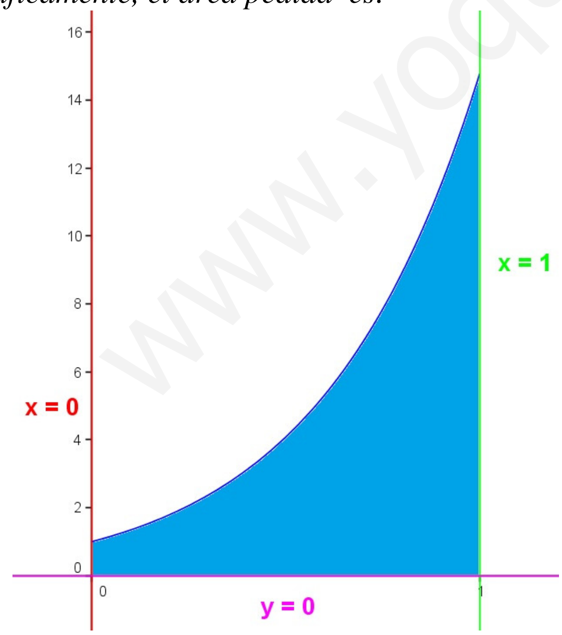
Para obtener el área limitada por la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *y las rectas* $x = 0$, $x = 1$ *e* $y = 0$ *es conveniente realizar la representación gráfica.*
En primer lugar representemos la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *que según lo estudiado en el apartado b) entre* $x = 0$ *y* $x = 1$ *es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:*

x	$y = (x+1)\,e^{2x}$
0	1
1	$2\,e^2 \approx 14'78$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x+1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{2.1+1}{4}e^{2.1} - \frac{2.0+1}{4}e^{2.0} =$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918\ u.a.$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)\ u.a. \approx 5'2918\ u.a.$

PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función real f definida por $f(x) = (x - 1) (x - 3)$, siendo x un número real. *(3 puntos)*

b) El área del recinto acotado limitado entre las curvas $y = (x - 1) (x - 3)$ e $y = - (x - 1) (x - 3)$. *(4 puntos)*

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva $y = a (x - 1) (x - 3)$, el eje Y y el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) es 4/3. *(3 puntos)*

Solución:

a) Para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función tenemos que estudiar el signo de $f'(x)$.

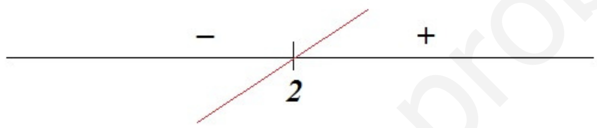
$f(x) = (x - 1) (x - 3)$, *efectuando las operaciones:* $f(x) = x^2 - 4x + 3$

$Dom\, f(x) = \Re$, *por ser una función polinómica.*

$f'(x) = 2x - 4$

$2x - 4 = 0; \quad 2x = 4; \quad x = 2$

Para obtener el signo de $f'(x)$ consideremos que $f'(x)$ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo cuya raíz es $x = 2$, es decir:



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $(2, +\infty)$ ***y decreciente en*** $(-\infty, 2)$

b) Área del recinto acotado limitado entre las curvas

$y = (x - 1) (x - 3) = x^2 - 4x + 3$ *e*

$y = - (x - 1) (x - 3) = -x^2 + 4x - 3$

Busquemos los puntos de corte entre las dos curvas:

$x^2 - 4x + 3 = -x^2 + 4x - 3$

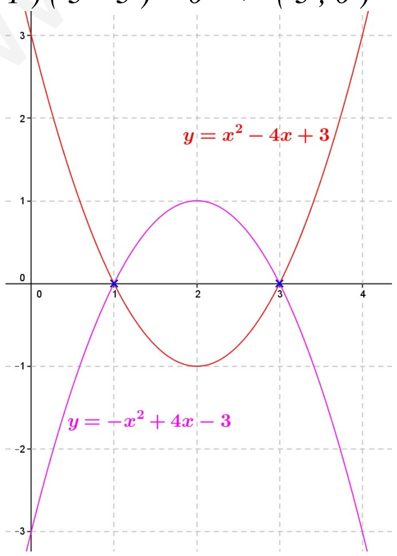
$2x^2 - 8x + 6 = 0$; *simplificando entre dos:* $x^2 - 4x + 3 = 0 \rightarrow (x - 1) (x - 3) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x - 1 = 0 & \rightarrow \quad x = 1 \\ x - 3 = 0 & \rightarrow \quad x = 3 \end{cases}$$

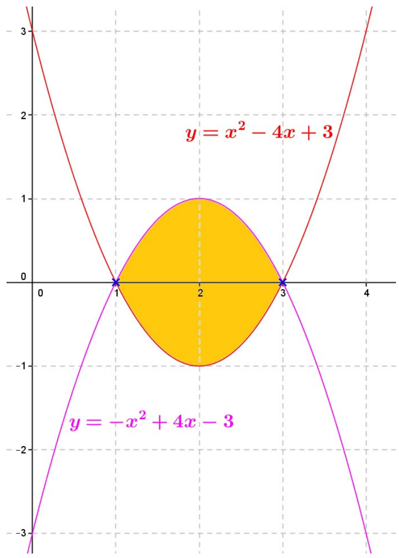
Para $x = 1$, $y = (1 - 1) (1 - 3) = 0 \rightarrow (1, 0)$

Para $x = 3$, $y = (3 - 1) (3 - 3) = 0 \rightarrow (3, 0)$

Como las dos curvas son parábolas, podemos realizar la representación gráfica rápidamente:



El área pedida será:



Esta área la obtenemos a partir del siguiente cálculo integral:

$$A=\int_1^3\left[\left(-x^2+4x-3\right)-\left(x^2-4x+3\right)\right]dx=\int_1^3\left[-2x^2+8x-6\right]dx=\left[\frac{-2x^3}{3}+\frac{8x^2}{4}-6x\right]_1^3=$$

$$=\left[\frac{-2x^3}{3}+4x^2-6x\right]_1^3=\left(\frac{-2.3^3}{3}+4.3^2-6.3\right)-\left(\frac{-2.1^3}{3}+4.1^2-6.1\right)=(-18+36-18)-\left(\frac{-2}{3}+4-6\right)=$$

$$=0-\left(\frac{-2}{3}-2\right)=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}\,u.a.$$

Solución: $A=\frac{8}{3}\,u.a.$

c) El valor positivo de a para el cual el área limitada entre la curva y = a (x – 1) (x – 3), el eje Y y el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) es 4/3.

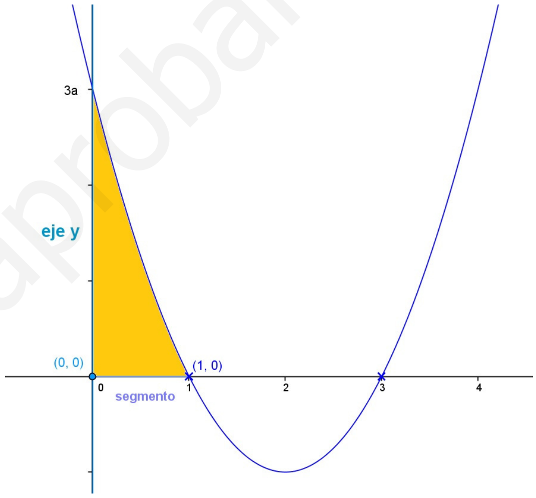
Representación gráfica del problema.

y = a (x – 1) (x – 3) = a (x2 – 4 x + 3), como el valor de a deber ser positivo la parábola tiene la forma: $\cup$

Calculamos algunos valores para representar la parábola

x	y
1	0
3	0
0	3a

Añadiendo el segmento que une los puntos (0, 0) y (1, 0) y el eje Y. El área que queremos calcular es:



Esta área la calculamos mediante la integral:

$$\int_0^1 a\left(x^2-4x+3\right)dx=a\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)dx=a\left[\frac{x^3}{3}-4\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1=a\left[\left(\frac{1^3}{3}-4\frac{1^2}{2}+3.1\right)-0\right]=a\left(\frac{1}{3}-2+3\right)=$$

$$=a\left(\frac{1}{3}+1\right)=a\,\frac{4}{3}$$

Como deber ser $a\,\frac{4}{3}=\frac{4}{3}\quad\to\quad a=1$

Solución: *a = 1*

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función f. *(2 puntos)*

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx.$ *(3 puntos)*

d) El valor de a>4 para el que el área de la superficie limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y = 0*, *x = 4* y *x = a* es ln(3/2). *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Dominio,

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$x^2-5x+6=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

Por tanto, ***Dom f(x) =*** $\mathfrak{R}\sim\{2,3\}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales,

Las posibles asíntotas verticales son x = 2 y x = 3. Comprobemos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{2^2-5.2+6}=\frac{1}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{3^2-5.3+6}=\frac{1}{0}=\infty, \text{ por tanto } x=3 \text{ es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\}, \text{ por tanto } y=0 \text{ es la asíntota horizontal}$$

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{\infty}=0, \text{ por tanto no tiene asíntota oblicua.}$$

La función f tiene dos asíntotas verticales, x = 2 y x = 3, y una asíntota horizontal y = 0.

b) Monotonía de la función f.

Estudiemos el signo de f´(x).

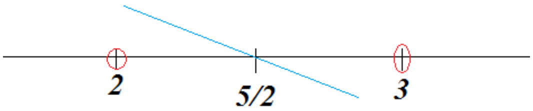
$$f'(x)=\frac{-(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}=\frac{-2x+5}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

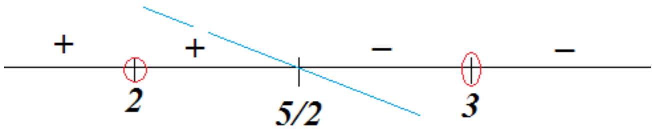
$$-2x+5=0 \;\rightarrow\; -2x=-5 \;\rightarrow\; x=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

$$\left(x^2-5x+6\right)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-5x+6=0 \;\rightarrow\; \{resuelta\ en\ a)\}\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Como en f´(x) el denominador es un término al cuadrado, es positivo. Luego el signo de f´ depende del numerador que, gráficamente, es una recta de pendiente negativa que pasa por (5/2 , 0), por lo que:



El signo de f´ es:



Finalmente, ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty, 2\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup \left(3, +\infty\right)$.

c) $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx=\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx \overset{*}{=}$$

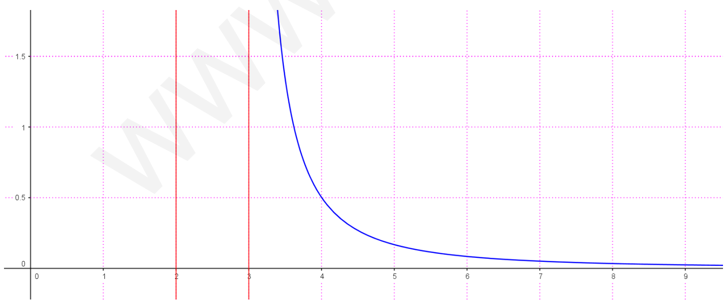
$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-2)\,(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)\,(x-3)} \;\rightarrow\; 1=A(x-3)+B(x-2)$$

$$\begin{array}{lcl} Para\ \ x=3 \;\rightarrow\; 1=B & & A=-1 \\ & \rightarrow & \\ Para\ \ x=2 \;\rightarrow\; 1=-A & & B=1 \end{array}$$

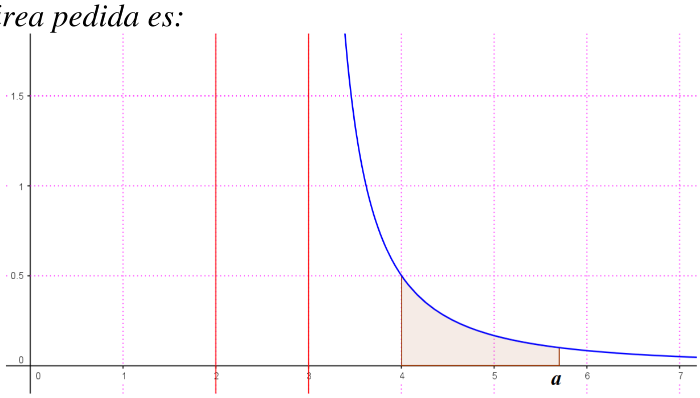
$$\overset{*}{=}\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx=-Ln\left|x-2\right|+Ln\left|x-3\right|+C=Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|+C$$

d) *¿a? / a>4 y el área de la superficie limitada por y = f(x) y las rectas y = 0, x = 4 y x = a es ln(3/2).*
Para determinar el área a calcular representemos la función f(x), para $x \geq 4$, a partir de la información obtenida en los apartados a) y b) y algún punto de la función, por ejemplo,

$$x=4,\quad f(4)=\frac{1}{4^2-5.4+6}=\frac{1}{2}.$$



El área pedida es:



Para calcular este área realizamos la siguiente integral definida:

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}dx$$

Considerando la integral indefinida obtenida el apartado c,

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}dx=\left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_4^a=$$

$$= \left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \right]_4^a = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{1}{2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2}$$

Como el área debe ser Ln(3/2), entonces:

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2} = Ln\frac{3}{2}$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \left(Ln\frac{3}{2} \right) + \left(Ln\frac{1}{2} \right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{4} \right) \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \frac{3}{4} \quad \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = 3a-6 \quad \rightarrow \quad a = 6 \\ \\ \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = -3a+6 \quad \rightarrow \quad 7a = 18 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = \dfrac{18}{7} = 2{'}5\ldots < 4 \end{array} \right.$$

Como a debe ser mayor que 4, ***la solución es a = 6****.*

PROBLEMA B.3. Dada la función f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$, para cualquier valor real $x \neq 0$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, *(2 puntos)* y los extremos relativos de la función f. *(1 punto)*

b) Las asíntotas de la curva $y = f(x)$. *(3 puntos)*

c) El área de la región plana limitada por la curva $y=\dfrac{x^2+1}{x}$, $1 \le x \le e$, el segmento que une los puntos (1,0) y (e,0), y las rectas $x = 1$ y $x = e$. *(4 puntos)*

Solución:

a) Monotonía de f(x).

Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = $\Re \sim \{ 0 \}$.

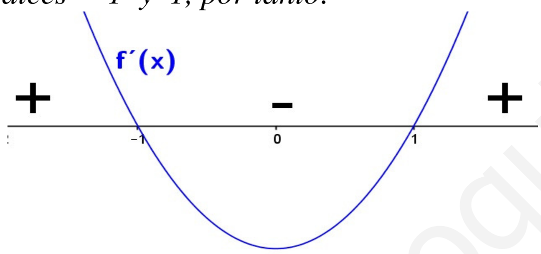
$$f'(x)=\frac{2x\,x-1(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x^2=1 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$$

$$x^2=0 \quad \rightarrow \quad x=0$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 *positivo y raíces – 1 y 1, por tanto:*



Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞) y decreciente en (– 1, 1).***

Del estudio anterior obtenemos que f(x) tiene un máximo relativo en x = – 1 y un mínimo relativo en x = 1.

$$Para \quad x=-1 \quad \rightarrow \quad f(-1)=\frac{(-1)^2+1}{-1}=\frac{2}{-1}=-2$$

$$Para \quad x=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=\frac{1^2+1}{1}=\frac{2}{1}=2$$

Entonces, ***f(x) tiene un máximo relativo en (– 1 , – 2) y un mínimo relativo en (1 , 2).***

b) ¿Asíntotas de $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ *?*

Asíntota vertical,

Posible A.V. x = 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x}=\frac{1}{0}=\infty \quad \rightarrow \quad x=0 \quad es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to \infty}x=\infty \quad \rightarrow \quad No\ tiene\ asíntota\ horizontal.$$

Asíntota oblicua,

Como la función es un cociente de polinomios y grad (numerador) – grad (denominador) = 2 – 1 = 1 la función tiene asíntota oblicua y la obtenemos efectuando la división polinómica:

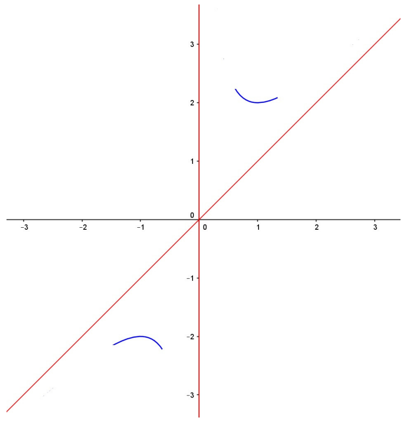
$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x \\ \hline -x^2 & x \\ \hline 1 & \end{array} \quad \rightarrow \quad y = x \text{ es la asíntota oblicua.}$$

Finalmente, ***la curva tiene $x = 0$ como asíntota vertical e $y = x$ como asíntota oblicua.***

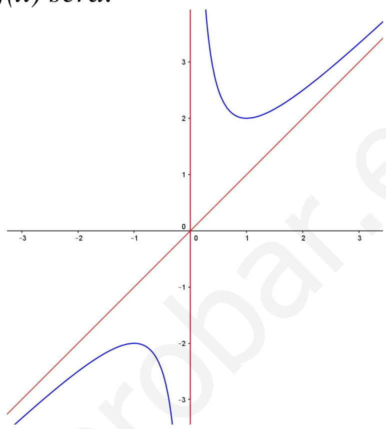
c) ¿Área de la región plana?

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función f(x),

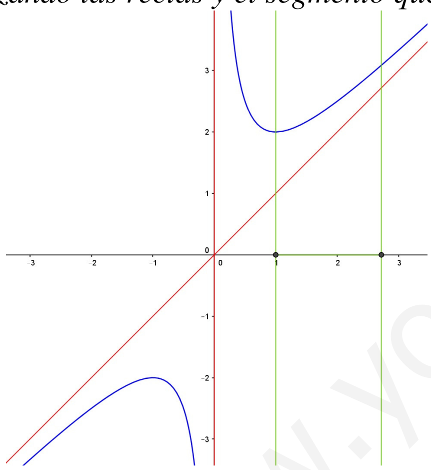
Sabemos



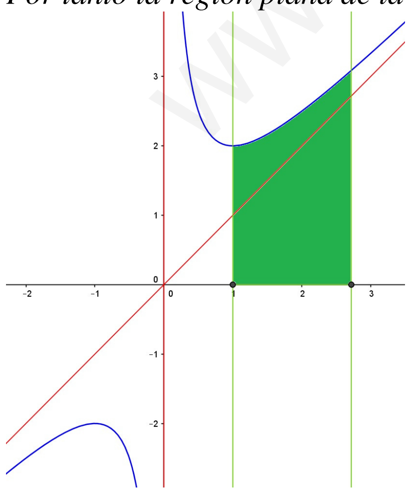
Por tanto, f(x) será:



Trazando las rectas y el segmento que delimitan la región:



Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int \left(x + \frac{1}{x} \right) dx = \frac{x^2}{2} + Ln\,|x| + C$$

Luego, $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2} + Ln\,|x| \right]_1^e = \left(\frac{e^2}{2} + Ln\,|e| \right) - \left(\frac{1^2}{2} + Ln\,|1| \right) =$

$$= \left(\frac{e^2}{2} + 1 \right) - \left(\frac{1}{2} + 0 \right) = \frac{e^2}{2} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \approx 4'1945$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(\frac{e^2}{2} + \frac{1}{2} \right) u^2 \approx$ **$4'1945\ u^2$.**

PROBLEMA A.3. Se considera la función $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) La representación gráfica de la curva de la curva *y = f(x), (2 puntos)*

c) El valor del parámetro *a* para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función *g(x) = f(x) + a x. (4 puntos)*

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx,\ \int x\,e^{-x}dx.$ *(1 punto)*

Solución:

a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L´Hopital) = \underset{x\to+\infty}{Lím}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \underset{x\to-\infty}{Lím}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (aplicando\ L´Hopital) = \underset{x\to-\infty}{Lím}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Monotonía.

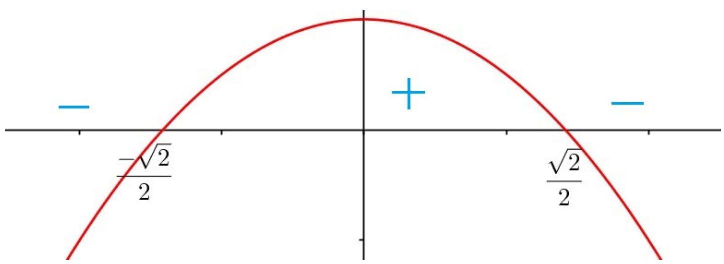
$$f'(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } solución \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

En f´(x) el factor e^{-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad\rightarrow\quad \textit{Máximo relativo} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)\cong(0´71, 0´43)$$

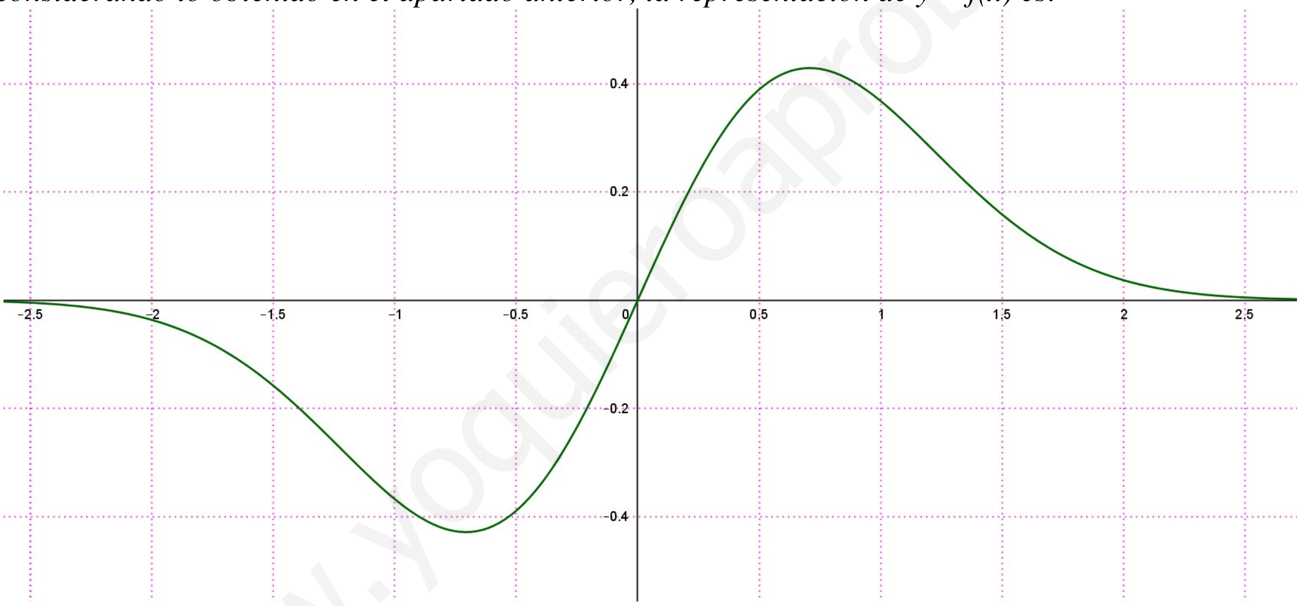
$$x=\frac{-\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad\rightarrow\quad \textit{Mínimo relativo} \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right)\cong(-0´71, -0´43)$$

b) Representación gráfica de y = f(x)

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\rightarrow\quad y=0\cdot e^{-0^2}=0 \\ y=0 \quad\rightarrow\quad x\cdot e^{-x^2}=0 \quad\rightarrow \left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ e^{-x^2}=0 \quad \text{sin } solución \end{array}\right. \end{array}\right\} \quad pto.\,corte \quad (0{,}0)$$

Y considerando lo obtenido en el apartado anterior, la representación de y = f(x) es:



c) ¿a? / g(x) = f(x) + a x cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1]

$$g(x)=x\,e^{-x^2}+a\,x$$

El teorema de Rolle dice:

Si f(x) es continua en [a, b], f(x) derivable en (a, b) y f(a) = f(b) entonces ∃c ∈ (a, b) / f´(c) = 0

Por definición, g(x) es continua y derivable en $\Re$*, entonces:*

g(x) es continua en [0, 1]

g(x) es derivable en (0, 1)

hay que comprobar que g(0) = g(1)

$$\left.\begin{array}{l} g(0)=0 \\ g(1)=\frac{1}{e}+a \end{array}\right\} \quad\rightarrow\quad 0=\frac{1}{e}+a \quad\rightarrow\quad a=\frac{-1}{e}$$

Para que g(x) cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] debe ser $a=\frac{-1}{e}$.

d)

$$1)\ \int f(x)\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \left\{ \begin{array}{l} t = -x^2 \\ dt = -2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2} = x\,dx \end{array} \right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$Luego \quad \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}\,e^{-x^2} + C$$

$$2)\ \int x\,e^{-x}dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^{-x}dx \rightarrow v = -e^{-x} \end{array} \right\} = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1) + C$$

$$Luego \quad \int x\,e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1) + C$$

Problema 3. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. *(4 puntos)*
c) La integral $\int f(x)\,dx$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

Dom f(x),

$$x(x+2)=0\left\langle\begin{array}{l}x=0\\x+2=0\rightarrow x=-2\end{array}\right. \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to-2}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{-3}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x(x+2)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x(x+2)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\} \rightarrow \quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$, ***las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 0 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) ¿Monotonía de f(x)?

Para estudiar la monotonía de esta función, usaremos la siguiente expresión de ella:

$$f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)} \quad\rightarrow\quad y=\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

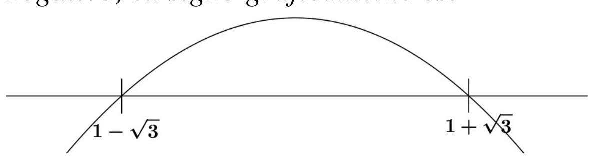
Debemos estudiar el signo de y´ en su dominio.

$$y'=\frac{1(x^2+2x)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-(2x^2+2x-2x-2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-2x^2+2}{(x^2+2x)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

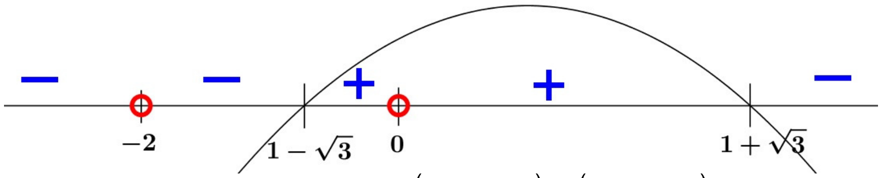
Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de y´ sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$-x^2+2x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\approx-0'7321\\x_2=1+\sqrt{3}\approx2'7321\end{array}\right.$$

Como $-x^2+2x+2$ *es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de* x^2 *negativo, su signo gráficamente es:*



Añadiendo los valores que no son del dominio de f(x):



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\left(1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right)$ ***y***

decreciente en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\,(x+2)+B\,x}{x\left(x+2\right)}\quad\rightarrow\quad x-1=A\,(x+2)+B\,x$$

$$x=-2\rightarrow\ -2-1=A\,(-2+2)+B\,(-2)\quad\rightarrow\quad -3=-2B\quad\rightarrow\quad B=\frac{3}{2}$$

$$x=0\rightarrow\quad 0-1=A\,(0+2)+B\cdot 0\quad\rightarrow\quad -1=2A\quad\rightarrow\quad A=\frac{-1}{2}$$

Entonces,

$$\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x+2}\right)dx=\int\frac{-1/2}{x}\,dx+\int\frac{3/2}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2}Ln\left|x\right|+\frac{3}{2}Ln\left|x+2\right|+C$$

Solución: $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\left(x+2\right)}\,dx=\frac{-1}{2}Ln\left|x\right|+\frac{3}{2}Ln\left|x+2\right|+C$

Problema 5. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. *(1 punto)*
b) Las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. *(3 puntos)*
d) La integral de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Dom f(x),

$$x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con

$$eje\ OY,\quad x=0\quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4}\quad\rightarrow\quad\left(0,\frac{-3}{4}\right)$$

$$eje\ OX,\quad f(x)=0\quad\rightarrow\quad\frac{x^2+3}{x^2-4}=0;\quad x^2+3=0;\quad x^2=-3,\ \text{sin solución. f(x) no corta al eje OX.}$$

El dominio de f(x) es $\Re-\{-2,2\}$ ***y sólo corta al eje OY en el punto*** $\left(0,\dfrac{-3}{4}\right)$**.**

b) Asíntotas.

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4}=\frac{7}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=-2\ \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{2^2+3}{2^2-4}=\frac{7}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=2\ \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1\end{array}\right\}\rightarrow\quad y=1\ \text{es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2 y la asíntota horizontal es y = 1.

c) Monotonía y extremos.

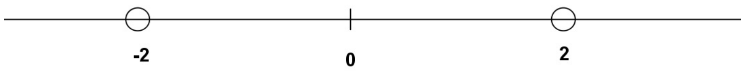
$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4},\qquad f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Estudiemos el signo de f´(x). Obtengamos las raíces del numerador y denominador de f´(x).

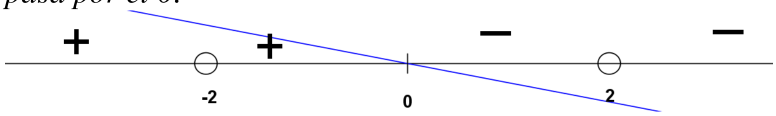
$-14x=0;\quad x=0$

$\left(x^2-4\right)^2=0;\quad x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$

Considerando el dominio de f(x) = $\Re - \{-2, 2\}$, debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de primera grado (una línea recta) con coeficiente de x negativo que pasa por el 0:



Luego, ***f(x) es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.***

El único extremo de la función está en $x = 0$ y como la función pasa de creciente a decreciente es un máximo relativo.

La función f(x) sólo tiene un máximo relativo en $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$**.**

d) $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{7}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

Luego, $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = \int\left(1+\frac{7}{x^2-4}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx$

La integral pendiente es una integral racional,

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\,(x+2)+B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)} \rightarrow 7 = A\,(x+2)+B\,(x-2)$$

$$x=-2 \rightarrow 7 = A\,(-2+2)+B\,(-2-2) \rightarrow 7=-4B \rightarrow B=\frac{-7}{4}$$

$$x=2 \rightarrow 7 = A\,(2+2)+B\,(2-2) \rightarrow 7=4A \rightarrow A=\frac{7}{4}$$

Entonces,

$$\int \frac{7}{x^2-4}\,dx = \int\left(\frac{7/4}{x-2}+\frac{-7/4}{x+2}\right)dx = \int \frac{7/4}{x-2}\,dx + \int \frac{-7/4}{x+2}\,dx = \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2|$$

Finalmente, $\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = x + \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2| + C$

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(4 puntos)*
c) El área comprendida entre la curva *y=f(x)* y las rectas *y=0, x=1* y *x=2*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$

Dom f(x),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \to x\neq 0 \\ \ln(x+1) \to x+1>0 \to x>-1 \end{array}\right\} \to Dom\ f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

Asíntotas,

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 1 y x = 0,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{-1}+\ln(0)=-1+\infty=\infty \to x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0}+\ln(1)=\infty+0=\infty \to x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{+\infty}+\ln(+\infty)=0+(+\infty)=+\infty \to \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Oblicua,

$y = m\,x + n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0\\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{*}{=}0\end{cases} \to m=0$$

* *{como x es un infinito de orden superior a ln(x+1)}*

No hay asíntota oblicua por ser m = 0.

El dominio de f(x) es $(-1,0)\cup(0,+\infty)$ y sus asíntotas son x = – 1 y x = 0.

b) Monotonía y extremos.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1),\qquad f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{-x-1+x^2}{x^2(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

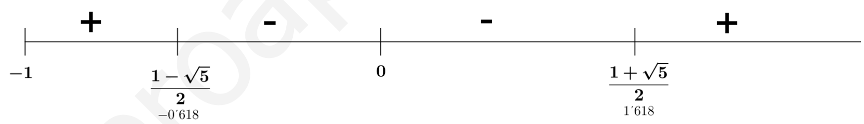
$$x^2-x-1=0 \quad\to\quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0'618\in Dom\, f(x)\\[2mm] x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1'618\in Dom\, f(x)\end{cases}$$

$$x^2(x+1)=0 \quad\to\quad \begin{cases} x^2=0 \quad\to\quad x=0\\ x+1=0\quad\to\quad x=-1\end{cases}$$

Considerando el dominio de f(x) = $(-1,0)\cup(0,+\infty)$, debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,

x	$f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}+\dfrac{1}{x+1}$
$-0'7$	$\dfrac{-1}{(-0'7)^2}+\dfrac{1}{-0'7+1}=1'29...>0$
$-0'5$	$\dfrac{-1}{(-0'5)^2}+\dfrac{1}{-0'5+1}=-2<0$
1	$\dfrac{-1}{1^2}+\dfrac{1}{1+1}=-0'5<0$
2	$\dfrac{-1}{2^2}+\dfrac{1}{2+1}=0'083...>0$

Es decir:



f(x) es creciente en $\left(-1,\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ ***y es decreciente en*** $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

En $x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo y*

en $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de decreciente a creciente hay un mínimo relativo.*

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cong -2'5805$$

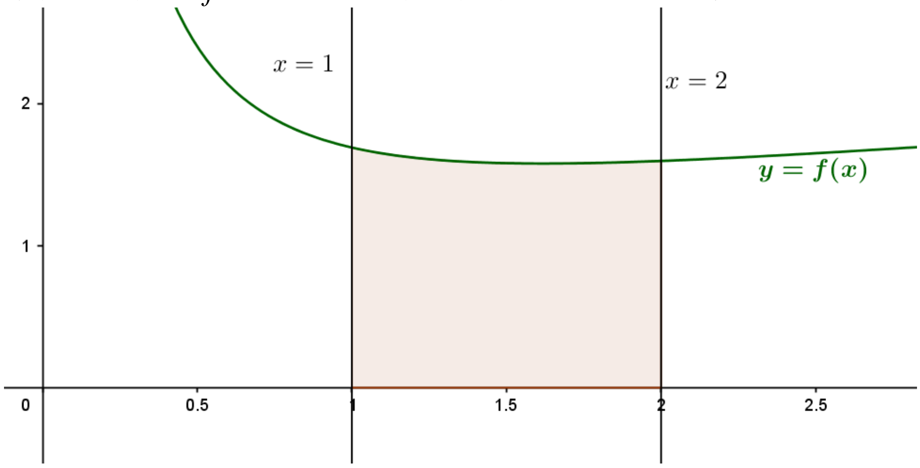
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 1'5805$$

La función f(x) tiene un máximo relativo en $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2},\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(-0'618\,,-2'5805)$ ***y***

un mínimo relativo en $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(1'618\,,1'5805)$ **.**

c) Área entre $f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

Nos interesa la función a ambos lado del mínimo relativo. El área a calcular gráficamente es:



El área la obtendremos mediante la siguiente integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx$.

Los valores de x están comprendidos entre 1 y 2, por tanto podemos emplear indistintamente $\ln(x)$ *o* $\ln|x|$.

Calculamos la integral de cada uno de los sumandos,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x+1)\, dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(x+1) \quad \rightarrow \quad du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx \quad \rightarrow \quad v = x \end{array} \right\} = x\ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1} dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1} dx \overset{*}{=}$$

$$\left\{ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \rightarrow \quad \int \frac{x}{x+1} dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1} dx = x - \ln(x+1) \right\}$$

$$\overset{*}{=} x\ln(x+1) - (x - \ln(x+1)) = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Entonces $\int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x$,

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \left[\ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x \right]_1^2 =$$

$$= [\ln(2) + (2+1)\ln(2+1) - 2] - [\ln(1) + (1+1)\ln(1+1) - 1] = \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - (0 + 2\ln 2 - 1) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - 2\ln 2 + 1 = 3\ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 \cong 1'6027$$

Solución: el área pedida es de $\ln\left[\left(\frac{27}{2}\right) - 1\right]$ *u.a.* $\cong$ *1´6027 u.a.*

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

Asíntotas de $y = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical.
Buscamos las posibles asíntotas verticales,
$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.6.2}}{2.6} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{7+1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\[2ex] \dfrac{7-1}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Posibles a.v. $x = \dfrac{1}{2}$ *y* $x = \dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\frac{1}{2} - 5}{0} = \frac{12\frac{1}{8} - 8\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5}{0} = \frac{\frac{12 - 16 + 36 - 40}{8}}{0} =$$

$$= \frac{\frac{48 - 56}{8}}{0} = \frac{\frac{-8}{8}}{0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{1}{2}$ *es asíntota vertical.*

$$\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\frac{2}{3} - 5}{0} = \frac{12\frac{8}{27} - 8\frac{4}{9} + 6 - 5}{0} = \frac{\frac{96 - 96}{27} + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{2}{3}$ *es asíntota vertical.*

Asíntota oblicua.

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = m\,x + n$ *siendo,*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}-2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{12x^3-8x^2+9x-5-12x^3+14x^2-4x}{6x^2-7x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2} = 1$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: $y = 2\,x + 1$

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}$$

efectuemos la división polinómica

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 12x^3 & - & 8x^2 & + & 9x & - & 5 & 6x^2-7x+2 \\ \cline{9-9}
- & 12x^3 & + & 14x^2 & - & 4x & & & 2x+1 \\ \cline{1-6}
 & & & 6x^2 & + & 5x & - & 5 & \\
 & & - & 6x^2 & + & 7x & - & 2 & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 12x & - & 7 &
\end{array}$$

luego $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = (2x+1) + \dfrac{12x-7}{6x^2-7x+2}$

$$H(x) = \int\left[(2x+1)+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right]dx = x^2+x+Ln\left|6x^2-7x+2\right|+C$$

Como debe ser $H(1)=1$

$$1 = 1^2+1+Ln\left|6\,.\,1^2-7\,.\,1+2\right|+C$$

$$1 = 1+1+Ln\left|6-7+2\right|+C$$

$$1 = 2+Ln\left|1\right|+C$$

$$1 = 2+0+C \quad\to\quad 1 = 2+C \quad\to\quad C=-1$$

Por lo tanto $H(x) = x^2+x-1+Ln\left|6x^2-7x+2\right|$

Problema 3.1. Se considera, en el primer cuadrante, la región R del plano limitada por: el eje X, el eje Y, la recta x = 2 y la curva $y = \dfrac{1}{4+x^2}$.

a) Calcular razonadamente el área de la región R. *(1,5 puntos).*
b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B. *(1,8 puntos).*

Solución:

a) Representación gráfica de $y = \dfrac{1}{4+x^2}$

Dom y = R

$4+x^2=0$; $x^2= -4$ no tiene soluciones reales, Dom y = R

Puntos de corte con ejes coordenados (0 , ¼)

x = 0; y = ¼

y = 0; 0 = 1 no hay solución

Asíntotas

No tiene asíntota vertical ya que el dominio de la función es R

horizontal,

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

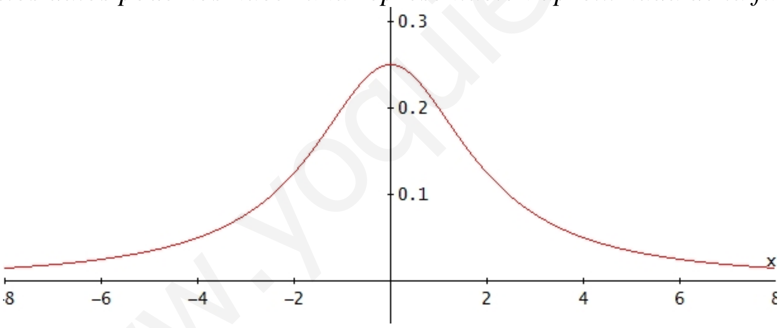
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{4+x^2} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

por lo tanto y = 0 es la a. h.

oblicua, no tiene ya que es un cociente de polinomios con a. horizontal

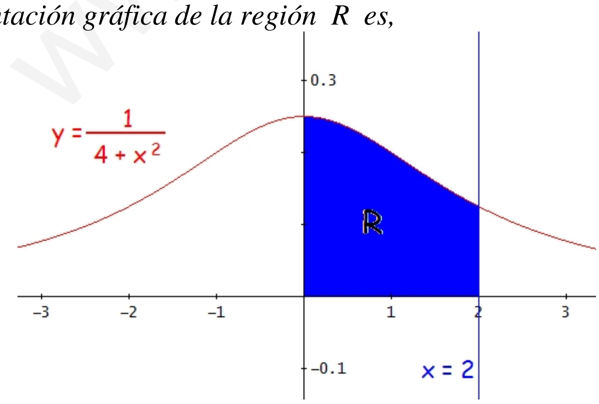
$\forall x \in \Re,\quad 4+x^2 > 0 \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{4+x^2} > 0$ *La función está por encima del eje OX*

A partir de estos datos podemos hacer una representación aproximada de la función dada,



Esta representación es suficiente para resolver el problema.

La representación gráfica de la región R es,



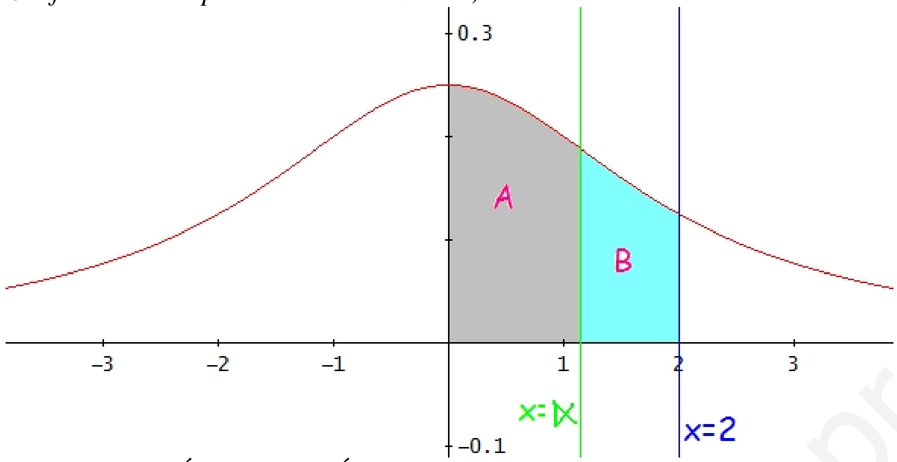
Por lo tanto el cálculo de su área lo realizamos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{\frac{4}{4}+\frac{x^2}{4}}dx = \int_0^2 \frac{\frac{1}{4}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{2}{2} - arctg\,\frac{0}{2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}[arctg\ 1 - arctg\ 0] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - 0\right) = \frac{\pi}{8}$$

Luego el área de la región R mide $\frac{\pi}{8}$ *u.a.*

b) Gráficamente el problema a resolver es,



de forma que Área (A) = 2 Área(B)

Cálculo del área de A, (utilizamos parte del cálculo integral realizado en el apartado anterior)

$$Área(A) = \int_0^\alpha \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_0^\alpha = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{\alpha}{2} - arctg\,\frac{0}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{\alpha}{2} - arctg\ 0\right] = \frac{1}{2}\left(arctg\,\frac{\alpha}{2} - 0\right) = \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

Cálculo del área de B,

$$Área(B) = \int_\alpha^2 \frac{1}{4+x^2}dx = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{x}{2}\right]_\alpha^2 = \frac{1}{2}\left[arctg\,\frac{2}{2} - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[arctg\,1 - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

Por lo que,

$$\frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4} - arctg\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{3}{2}arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{3\,.\,4}$$

$$arctg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3} \cong 1{,}1547$$

Problema 3.1.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$. *(1 punto).*

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}=\dfrac{A}{3-x}+\dfrac{B}{3+x}$. *(1 punto).*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y=\dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = – 2 y x = 2 . *(1,3 puntos).*

Solución:

a) Dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Dom f(x)

Como f(x) es una función racional busquemos las raíces del denominador,

$$(3-x)(3+x)=0\left\langle\begin{array}{lcl}3-x=0 & \rightarrow & x=3\\ 3+x=0 & \rightarrow & x=-3\end{array}\right.$$

Luego $\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-3\,,\,3\}$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Debemos estudiar el signo de f´(x).

$$f(x)=\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{1}{9-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2}=\frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}$$

Buscamos las raíces del numerador y denominador,

$2x = 0;\ x = 0$

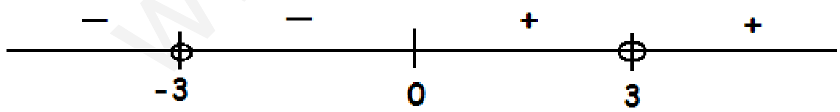
$(9-x^2)^2 = 0;\ 9-x^2 = 0;\ x^2 = 9;\ x = \pm 3$

Marcamos en la recta real las raíces obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta en dominio de la función,

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado será positivo, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es 2 x

$2x > 0;\ x > 0$

Y el signo de f´(x) será



f(x) es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ *y es creciente en* $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

b) Efectuando la suma que queda indicada,

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{3-x}+\frac{B}{3+x}=\frac{A\,(3+x)+B\,(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

Luego debe ser $1 = A(3+x) + B(3-x)$*, buscamos los valores de A y B dándole valores a x*

para x = 3 $\quad 1 = A(3+3) + B(3-3)$

$1 = 6A$

$$A=\frac{1}{6}$$

para $x = -3$ $\quad 1 = A(3-3) + B(3-(-3))$

$$1 = 6B$$

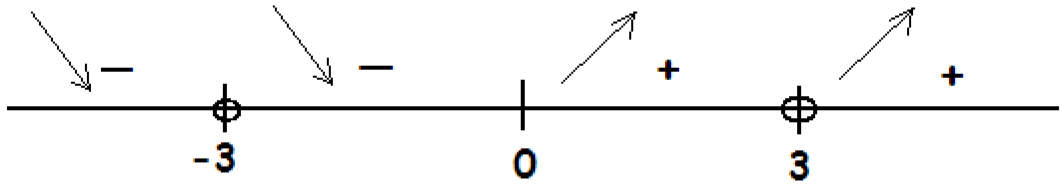
$$B = \frac{1}{6}$$

c) Para calcular esta área debemos dibujar, de forma aproximada, la curva dada

La curva corresponde a la función estudiada en el apartado a). Por lo tanto conocemos:

su dominio, $\quad Dom\ y = \Re - \{-3, 3\}$

y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:



De lo anterior deducimos que en x = 0 la curva tiene un mínimo relativo

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{(3-0)(3+0)} = \frac{1}{9} \quad \rightarrow \quad \textit{mínimo relativo} \quad \left(0, \frac{1}{9}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX

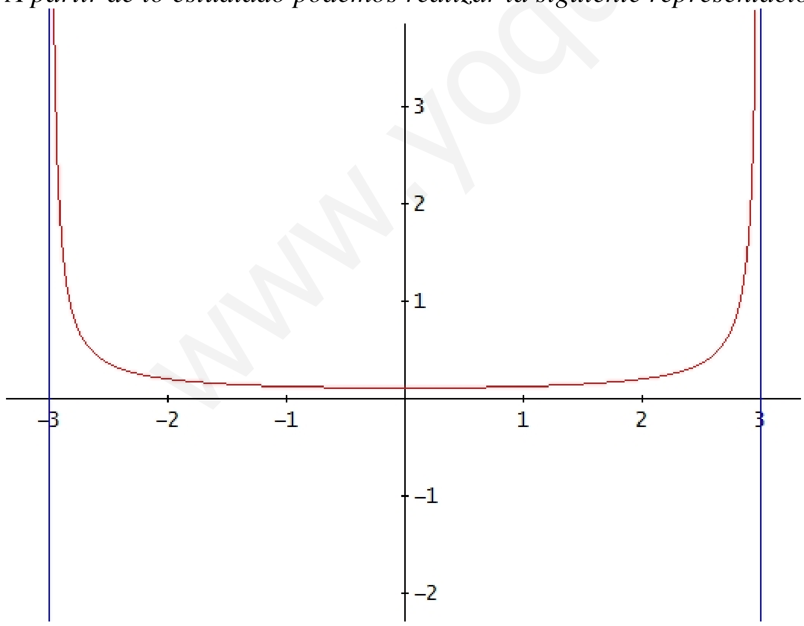
$$y = 0, \quad \frac{1}{(3-x)(3+x)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 \quad \textit{no tiene solución}$$

Posibles asíntotas verticales $x = -3$ *y* $x = 3$*; veámoslo,*

$$\lim_{x \to -3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6.0} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = -3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

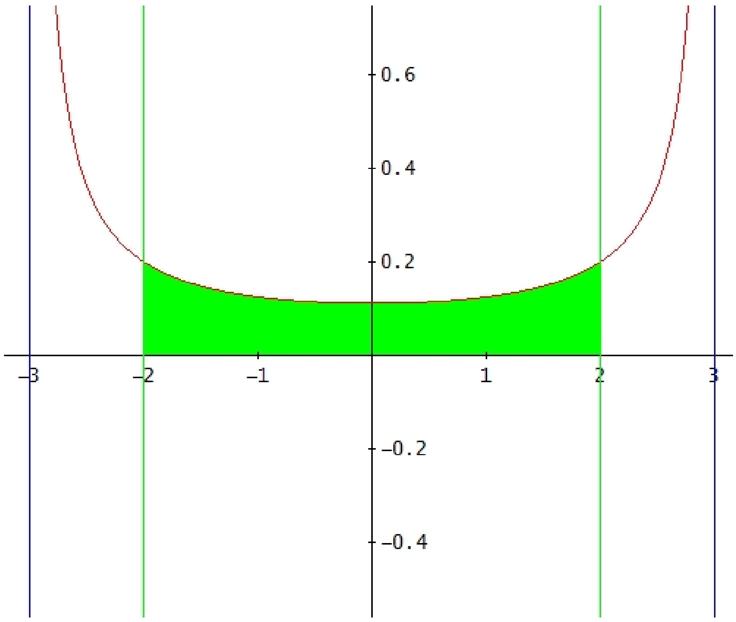
$$\lim_{x \to 3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{0.6} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = 3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

A partir de lo estudiado podemos realizar la siguiente representación,



No es necesario realizar más cálculos sobre la representación de la curva puesto que el área buscada está limitada por las rectas verticales x = – 2 y x = 2 y hemos representado la curva entre – 3 y 3

Gráficamente, el área que debemos calcular es,



El cálculo de esta área lo realizamos mediante la siguiente integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)}\,dx =$$

por el apartado b) sabemos que,

$$\int_{-2}^{2}\left[\frac{1/6}{(3-x)}+\frac{1/6}{(3+x)}\right]dx =$$

$$=\left[\frac{-1}{6}Ln|3-x|+\frac{1}{6}Ln|3+x|\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\frac{-1}{6}Ln|3-2|+\frac{1}{6}Ln|3+2|-\left[\frac{-1}{6}Ln|3+2|+\frac{1}{6}Ln|3-2|\right]=\frac{-1}{6}Ln\,1+\frac{1}{6}Ln\,5+\frac{1}{6}Ln\,5-\frac{1}{6}Ln\,1=$$

$$=\left(como \quad Ln\,1=0\right)=\frac{2}{6}Ln\,5=\frac{1}{3}Ln\,5$$

Finalmente, el área de la superficie pedida es $\frac{1}{3}Ln\,5\;u^2 \approx 0'5365\;u^2$

Problema 3.2. Dada la función real f (x) = $e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función f(x) + f(– x). *(1,1 puntos).*

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo. *(1,1 puntos).*

c) El punto de inflexión de f(x). *(1,1 puntos).*

Solución:

a)

$$f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-(-x)} = \underline{e^x} \ \underline{-\ e^{-x}} + \underline{e^{-x}} \ \underline{-\ e^x} = 0$$

b)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - \left(e^{-a} + e^{-(-a)}\right) =$$

$$= e^a + e^{-a} - e^{-a} - e^a = 0$$

c) Punto de inflexión de f(x)

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$
$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$
$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow \ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow \ e^x = e^{-x} \ \rightarrow$$
$$\rightarrow \ e^x = \frac{1}{e^x} \ \rightarrow \ e^x e^x = 1 \ \rightarrow \ e^{2x} = 1 \ \rightarrow \ 2x = 0 \ \rightarrow \ x = 0$$

Estudiemos el signo de f´´(x) a la izquierda y derecha de x = 0

x	$f''(x)$
-1	$e^{-1} - e^{1} = \frac{1}{e} - e = -2´350 < 0$
1	$e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = 2´350 > 0$

Por lo tanto como f´´(x) cambia de signo en x = 0, en x = 0 hay un punto de inflexión.

x = 0, f(0) = $e^0 - e^0$ = 1 – 1 = 0

Luego el punto de inflexión de f(x) es (0 , 0).

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Calcular, razonadamente, el área de la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = \dfrac{2}{1+x^2}$

Solución:

Puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 = \frac{2}{1+x^2}$$

$$x^2 + x^4 = 2$$

$$x^4 + x^2 - 2 = 0$$

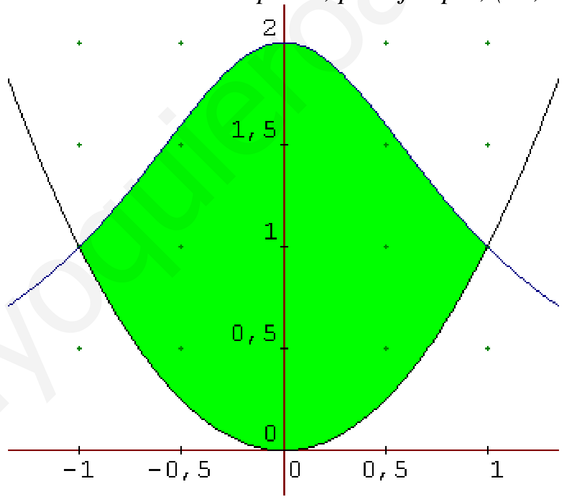
Resolvamos esta ecuación por Ruffini,

	1	0	1	0	−2
1		1	1	2	2
	1	1	2	2	0
−1		−1	0	−2	
	1	0	2	0	

$x^2 + 2 = 0$ *no tiene raíces reales*

Ambas curvas se cortan en los puntos (1 , 1) y (-1 , 1)

$y = x^2$ *es una parábola; de la otra curva obtenemos otro punto, por ejemplo, (0 , 2). La representación gráfica será:*



El área de la región limitada por las dos curvas el la zona verde, la obtendremos a partir de la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{1}\left(\frac{2}{1+x^2} - x^2\right)dx = \left[2\,arc\,tg\,x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left[2\,arc\,tg\,1 - \frac{1^3}{3}\right] - \left[2\,arc\,tg\,(-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right] =$$

$$= 2\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - 2\left(\frac{-\pi}{4}\right) + \frac{-1}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3} = 2'474926$$

El área pedida es $\left(\pi - \dfrac{2}{3}\right)$ *u.a.*

EJERCICIO B

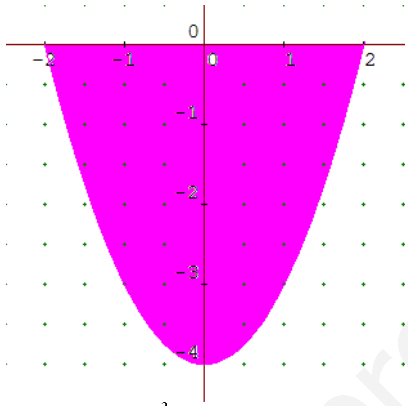
PROBLEMA 2. a) Representar la superficie S limitada entre el OX y la curva y = x^2 - 4, cuando -2 ≤ x ≤ 2. Obtener, razonadamente, mediante una integral el área de la superficie S (*1,6 puntos*).
b) Hallar el volumen del cuerpo generado al dar un giro completo alrededor del eje OX la superficie S considerada en el apartado anterior, indicando como se ha obtenido el volumen (*1,7 puntos*).

Solución:

a) $y = x^2 - 4$ es una parábola cuyo vértice está en el punto: $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$. Vértice (0 , - 4)

Corte con el eje OX, $x^2 - 4 = 0$, $x^2 = 4$, $x = 2$ ó $x = -2$; (2 , 0) y (- 2 , 0)

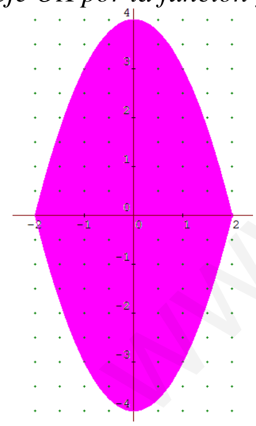
La representación gráfica de la superficie S será



Como $f(x) = x^2 - 4$ es continua en [-2 , 2] y $F(x) = x^3/3 - 4x$ es una primitiva de f(x) podemos aplicar la regla de Barrow para calcular el área de la superficie S,

$$A_S = \left|\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{-2}^{2}\right| = \left|\left(\frac{2^3}{3}-4\,.\,2\right)-\left(\frac{(-2)^3}{3}-4\,.\,(-2)\right)\right| = \left|\frac{8}{3}-8+\frac{8}{3}-8\right| = \left|\frac{16}{3}-16\right| = \left|\frac{-32}{3}\right| = \frac{-32}{3}\ u.\,a.$$

b) Al girar alrededor del eje OX la superficie S engendra un volumen que coincide con el engendrado al girar alrededor del eje OX por la función $y = x^2 - 4$, x Є [-2 , 2]. Gráficamente,



El cálculo del volumen es:

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(x^2-4\right)^2dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(x^4-8x^2+16\right)dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{8x^3}{3}+16x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \pi\left[\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right)-\left(\frac{-32}{5}-\frac{-64}{3}-32\right)\right] = \pi\left(\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32+\frac{32}{5}-\frac{64}{3}+32\right) =$$

$$= \pi\left(\frac{64}{5}-\frac{128}{3}+64\right) = \pi\left(\frac{192-640+960}{15}\right) = \frac{512}{15}\pi\ u.v.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Sea f(x) = x^2 + m x (donde m es un parámetro real) y f´(x) la función derivada de f(x). Se pide:
a) Hallar el valor del parámetro m para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 *(1,5 puntos).*
b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva y = f(x) y la recta de ecuación y = f´(x) *(1,8 puntos).*

Solución:
Como f(x) es un polinomio de 2º grado en x, es una función continua y derivable en $\Re$.
a) Para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 debe ser f´(-3/4)=0 y f´´(-3/4)>0
f ´(x) = 2 x + m *f ´´(x) = 2*
2 (-3/4) + m = 0 → -3/2 + m = 0 → m = 3/2
Como f ´´(x) = 2 >0 (siempre), para m = 3/2 la función f(x) tiene un mínimo relativo en x = -3/4

b) Hay que calcular el área de la región comprendida entre las funciones

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \qquad y \qquad f´(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Estas dos funciones son continuas y derivables en todo R (son funciones polinómicas) por lo tanto podremos aplicar la regla de Barrow para calcular el área comprendida entre ellas.
Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, para ello resolvemos la ecuación:

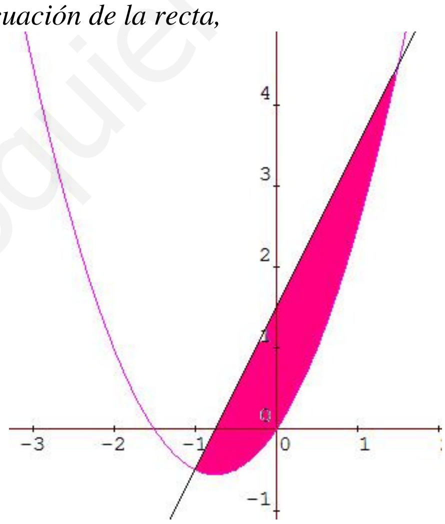
$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-3)}}{2\,.\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{cases}$$

Calculamos las ordenadas de los dos puntos de corte para realizar una representación aproximada de las dos funciones y del área que queremos calcular.
Calculamos las ordenadas a partir de la ecuación de la recta,

$$Para\ x = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$Para\ x = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$



$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - (x^2 + \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3}{2}\frac{3}{2} \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \frac{\frac{-27}{8}}{3} + \frac{\frac{9}{4}}{4} + \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{-9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-54 + 27 + 108 - 16 - 12 + 72}{48} = \frac{207 - 82}{48} = \frac{125}{48} u^2$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. a) Se tiene inicialmente 10 bacterias en un cultivo de laboratorio y cada día se duplican. Averigua, razonadamente, el número de bacterias que habrá cuando hayan transcurrido 10 días (*1 punto*).
b) Para otro cultivo, sea P(t) el número de bacterias transcurrido el tiempo t medido en días. Averigua el aumento del número de bacterias al cabo de 10 días, sabiendo que P(0)=500, P(3)=1100 y que la derivada P´(t) es constante para $0 \leq t \leq 10$ *(2,3 puntos).*

Solución:
a) El problema lo podemos presentar mediante la siguiente tabla:

días transcurridos	*0*	*1*	*2*	*3*
nº de bacterias	*10*	*20*	*40*	*80*
término		N_1	N_2	N_3

El número de bacterias forma una progresión geométrica de razón 2.
Llamando N(t) al número de bacterias al cabo de t días, $N(t) = N_1\, 2^{t-1} = 20\;\; 2^{t-1} = 10\;\; 2^t$
$N(10) = 10\; 2^{10} = 10240$*, cuando hayan transcurrido 10 días habrá 10240 bacterias.*

b) Sabemos que P(t) es tal que $P(0) = 500,\; P(3) = 1100$ *y* $P´(t) = K \quad 0 \leq t \leq 10$
Como $P´(t) = K \quad 0 \leq t \leq 10$ *entonces P´(t) es continua en el intervalo [0 , 10].*
Puesto que conocemos P(0) y P(3) consideramos el intervalo [0 , 3] en el que P´(t) es, también, continua y como P(t) es una primitiva de P´(t) podemos aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^3 P´(t)\, dt = P(3) - P(0)$$

$$\int_0^3 K\;\, dt = P(3) - P(0)$$

$$[Kt]_0^3 = 1100 - 500$$

$$[K\; 3 - K\; 0] = 600$$

$$3K = 600 \quad \to \quad k = 200$$

Para averiguar el aumento de bacterias aplicamos la regla de Barrow en el intervalo [0 , 10] a la función P´(t)=200,

$$\int_0^{10} 200\; dt = P(10) - P(0)$$

$$[200\; t]_0^{10} = P(10) - P(0)$$

$$[200\,.\,10 - 200\,.\,0] = P(10) - P(0)$$

$$2000 = P(10) - P(0)$$

Al cabo de 10 días ha habido un aumento de 2000 bacterias. Como inicialmente había 500 bacterias (valor de P(0)), al cabo de 10 días habrá 2500 bacterias.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. a) Obtener razonadamente la siguiente integral $\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx$ (2,*3 puntos*).

b) Aplicando la regla de Barrow, calcular $\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx$ (1 *punto*).

Solución:

a) Para obtener esta integral calculamos la derivada del denominador con el fin de expresar el numerador de la forma adecuada,

$D = (x+1)^2 + 1$, $D' = 2(x+1) = 2x + 2$

Expresamos el numerador como sigue, $4x + 11 = 4x + 4 + 7 = 2(2x + 2) + 7$

$$\int \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{2(2x+2)+7}{(x+1)^2+1}\,dx = \int \frac{2(2x+2)}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1}\,dx =$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{(x+1)^2+1}\,dx + \int \frac{7}{(x+1)^2+1}\,dx = 2\,Ln\left|(x+1)^2+1\right| + 7arc\,tg\,(x+1) + C$$

Como para cualquier valor de x, $(x+1)^2 + 1 > 0$, podemos eliminar el valor absoluto del argumento del logaritmo; el resultado de la integral queda como sigue,

$$= 2\,Ln\left((x+1)^2+1\right) + 7arc\,tg\,(x+1) + C$$

b) Para poder aplicar la regla de Barrow el integrando debe ser una función continua en el intervalo definido por los límites de integración. Como el denominador, $(x+1)^2 + 1$, es siempre positivo, es distinto de cero para cualquier valor de x, por lo que el integrando es una función continua en $\Re$.

Considerando el resultado obtenido en el apartado anterior,

$$\int_0^{\sqrt{3}-1} \frac{4x+11}{(x+1)^2+1}\,dx = \left[2\,Ln\left((x+1)^2+1\right) + 7arc\,tg\,(x+1)\right]_0^{\sqrt{3}-1} =$$

$$= \left(2\,Ln\left((\sqrt{3}-1+1)^2+1\right) + 7arc\,tg\,(\sqrt{3}-1+1)\right) - \left(2\,Ln\left((0+1)^2+1\right) + 7arc\,tg\,(0+1)\right) =$$

$$= 2\,Ln\,(3+1) + 7arc\,tg\,\sqrt{3} - 2\,Ln\,2 - 7arc\,tg\,1 = 2\,Ln\,4 + 7\frac{\pi}{3} - 2\,Ln\,2 - 7\frac{\pi}{4} = 2\,Ln\,2^2 - 2\,Ln\,2 + 7\frac{\pi}{3} - 7\frac{\pi}{4} =$$

$$= 4\,Ln\,2 - 2\,Ln\,2 + \frac{28\pi - 21\pi}{12} = 2\,Ln\,2 + \frac{7\pi}{12}$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:
a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto).**
b) Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto).**
c) Obtener el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$ **(1,3 puntos).**

Solución:
a) Máximo absoluto de f(x) en el intervalo $[-3, 0]$
Como f(x) es una función polinómica, es una función continua. El máximo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado se alcanza e un extremo local de la función o en los extremos del intervalo.

Calculemos los extremos locales de la función,
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$3x^2 - 3 = 0$; $3x^2 = 3$; $x^2 = 1$; $x = \pm 1$
$f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0$ *luego en* $x = -1$ *hay un máximo local.*
$f''(1) = 6 > 0$ *luego en* $x = 1$ *hay un mínimo local.*

Como -1 *pertenece al intervalo* $[-3, 0]$ *f(x) alcanza un máximo local en este intervalo.*

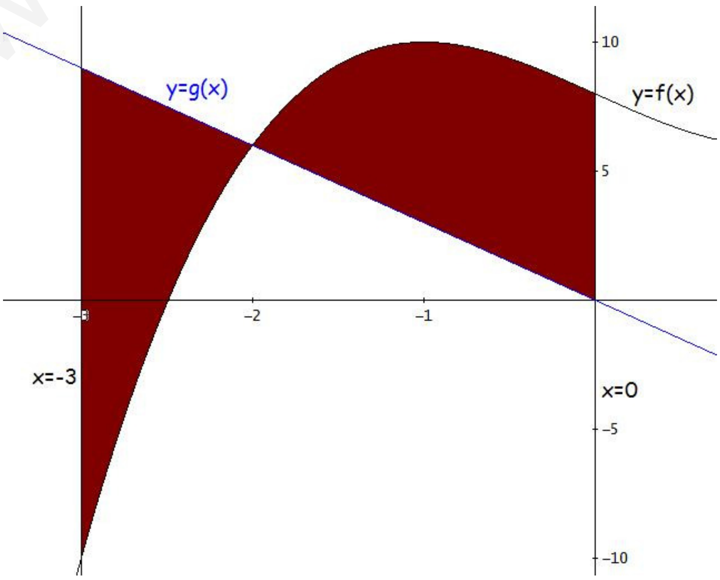
$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 8 = -1 + 3 + 8 = 12$

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 8 = -27 + 9 + 8 = -10$
$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 8 = 8$

Luego f(x) alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[-3, 0]$ *en el punto* $(-1, 12)$

b) Corte entre f(x) y g(x)
$x^3 - 3x + 8 = -3x$
$x^3 + 8 = 0$
$x^3 = -8$
$x = \sqrt[3]{-8} = -2$
Para $x = -2$, $g(-2) = -3(-2) = 6$
El punto de corte entre f(x) y g(x) es $(-2, 6)$.

c) Área limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -3$, $x = 0$
De los cálculos de los apartados anteriores podemos realizar una representación gráfica de las funciones que limitan el área a calcular,



Calculamos este área de la siguiente forma,

$$A=\int_{-3}^{-2}\left[(-3x)-(x^3-3x+8)\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[(x^3-3x+8)-(-3x)\right]dx=\int_{-3}^{-2}\left[-3x-x^3+3x-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3-3x+8+3x\right]dx=$$

$$=\int_{-3}^{-2}\left[-x^3-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3+8\right]dx=\left[\frac{-x^4}{4}-8x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left(\frac{-(-2)^4}{4}-8(-2)\right)-\left(\frac{-(-3)^4}{4}-8(-3)\right)+\left(\frac{0^4}{4}+8\,.\,0\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+8(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{-16}{4}+16\right)-\left(\frac{-81}{4}+24\right)+0-\left(\frac{16}{4}-16\right)=\frac{-16+64}{4}-\frac{-81+96}{4}-\frac{16-64}{4}=\frac{48}{4}-\frac{15}{4}-\frac{-48}{4}=$$

$$=\frac{48-15+48}{4}=\frac{81}{4}=20´25$$

El área pedida mide 20´25 u. a.

PROBLEMA A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$.
Obtener **razonadamente**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. *(2 puntos).*

b) El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$. *(2 puntos).*

c) Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$. *(2 puntos).*

d) El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. *(4 puntos).*

Solución:

$f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas, por lo que su dominio es $\Re$.

a) $f(x) = -x^2 + 2x$

$f'(x) = -2x + 2$

$-2x + 2 > 0; \quad -2x > -2; \quad x < 1$

Por lo tanto: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$

$g(x) = x^2$

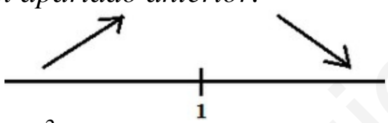
$g'(x) = 2x$

$2x > 0; \quad x > 0$

Por lo tanto $g(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$

b) De lo obtenido en el apartado anterior:

De $f(x)$ sabemos:

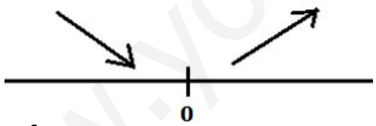


luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 1$

Para $x = 1$, $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$

f(x) tiene un máximo relativo en (1 , 1)

De $g(x)$ sabemos:



luego $g(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$

Para $x = 0$, $g(0) = 0^2 = 0$

g(x) tiene un mínimo relativo en (0 , 0)

c) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 2x = x^2; \quad -2x^2 + 2x = 0; \quad 2x(-x + 1) = 0;$

$$\begin{cases} 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ -x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

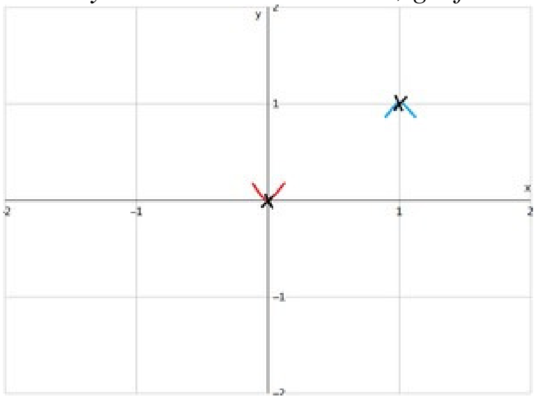
Para $x = 0$, $g(0) = 0^2 = 0$

$x = 1$, $g(1) = 1^2 = 1$

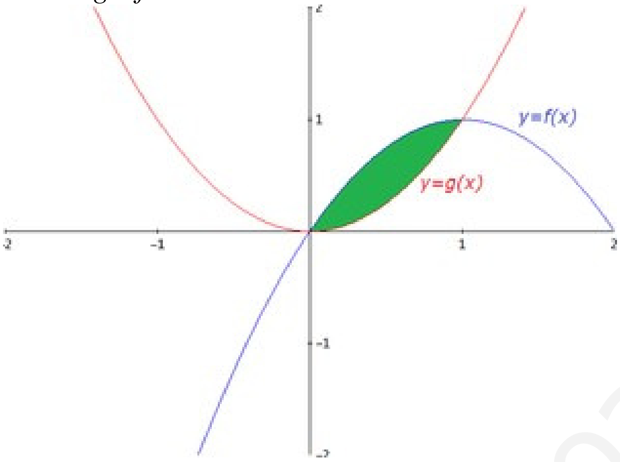
Los puntos de corte entre las dos curvas indicadas son: (0 , 0) y (1, 1)

d) Para calcular el área pedida representamos las dos curvas indicadas.

De lo estudiado en los apartados anteriores de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ conocemos: los puntos de corte entre ambas y sus extremos relativos, gráficamente:



La representación gráfica de las dos curvas será:



Del enunciado del problema, de la representación gráfica anterior sólo debemos considerar las funciones para valores de x entre 0 y 1. El área a calcular es la sombreada. Y el cálculo de esta área es:

$$\int_0^1 \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^1 \left(-x^2 + 2x - x^2 \right) dx = \int_0^1 \left(-2x^2 + 2x \right) dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right]_0^1 =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 1^3}{3} + 1^2 \right) - \left(-\frac{2 \cdot 0^3}{3} + 0^2 \right) = -\frac{2}{3} + 1 = \frac{1}{3}$$

El área pedida mide $\frac{1}{3}$ u.a.

PROBLEMA 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. *(3 + 1 puntos)*

c) El valor de $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx.$ *(3 puntos)*

Solución:

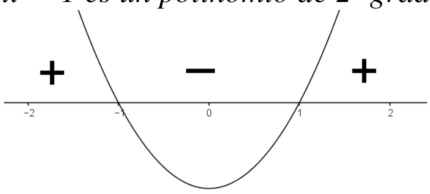
a) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

Dom f(x),

$x^2-1>0$

$x^2-1=0;\quad x^2=1;\quad x=\pm\sqrt{1}=\pm 1$

x^2 – 1 es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, luego



Por tanto, Dom f(x) = (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞).

Asíntotas,

verticales,

x = – 1 por la izquierda

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{0}=\infty \quad\to\quad x=-1 \textit{ es asíntota vertical por la izquierda.}$$

x = 1 por la derecha

$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0}=\infty \quad\to\quad x=1 \textit{ es asíntota vertical por la derecha.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{|x|}=\{como\ x<0\}=-1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{|x|}=\{como\ x>0\}=1\end{array}\right\}\to$$

tiene dos asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

oblicua, como la función tiene a. horizontal en ambos lados, no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas de la función f son:

asíntotas verticales: x = – 1 por la izquierda y x = 1 por la derecha

asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

b) Monotonía y representación gráfica.

Para la monotonía calculamos $f'(x)$ y estudiamos su signo.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\dfrac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

En el estudio del dominio de $f(x)$ hemos obtenido que $x^2-1>0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$, además, $\forall\, x\in Dom\ f(x)$, $\sqrt{x^2-1}>0$; por tanto $f'(x)<0\ \ \forall\, x\in Dom\ f(x)$.

Luego, $f(x)$ es decreciente en su dominio.

Representación gráfica de $f(x)$.

De la función conocemos: dominio, asíntotas y monotonía.

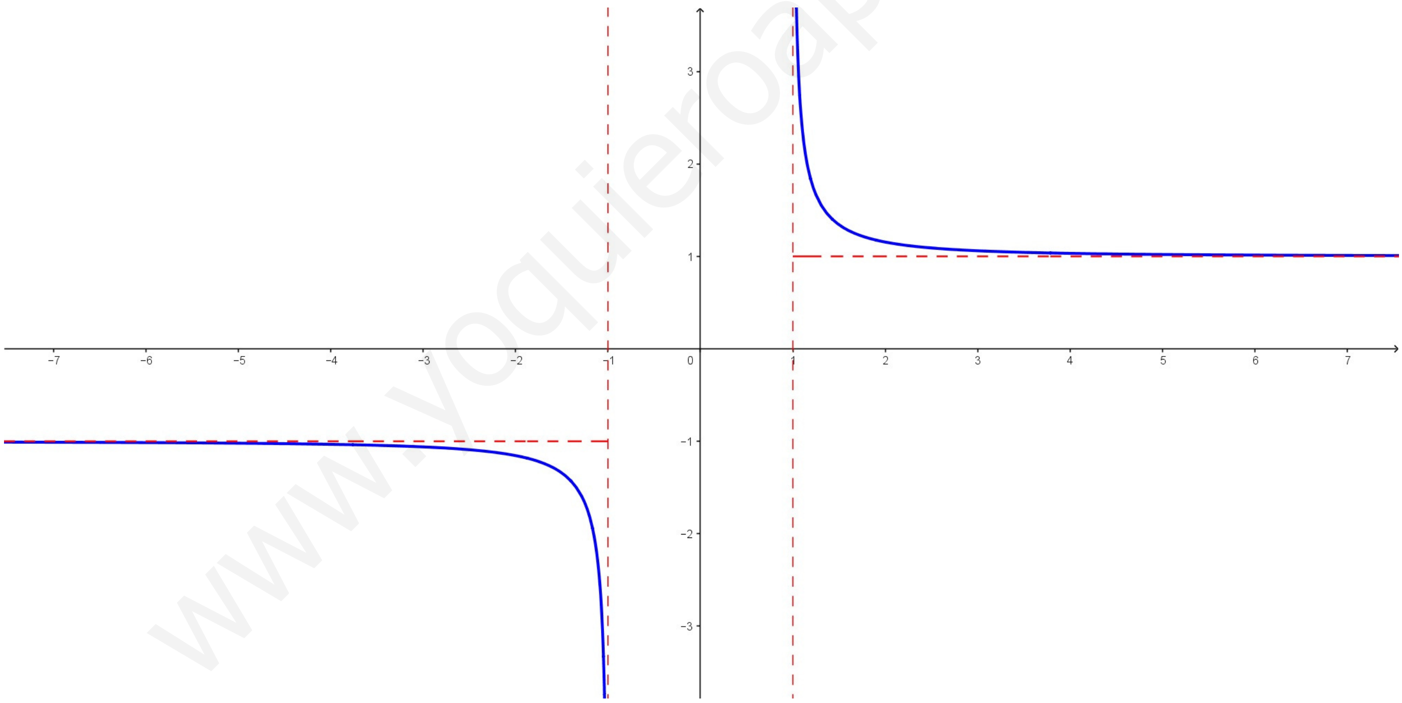
Puntos de corte:

Corte eje OX, $y=0$, $\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0;\quad x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OX

Corte eje OY, $x=0\ \notin Dom\ f(x)\cdot$ No corta al eje OY

Como $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ entonces si $x<-1$, {numerador negativo y denominador positivo}, $f(x)<0$; si $x>1$, {numerador y denominador positivos}, $f(x)>0$.

Considerando todo lo anterior, la representación gráfica de $f(x)$ será:



c) $\int_2^3 f(x)\,dx.$

Calculemos: $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\left\{t=x^2-1;\quad dt=2x\,dx;\quad x\,dx=\frac{dt}{2}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}$

Finalmente, $\int_2^3 f(x)\,dx=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3=\left(\sqrt{3^2-1}\right)-\left(\sqrt{2^2-1}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Solución: $\int_2^3 f(x)\,dx=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

$$y = \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}$$

Asíntotas verticales:

$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & & -1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & |0 \end{array}$$

$x^2+5=0 \;\rightarrow\; x^2=-5$ *sin raíces reales.*

Veamos si $x = -1$ es a.v.

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4(-1)^2+2(-1)+10}{0} = \frac{4-2+10}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = -1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x} = 0$$

análogamente,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to -\infty}\frac{4}{x} = 0$$

Por lo tanto $y = 0$ es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to +\infty}\frac{\dfrac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^4+x^3+5x^2+5x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

Por lo tanto no hay asíntota oblicua.

b)

$$H(x) = \int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} = \frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+5)}$$

$$4x^2+2x+10 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1)$$

$x=-1 \quad \rightarrow \quad 4-2+10=A(1+5)+(-B+C)=0$

$12=6A \quad \rightarrow \quad A=2$

$x=0 \quad \rightarrow \quad 10=5A+C$

$10=5\,.\,2+C$

$10=10+C \quad \rightarrow \quad C=0$

$x=1 \quad \rightarrow \quad 16=6A+(B+C)2$

$16=6\,.\,2+(B+0)2$

$16=12+2B \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$

$$H(x)=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{2x}{x^2+5}dx=2Ln|x+1|+Ln|x^2+5|+C=$$

como $x^2+5>0 \quad \forall x \in \Re$

$$=Ln(x+1)^2+Ln(x^2+5)+C$$

Debe ser H(0) = 0

$0 = Ln(0+1)^2 + Ln(0^2+5) + C$

$0 = Ln\, 1 + Ln\, 5 + C$

$0 = 0 + Ln\, 5 + C$

$C = -\ Ln\, 5$

Por lo que,

$$H(x)=Ln(x+1)^2+Ln(x^2+5)-Ln\,5=Ln\frac{(x+1)^2(x^2+5)}{5}$$

Problema 3.1. Dada la función f(t) = a t + b (con a y b constantes reales), se define $F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)dt$. Se pide obtener razonadamente:

a) La integral $\int_1^{x+1} f(t)dt$ *(1,5 puntos).*

b) La expresión de la derivada *F´(x)* de la función *F(x)*. *(0,5 puntos).*

c) La relación entre los valores a y b para la que se verifica: F´´(0) = 0. *(1,3 puntos).*

Solución:

a)

$$\int_1^{x+1} f(t)dt = \int_1^{x+1} (a\,t + b)dt = \left[a\frac{t^2}{2} + b\,t\right]_1^{x+1} = \left[a\frac{(x+1)^2}{2} + b\,(x+1)\right] - \left[a\frac{1^2}{2} + b\,.1\right] =$$

$$= \frac{a}{2}\left(x^2 + 2x + 1\right) + bx + b - \frac{a}{2} - b = \frac{a}{2}x^2 + a\,x + \frac{a}{2} + bx - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}x^2 + a\,x + bx = \frac{a}{2}x^2 + (a+b)x$$

b)

$$F(x) = x\int_1^{x+1} f(t)dt$$

Considerando el resultado obtenido en el apartado anterior,

$$F(x) = x\left[\frac{a}{2}x^2 + (a+b)x\right] = \frac{a}{2}x^3 + (a+b)x^2$$

luego

$$F'(x) = \frac{3a}{2}x^2 + 2(a+b)x$$

c) En el apartado anterior obtuvimos F´(x),

$$F'(x) = \frac{3a}{2}x^2 + 2(a+b)x$$

luego

$$F''(x) = 3\,a\,x + 2(a+b)$$

$$F''(0) = 2(a+b)$$

Como debe ser F´´(0) = 0 → 2 (a + b) = 0 → a + b = 0 → a = – b

Finalmente, para que se verifique que F´´(0) = 0 deber ser a = – b.

Problema 3.2. Para cada número real positivo α, se considera la función $g(x) = x^2 + \alpha$. Se pide calcular razonadamente:

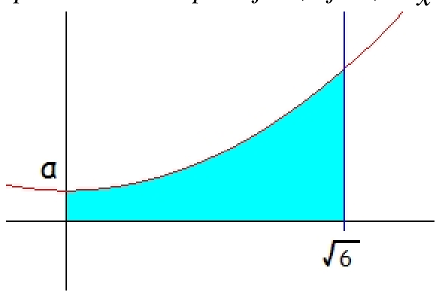
a) El área de la región del plano limitada por el eje X, el eje Y, la recta $x = \sqrt{6}$ y la curva $y = g(x)$. *(2 puntos).*

b) El valor de α para el que la curva $y = x^2 + \alpha$ divide al rectángulo de vértices (0,0), ($\sqrt{6}$,0), ($\sqrt{6}$, 6 + α), (0, 6 + α) en dos regiones de igual área. *(1,3 puntos).*

Solución:

a) $g(x) = x^2 + \alpha,\ \ \alpha > 0$. *Gráficamente es una parábola de vértice (0 , α)*

La región del plano limitada por eje X, eje Y, $x = \sqrt{6}$ *e* $y = g(x)$ *será:*



Calculamos el área de esta región mediante la siguiente integral,

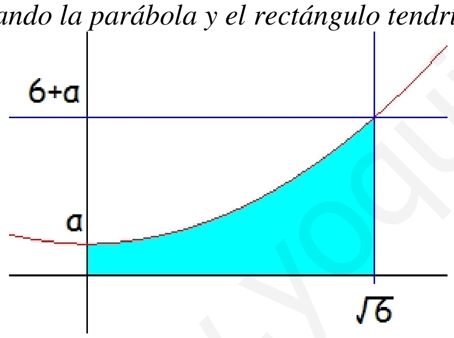
$$\int_0^{\sqrt{6}} \left(x^2 + \alpha\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \alpha\, x\right]_0^{\sqrt{6}} = \left[\frac{\left(\sqrt{6}\right)^3}{3} + \alpha\sqrt{6}\right] - [0] = \frac{6\sqrt{6}}{3} + \alpha\sqrt{6} = 2\sqrt{6} + \alpha\sqrt{6} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

como el valor del área obtenido depende de α, el área pedida podemos escribirla como: $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

b)

$$x = \sqrt{6} \quad \rightarrow \quad g\left(\sqrt{6}\right) = \left(\sqrt{6}\right)^2 + \alpha = 6 + \alpha$$

Luego dibujando la parábola y el rectángulo tendríamos,



El área del rectángulo es $R(\alpha) = (6+\alpha)\sqrt{6}$

El área de la zona pintada, según lo calculado en el apartado anterior, $A(\alpha) = (2+\alpha)\sqrt{6}$

$$Debe \quad ser \quad \frac{R(\alpha)}{2} = A(\alpha)$$

$$\frac{(6+\alpha)\sqrt{6}}{2} = (2+\alpha)\sqrt{6}$$

El valor buscado de α es 2.

$$6 + \alpha = 4 + 2\alpha$$

$$6 - 4 = 2\alpha - \alpha$$

$$2 = \alpha$$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x-2)(x^2+9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x) = \displaystyle\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$ *que cumple* $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \to \quad y = 0 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales,

Calculemos las raíces del denominador,

$$(x-2)(x^2+9) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x-2=0 \quad \to \quad x=2 \\ x^2+9=0 \quad \to \quad x^2=-9 \quad \textit{sin raíces reales} \end{array}\right.$$

Por lo que la posible asíntota vertical será la recta x = 2, comprobemos si lo es calculando el límite siguiente,

$$\lim_{x\to2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)} = \frac{2\,.\,2^2+12\,.\,2-6}{(2-2)(2^2+9)} = \frac{26}{0} = \infty$$

Por lo tanto ***x = 2 es la asíntota vertical****.*

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^4-2x^3+9x^2-18x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

y obtendríamos el mismo resultado al calcular el límite cuando $x \to +\infty$; por lo tanto ***no hay asíntota oblicua****.*

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \quad / \quad H(3) = \frac{\pi}{3}.$$

$$H(x) = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}$$

luego, $\quad 2x^2+12x-6=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)$

Calculamos los valores de A, B y C dando valores a x:

x = 2 → 26 = 13 A → A = 2

x = 0 → − 6 = 2 . 9 + C (− 2) → − 6 = 18 − 2 C → 2 C = 18 + 6 → 2 C = 24 → C = 12

x = 1 → 8 = 10 A − B − C ; sustituyendo los valores obtenidos de A y C,

8 = 10 . 2 − B − 12 → 8 = 8 − B → B = 0

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{2}{x-2}+\frac{0x+12}{x^2+9}=\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}$$

$$y \quad H(x)=\int\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{12}{x^2+9}dx\overset{*}{=}$$

calculamos cada integral por separado

$$\int\frac{2}{x-2}dx=2Ln|x-2|$$

$$\int\frac{12}{x^2+9}dx=12\int\frac{1}{9+x^2}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=$$

$$=12\,\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=4arctg\,\frac{x}{3}$$

$$\overset{*}{=}2Ln|x-2|+4arctg\,\frac{x}{3}+C$$

Calculemos el valor de C para que se cumpla la condición exigida,

$$H(3)=\frac{\pi}{3}$$

$$H(3)=2Ln|3-2|+4arctg\left(\frac{3}{3}\right)+C$$

$$\frac{\pi}{3}=2Ln\,1+4arctg\,1+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=2.0+4\frac{\pi}{4}+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=\pi+C \;\rightarrow\; C=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$$

Finalmente, la función pedida es:

$$H(x)=2Ln|x-2|+4\,arctg\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$$