PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x) = x^2 + |x|$, donde x es un número real cualquiera y $|x|$ representa el valor absoluto de x. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto o puntos donde la gráfica de la función f corta a los ejes de coordenadas. *(2 puntos)*
b) La justificación de que la curva $y = f(x)$ es simétrica respecto al eje de ordenadas. *(1 punto)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, *(2 puntos)*
y el extremo relativo de la función f, justificando si es máximo o mínimo. *(1 punto)*
d) La representación gráfica de dicha curva $y = f(x)$. *(1 punto)*
e) Las integrales definidas $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$ y $\int_{0}^{2} f(x)\,dx$. *(1,5 + 1,5 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte con ejes coordenados.

$x = 0 \rightarrow f(0) = 0^2 + |0| = 0 \rightarrow (0, 0)$

$f(x) = 0 \rightarrow x^2 + |x| = 0$

Para $x < 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 1 = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases}$ *soluciones no válidas porque* x *debe ser negativo.*

Para $x \geq 0 \rightarrow x^2 + x = 0 \rightarrow x(x+1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + 1 = 0 \rightarrow x = -1 \end{cases}$ *($x = -1$ no válida porque* x *debe mayor o igual que cero).*

Solución: $x = 0$

El único ***punto de corte con los ejes coordenados es (0 , 0).***

b) Para que la curva $y = f(x)$ *sea simétrica respecto al ejes de ordenadas debe cumplir* $f(x) = f(-x)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^2 + |x| \\ f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| \end{array}\right\} \rightarrow f(x) = f(-x)$$

Luego, ***la curva*** $y = f(x)$ ***es simétrica respecto al eje de ordenadas.***

c) Monotonía y extremos de $f(x)$

Para resolver este apartado es conveniente expresar $f(x)$ *como función definida a trozos.*

$$f(x) = x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Obtengamos $f'(x)$,

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases} \qquad f'(0) = \begin{cases} f'(0^-) = -1 \\ f'(0^+) = 1 \end{cases} \rightarrow \text{No existe } f'(0)$$

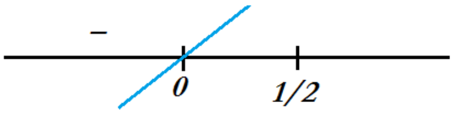
Luego, $f'(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 0 \\ 2x + 1 & , \quad x > 0 \end{cases}$

Estudiemos el signo de $f'(x)$,

Para $x < 0$,

$2x - 1 = 0 \rightarrow 2x = 1 \rightarrow x = ½$

$2x - 1$ *es una recta de pendiente positiva que pasa por el punto* $(½, 0)$, *por tanto:*



Es decir, f(x) es decreciente en el intervalo $(-\infty , 0)$. Y, considerando que la función es simétrica respecto del eje de ordenadas, deducimos que la función es creciente en el intervalo $(0 , +\infty)$.

Como f(x) es decreciente a la izquierda de $x = 0$ y creciente a la derecha, en $x = 0$ hay un mínimo relativo, que además es el absoluto por lo dicho anteriormente.

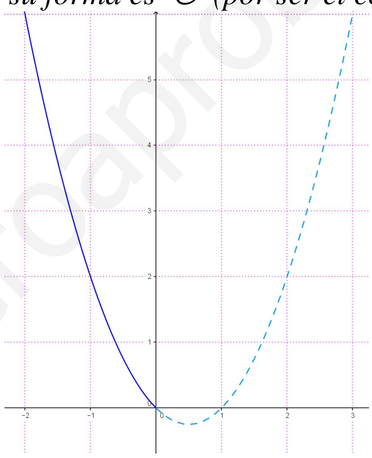
*Luego, **f(x) es decreciente en $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0 , +\infty)$. Y en el punto $(0 , 0)$ hay un mínimo relativo**.*

d) Representación gráfica de f(x).
Como f(x) es simétrica respecto del eje de ordenadas, representamos la función para valores de $x < 0$ y para $x > 0$ la representamos por simetría.

Anteriormente obtuvimos $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x < 0 \\ x^2 + x & , \quad x \geq 0 \end{cases}$

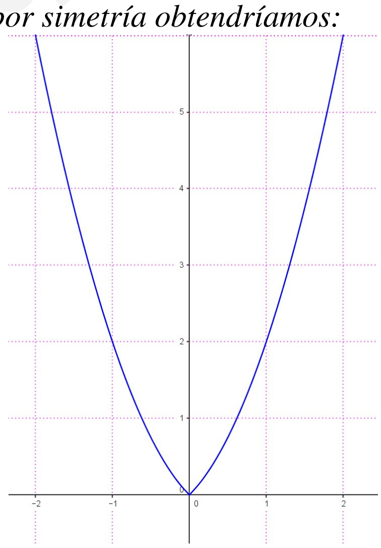
Para $x < 0$, $f(x) = x^2 - x$. Esta función es una parábola de la que obtuvimos, en el apartado a), sus puntos de corte con el eje de abcisas: $(0 , 0)$ y $(1 , 0)$, y su forma es $\cup$ (por ser el coeficiente de x^2 positivo)

Luego para $x < 0$ la representación de f(x) es:

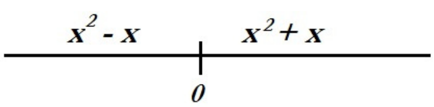


Completando la representación de f(x) por simetría obtendríamos:

La representación de $y = f(x)$ es:



e) f(x) es



$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 - x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right) = -\left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{-5}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \left(x^2 + x\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - 0 = \frac{8}{3} + \frac{4}{2} = \frac{14}{3}$$

PROBLEMA A.3. Se consideran las curvas $y = x^3$, $y = a\,x$ y la función $f(x) = x^3 - a\,x$, siendo a un parámetro real y $a > 0$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con los ejes coordenados y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f. *(1 + 2 puntos)*

b) La gráfica de la función f cuando $a = 9$. *(3 puntos)*

c) Calcular en función del parámetro a, el área de la región acotada del primer cuadrante encerrada entre las curvas $y = x^3$ e $y = a\,x$, cuando $a > 1$. *(2 puntos)*

d) El valor del parámetro a para el que el área obtenida en el apartado c) coincide con el área de la región acotada comprendida entre la curva $y = x^3$, el eje OX y las rectas $x = 0$ y $x = 2$. *(2 puntos)*

Solución:

a) Puntos de corte de $y = f(x)$ con los ejes coordenados.

$$x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0^3 - a\,.\,0 = 0 \rightarrow (0, 0)$$

$$y = 0 \rightarrow x^3 - a\,x = 0 \rightarrow x\,(x^2 - a) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - a = 0 \rightarrow x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a} \end{cases}$$

$$\left(como \quad a > 0 \rightarrow \exists\sqrt{a}\right)$$

Los puntos de corte con los ejes coordenados son $(0, 0)$, $(\sqrt{a}, 0)$ y $(-\sqrt{a}, 0)$.

Monotonía.

$y = x^3 - a\,x, \quad a > 0$

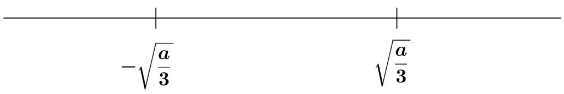
$y' = 3\,x^2 - a$

$3\,x^2 - a = 0$

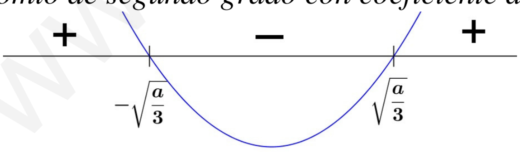
$3\,x^2 = a$

$$x^2 = \frac{a}{3} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{a}{3}}, \quad como\ a > 0 \rightarrow \exists\sqrt{\frac{a}{3}}$$

Hay que estudiar el signo de y' en los intervalos:



y' es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 positivo, luego



Por tanto, ***la función f es creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{a}{3}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{a}{3}}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}, \sqrt{\frac{a}{3}}\right)$.***

b) Gráfica de f para $a = 9$.

Hay que representar la función $y = x^3 - 9\,x$

Dom $y = \Re$, porque es una función polinómica.

Del estudio anterior sabemos:

Puntos de corte con los ejes coordenados: $(0, 0)$, $(3, 0)$ y $(-3, 0)$.

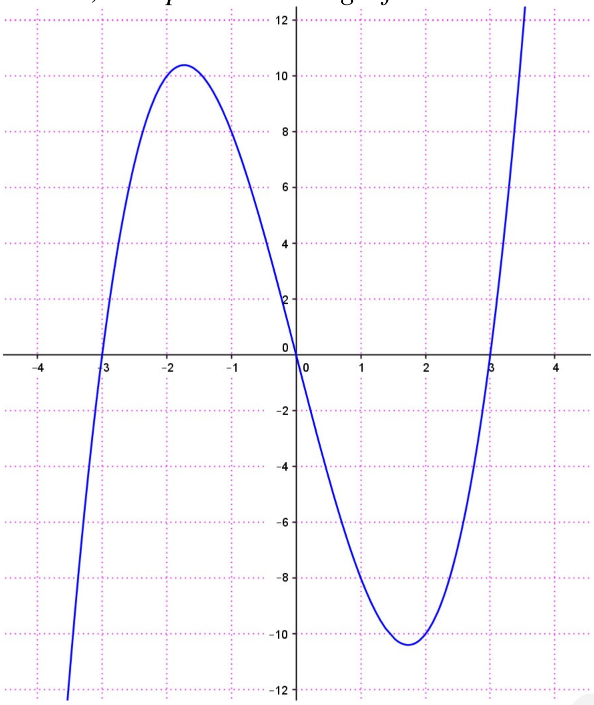
Monotonía: creciente en $\left(-\infty, -\sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$.

Extremos: $x = -\sqrt{3} \rightarrow y = \left(-\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(-\sqrt{3}\right) = -3\sqrt{3} + 9\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

$x = \sqrt{3} \rightarrow y = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\,.\left(\sqrt{3}\right) = 3\sqrt{3} - 9\sqrt{3} = -6\sqrt{3}$

luego, en $\left(-\sqrt{3}\,,6\sqrt{3}\right)\approx(-1'73\,,10'39)$ hay un máximo relativo y en $\left(\sqrt{3}\,,-6\sqrt{3}\right)\approx(1'73\,,-10'39)$ hay un mínimo relativo.

Con esta información, la representación gráfica será:



c) *Área entre* $y = x^3$, $y = a\,x$ ($a > 1$), *en* 1^er^ *cuadrante.*

Calculemos los puntos de corte entre las dos curvas:

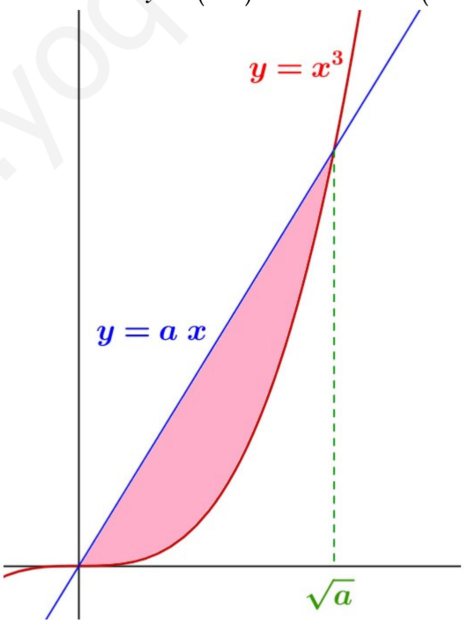
$x^3 = a\,x$, *resuelta en el apartado a)* "$x^3 - a\,x = 0$", *las soluciones:* $x = -\sqrt{a}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$

Como el área a calcular es en el 1^er^ *cuadrante, las soluciones que nos interesan son* $x = 0$ y $x = \sqrt{a}$.

Los puntos de corte serán: $x = 0 \;\rightarrow\; y = 0^3 = 0 \;\rightarrow\; (\,0\,,0\,)$

$$x=\sqrt{a} \;\rightarrow\; y=\left(\sqrt{a}\right)^3 = a\sqrt{a} \;\rightarrow\left(\sqrt{a}\,,a\sqrt{a}\right)$$

La representación gráfica es:



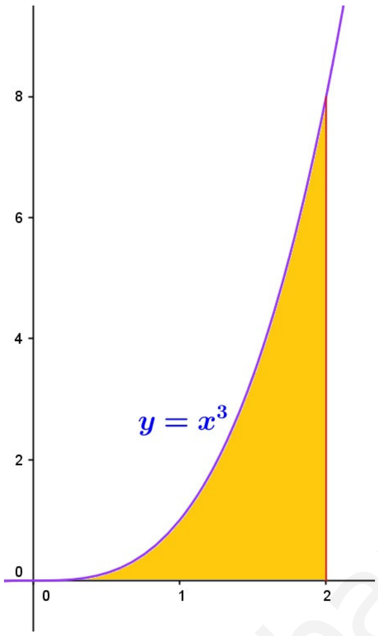
El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^{\sqrt{a}}\left(a\,x-x^3\right)dx=\left[a\,\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{a}}=\left(a\,\frac{\left(\sqrt{a}\right)^2}{2}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^4}{4}\right)-0=a\,\frac{a}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{4}$$

Finalmente, ***el área de la región pedida es*** $\dfrac{a^2}{4}$ *u.a.*

d) Área entre $y = x^3$, eje OX, $x = 0$ y $x = 2$.

La representación gráfica del área a calcular es:



El área pedida la obtenemos mediante la siguiente integral definida,

$$\int_0^2 x^3\ dx == \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4$$

Por tanto, $\frac{a^2}{4} = 4 \quad \rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \rightarrow \quad (como\ a > 0) \quad a = 4$

Finalmente, ***el valor del parámetro a buscado es a = 4.***

PROBLEMA 3. Se da la función real f definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) La integral $\int f(x)\,dx$, así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2 , 0). *(3+1 puntos)*

c) El área de la región limitada por la curva *y = f(x)* y las rectas *y* = 0, *x* = 2, *x* = 4. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}$

Dom f(x),

$$x^2\,(x-1)=0\left\langle\begin{array}{l} x^2=0\rightarrow x=0\\ x-1=0\rightarrow x=1\end{array}\right. \qquad \rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{1}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{2}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=1 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^3-x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\}\ \rightarrow\ y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$, ***las asíntotas verticales son x = 0 y x = 1 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x^2+1}{x^2\,(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2}{x^2\,(x-1)} \quad\rightarrow\quad x^2+1=A\,x\,(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2$$

$$x=0\rightarrow 0^2+1=A\cdot 0\,(0-1)+B\,(0-1)+C\cdot 0^2 \quad\rightarrow\quad 1=-B \quad\rightarrow\quad B=-1$$

$$x=1\rightarrow 2=C \quad\rightarrow\quad C=2$$

$$x=2\rightarrow 2^2+1=A\cdot 2\,(2-1)+B\,(2-1)+C\cdot 2^2 \quad\rightarrow\quad 5=2A+B+4C \quad\rightarrow\quad 5=2A-1+4\cdot 2$$

$$5=2A+7;\quad -2=2A;\quad A=-1$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x-1} \right) dx = \int \frac{-1}{x}\,dx + \int \frac{-1}{x^2}\,dx + \int \frac{2}{x-1}\,dx = (*)$$

$$\int \frac{-1}{x^2}\,dx = \int -x^{-2}dx = -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x}$$

$$(*) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

$$Luego\ ,\ \int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\,Ln|x-1| + C$$

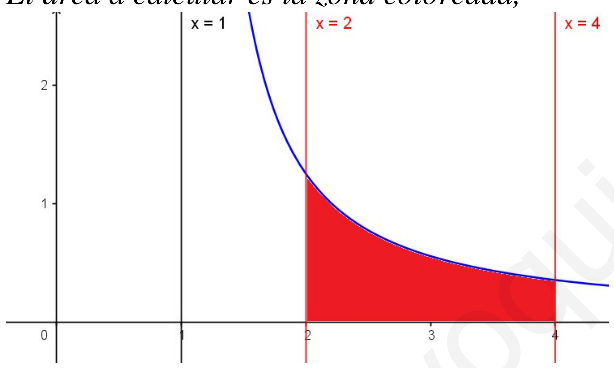
La primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) será,

Para $x = 2,\ \ -Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1| + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\,Ln\,1 + C = 0;\quad -Ln\,2 + \frac{1}{2} + 2\cdot 0 + C = 0$

$$-Ln\,2 + \frac{1}{2} + C = 0;\quad C = -\frac{1}{2} + Ln\,2$$

Finalmente, ***la primitiva de f(x) cuya gráfica pase por (2, 0) es*** $F(x) = -Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1| - \frac{1}{2} + Ln\,2$

c) El área de la región limitada por la curva $y = f(x)$ *y las rectas* $y = 0,\ x = 2,\ x = 4$.
El área a calcular la dibujamos considerando las asíntotas de la función obtenidas en el apartado a) y que para $x \ge 2$*, tanto el numerado como el denominador de* $f(x)$ *son positivos,* $f(x)$ *es positiva.*
El área a calcular es la zona coloreada,



Esta área la calculamos mediante la siguiente integral:

$$\int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx = \left[-Ln|x| + \frac{1}{x} + 2Ln|x-1| \right]_2^4 = \left(-Ln|4| + \frac{1}{4} + 2Ln|4-1| \right) - \left(-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2Ln|2-1| \right) =$$

$$= -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2Ln\,1 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} + 2\cdot 0 = -Ln\,4 + \frac{1}{4} + 2Ln\,3 + Ln\,2 - \frac{1}{2} =$$

$$= 2Ln\,3 + Ln\,2 - Ln\,4 + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = Ln\,3^2 + Ln\,2 - Ln\,4 - \frac{1}{4} = Ln\frac{9\cdot 2}{4} - \frac{1}{4} = Ln\frac{9}{2} - \frac{1}{4} \cong 1'25407739\ u.a.$$

El área de la región pedida es 1´25407739 u.a.

PROBLEMA 3. Se considera la función $f(x) = x\, e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos. *(4 puntos)*

b) Las asíntotas y la gráfica de *f*. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\, dx$. *(3 puntos)*

Solución:

a) $f(x) = x\, e^{1-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$.

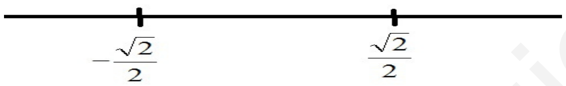
Monotonía.

$$f'(x) = e^{1-x^2} + x\, e^{1-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

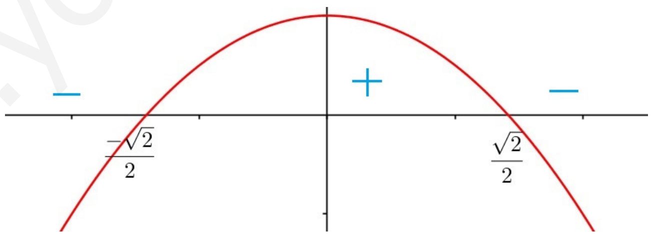
Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; e^{1-x^2}\left(1-2x^2\right)=0 \;\begin{cases} e^{1-x^2}=0 & \text{sin } \textit{solución} \\ \left(1-2x^2\right)=0 \rightarrow 2x^2=1 \rightarrow x^2=\frac{1}{2} \rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:



En f´(x) el factor e^{1-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2e}}{2} \rightarrow \textit{Máximo relativo } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2e}}{2}\right) \cong (0'7071, 1'1658)$$

$$x=\frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{1-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{-\sqrt{2}}{2}e^{\frac{1}{2}}=\frac{-\sqrt{2e}}{2} \rightarrow \textit{Mínimo relativo } \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2e}}{2}\right) \cong (-0'7071, -1'1658)$$

b) Asíntotas y gráfica de y = f(x)

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(aplicando\ L´Hopital)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{1-x^2}\right)=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2-1}}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=(aplicando\ L´Hopital)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2\,x\,e^{x^2-1}}\right)=\frac{1}{\infty}=0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Asíntota oblícua.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\,e^{1-x^2}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^{1-x^2}\right)=e^{-\infty}=0$$

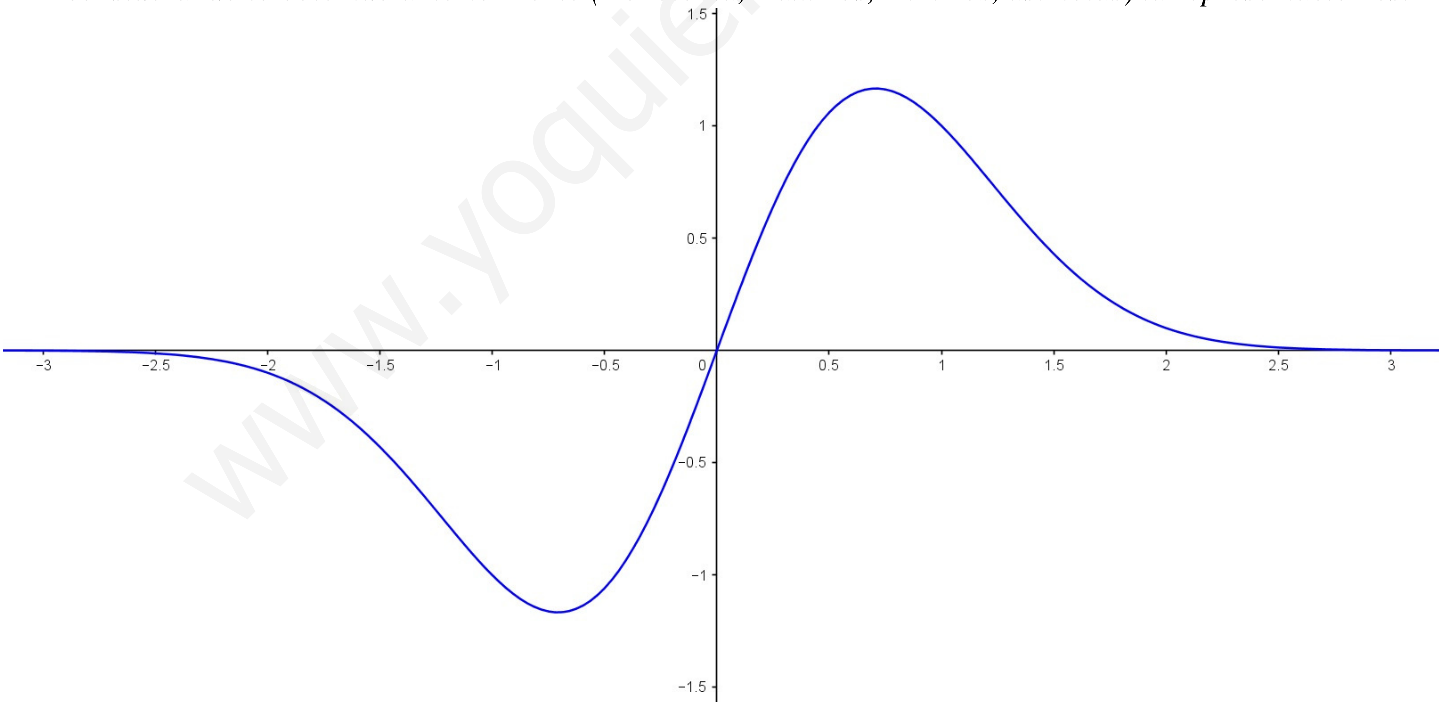
Por lo que no tiene ***asíntota oblícua.***

Representación gráfica.

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad\to\quad y=0\cdot e^{1-0^2}=0 \\ y=0 \quad\to\quad x\cdot e^{1-x^2}=0 \quad\to\left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ e^{1-x^2}=0 \quad \text{sin } solución\end{array}\right.\end{array}\right\}\quad pto.\,corte\quad (0,0)$$

Y considerando lo obtenido anteriormente (monotonía, máximos, mínimos, asíntotas) la representación es:



c)

$$\int f(x)\,dx = \int x\,e^{1-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} t = 1 - x^2 \\ dt = -2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2} = x\,dx \end{array}\right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}\,e^t + C = \frac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$$

Luego $\int f(x)\,dx = \dfrac{-1}{2}\,e^{1-x^2} + C$

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$.

a) Comprobar que $x = -\dfrac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. *(2 puntos)*

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(4 puntos)*

c) Obtener $\int f(x)\,dx.$ *(4 puntos)*

Solución:

a)

$$x = -\frac{1}{2} \quad \text{es discontinuidad evitable de f(x) si} \quad \begin{cases} a)\ \text{No existe} \quad f\left(\dfrac{-1}{2}\right) \quad y \\ b)\ \text{Existe} \quad \lim\limits_{x \to -1/2} f(x) \end{cases}$$

$$a)\ f\left(-1/2\right) = \frac{-2\left(-1/2\right)^2 + \left(-1/2\right) + 1}{2\left(-1/2\right)^2 + 5\left(-1/2\right) + 2} = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 1}{\frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 2} = \frac{0}{0} \quad \to \quad \text{No existe } f\left(-1/2\right)$$

El cálculo realizado anteriormente indica que $\dfrac{-1}{2}$ *es raíz del numerador y denominador, por lo que podremos simplificar la expresión de f(x).*

$$-2x^2 + x + 1 = 0 \to x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)} = \frac{-1 \pm 3}{-4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-1+3}{-4} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-1-3}{-4} = 1 \end{cases} \to -2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)$$

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \to x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 3}{4} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-5+3}{4} = \dfrac{-1}{2} \\ x_2 = \dfrac{-5-3}{4} = -2 \end{cases} \to -2x^2 + x + 1 = -2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)$$

$$\text{Entonces} \quad f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x-1)}{-2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x+2)} = \frac{-(x-1)}{x+2} = \frac{-x+1}{x+2}$$

$$b)\ \lim_{x \to -1/2} f(x) = \lim_{x \to -1/2} \frac{-x+1}{x+2} = \frac{-\left(-1/2\right) + 1}{-1/2 + 2} = \frac{3/2}{3/2} = 1 \quad \to \quad \text{Existe } \lim_{x \to -1/2} f(x)$$

Hemos comprobado las dos condiciones por tanto f(x) tiene una discontinuidad evitable en x = $-1/2$.

b) Monotonía de f(x).

En el apartado anterior hemos obtenido las raíces del denominador de f(x). Por tanto sabemos que Dom f(x) = $\Re - \left\{-2, \dfrac{-1}{2}\right\}$.

También hemos simplificado la expresión de f(x) que será la que utilicemos para obtener f´(x).

$f(x)=\dfrac{-x+1}{x+2}$, $\quad f'(x)=\dfrac{-1\,(x+2)-(-x+1)\,1}{(x+2)^2}=\dfrac{-x-2+x-1}{(x+2)^2}=\dfrac{-3}{(x+2)^2}$

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un número negativo. Por tanto f´(x) es negativa en su dominio.

f(x) es decreciente en $\Re-\left\{-2,\dfrac{-1}{2}\right\}$.

c) $\int f(x)\,dx$

Para el cáculo de la integral utilizamos la expresión simplificada de $f(x)=\dfrac{-x+1}{x+2}$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{-x+1}{x+2}=\frac{-x-2+2+1}{x+2}=\frac{-x-2}{x+2}+\frac{3}{x+2}=-1+\frac{3}{x+2}$$

Luego, $\displaystyle\int\frac{-x+1}{x+2}dx=\int\left(-1+\frac{3}{x+2}\right)dx=\int(-1)\,dx+\int\frac{3}{x+2}dx=-x+3\,Ln|x+2|+C$

Finalmente, $\displaystyle\int f(x)\,dx=-x+3\,Ln|x+2|+C$

Problema 5. Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4}$.

$h'(x) = a + 2x$; $a + 2x = 0$; $2x = -a$; $x = \frac{-a}{2}$.

$h''(x) = 2 \rightarrow h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow$ en $x = \frac{-a}{2}$ hay un mínimo relativo.

Por tanto, $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \rightarrow -a = \frac{-6}{4} \rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ dibujar las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

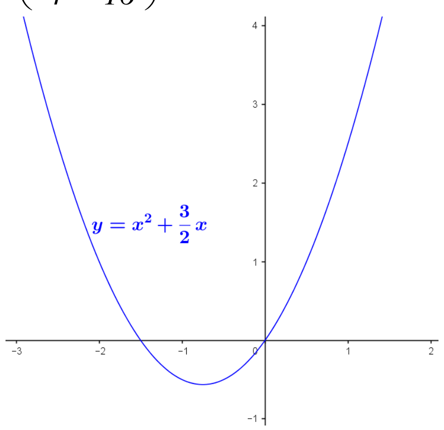
Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0;\ x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{cases}$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4} \rightarrow y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

Mínimo relativo $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



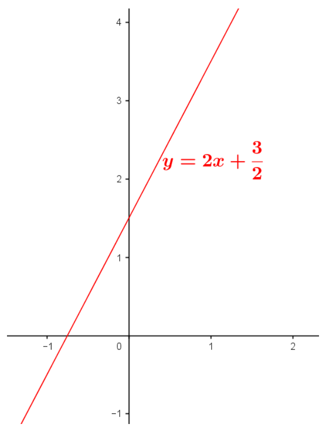
$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$x = 0 \rightarrow y = 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

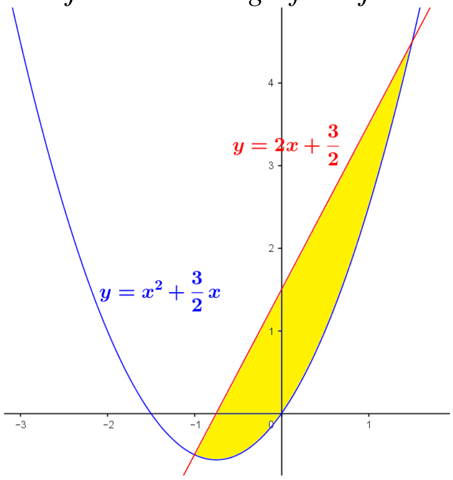
$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0;\ 2x = \frac{-3}{2};\ x = \frac{-3}{4}$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \\ x_2 = \dfrac{1-5}{4} = -1 \end{array} \right.$$

El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48}$ *u.a.* $\cong$ *2´6042 u.a.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos)*.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos)*.

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos)*.

Solución:

a)

Como la función g(x) esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de g(x).

$y = x^2 - 4$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0, -4)$

eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

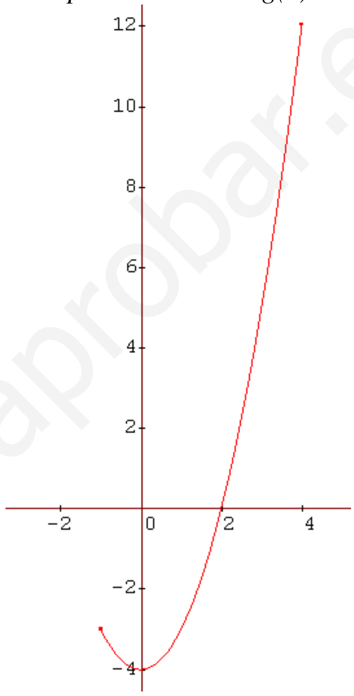
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad (0, -4)$$

Calculemos el inicio y fin de g(x)

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$

La representación de g(x) será:



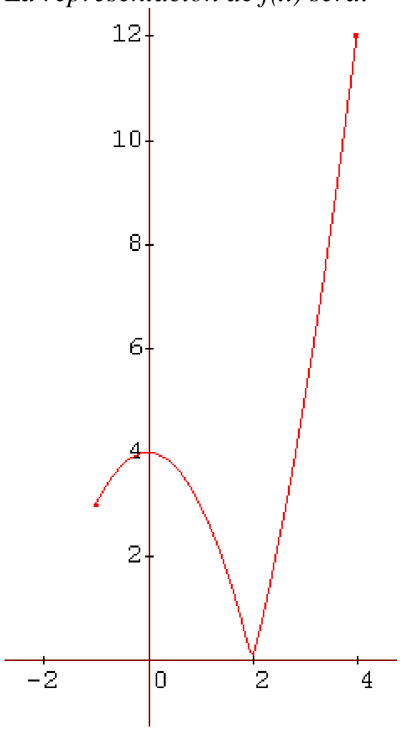
b)

$f(x) = |x^2 - 4|$ *en el intervalo [-1, 4]*

Por su definición $f(x) = |g(x)|$

Por lo que podemos dibujar la función f(x) a partir de la representación de g(x) trazando la parte negativa de g(x) simétrica respecto del eje OX.

La representación de f(x) será:



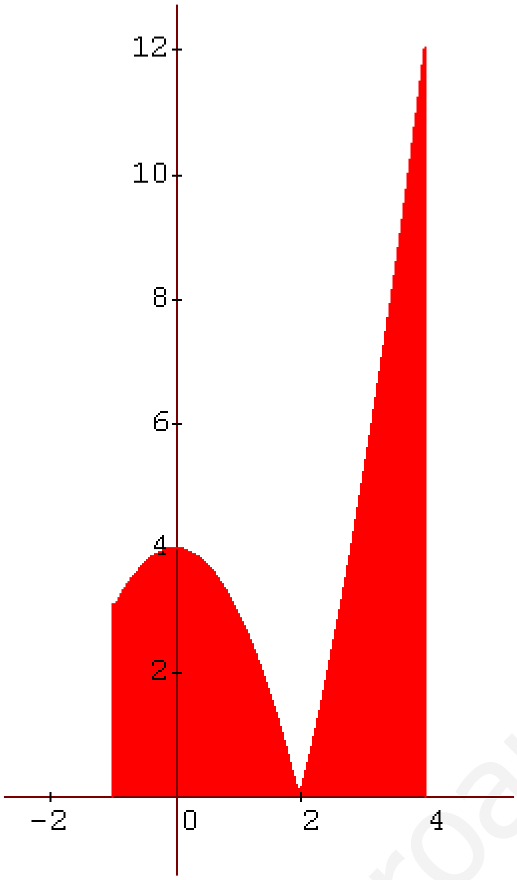
Los valores máximo y mínimo absoluto de f(x) podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

el máximo absoluto se alcanza en el punto (4, 12)

el mínimo absoluto se alcanza en el punto (2, 0) *c)*

La definición de f(x) es $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & , \quad -1\le x<2 \\ x^2-4 & , \quad 2\le x\le 4 \end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=\frac{47}{3}+4=\frac{47+12}{3}=\frac{59}{3}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ *u. a.*

PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx=\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2-3x+2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{3+1}{2}=2\\ \frac{3-1}{2}=1\end{cases}$$

Por lo que $Dom\ f(x)=\Re-\{1,2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = 2.

x = 1

$$\lim_{x\to1}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1^2-3\,.\,1+2}=\frac{1}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=1\ es\ a.v.$$

x = 2

$$\lim_{x\to2}\frac{x}{x^2-3x+2}=\frac{2}{2^2-3\,.\,2+2}=\frac{2}{0}=\infty \quad\Rightarrow\quad x=2\ es\ a.v.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{-\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-3x+2}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{+\infty}=0$$

Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,

La asíntota oblicua será la recta de ecuación y = m x + n; calculando los coeficientes m y n

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2-3x+2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3-3x^2+2x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

Como m = 0, no hay asíntota oblicua.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x),

Estudiemos el signo de y´,

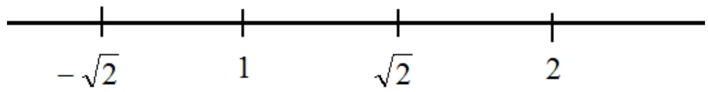
$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

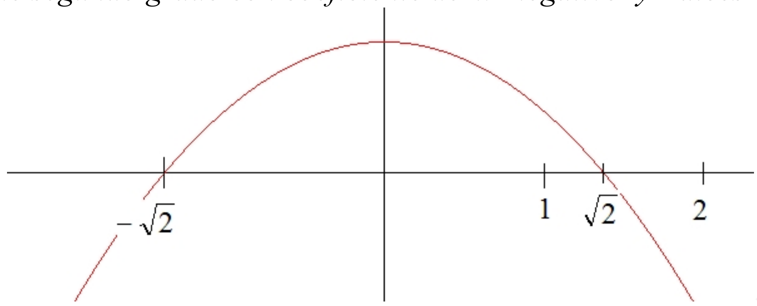
$-x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad$ (*resuelta en el apartado a*)) $\quad x=1,2$

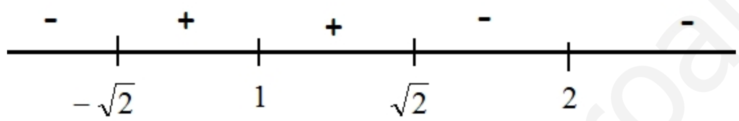
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y´ está elevado al cuadrado, el signo de y´ sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{2}$, es decir:



Por lo que el signo de y´ será:



Finalmente f(x) es creciente en $\left(-\sqrt{2}\,,1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty\,,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}\,,2\right)\cup\left(2\,,+\infty\right)$.

c) Cálculo de la integral,

El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, x = A (x – 2) + B (x – 1), calculemos los valores de A y B:

para x = 1 → 1 = – A + 0 → A = – 1

para x = 2 → 2 = 0 + B . 1 → B = 2

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{-1}{x-1}\,dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\,|x-1| + 2\,Ln\,|x-2| + C$$

PROBLEMA A.3. Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$ se pide obtener, **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*, *(4 puntos)*
c) El área limitada por la curva y = f(x), el eje de abcisas y las rectas x = 2 y x = 3. *(4 puntos)*

Solución:
a) Dominio de f(x)

$$x^2-x=0 \;\rightarrow\; x(x-1)=0 \;\rightarrow\; \left\langle\begin{matrix} x=0 \\ x-1=0 \;\rightarrow\; x=1\end{matrix}\right\} \;\rightarrow\; Dom\ f(x)=\Re-\{0,1\}$$

Asíntota vertical,
Posibles A.V. x = 0 y x = 1

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=0 \quad es\ A.V.$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=1 \quad es\ A.V.$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{\infty}=0 \;\rightarrow\; y=0 \quad es\ la\ asíntota\ horizontal.$$

Asíntota oblicua,
Como la función es un cociente de polinomios y
grad (numerador) – grad (denominador) = 1 – 2 = – 1 ≠ 1
la función no tiene asíntota oblicua

Finalmente, ***Dom f(x) = ℜ ~{0, 1} y***
sus asíntotas son x = 0, x = 1 (asíntotas verticales) e y = 0 (asíntota horizontal).

b) Monotonía de f(x).
Estudiemos el signo de f´(x), sabemos que Dom f(x) = ℜ ~{ 0, 1 }.

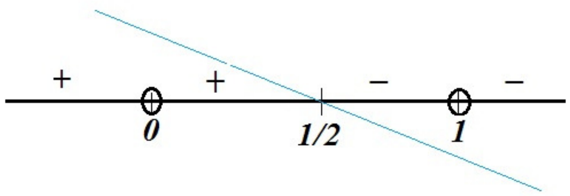
$$f'(x)=\frac{-1(2x-1)}{(x^2-x)^2}=\frac{-2x+1}{(x^2-x)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador:

$$-2x+1=0 \;\rightarrow\; 1=2x \;\rightarrow\; x=\frac{1}{2}$$

$$(x^2-x)^2=0 \;\rightarrow\; x^2-x=0 \quad (resuelta\ en\ a)) \left\langle\begin{matrix} x=0 \\ x=1\end{matrix}\right.$$

f´(x) es un cociente y su denominador está elevado al cuadrado, por tanto positivo, luego el signo de f´(x) sólo depende del numerador. El numerador es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz 1/2, por tanto:

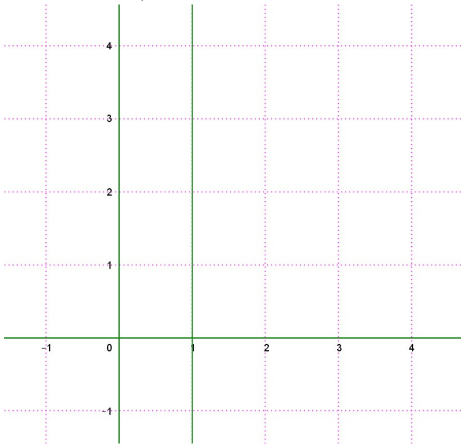


Por tanto, ***f(x) es creciente en (– ∞, 0) ∪ (0 , ½) y decreciente en (½ , 1) ∪ (1 , + ∞).***

c) El área limitada por la curva $y = f(x)$, el eje de abcisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$

De lo estudiado en los apartados anteriores podemos intentar representar la función $f(x)$,

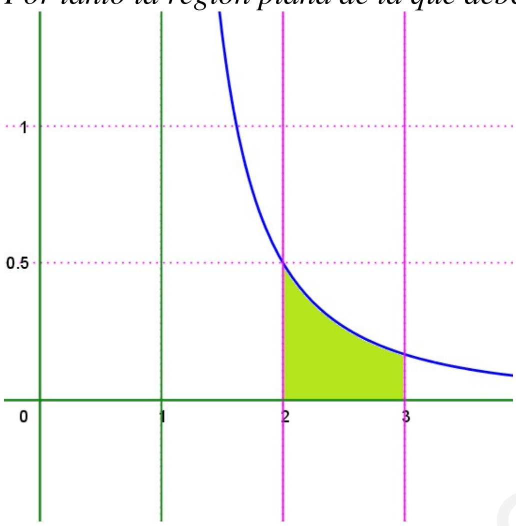
Conocemos sus asíntotas y su monotonía,



Como el área a calcular está limitada por las rectas $x = 2$ y $x = 3$; la función es decreciente para $x > 1$ para representar el área basta con calcular la un par de valores de la función, por ejemplo:

x	$f(x)$
2	$\frac{1}{2^2-2}=\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3^2-3}=\frac{1}{6}$

Por tanto la región plana de la que debemos calcular su área es:



El área de esta región la obtenemos mediante la siguiente integral definida: $\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx$

Calculemos la integral indefinida,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx$$

Es una integral racional,

$$\frac{1}{x^2-x}=\frac{1}{x(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{A(x-1)+Bx}{x(x-1)}=\frac{A(x-1)+Bx}{x^2-x}$$

Luego $1 = A\,(x-1) + B\,x$

para $x = 0 \rightarrow 1 = A\,(0-1) + B\,.\,0 \rightarrow 1 = -A \rightarrow A = -1$

para $x = 1 \rightarrow 1 = A\,(1-1) + B\,.\,1 \rightarrow 1 = B \rightarrow B = 1$

Como la integral indefinida es para calcular la integral definida, no usamos la constante de integración,

$$\int \frac{1}{x^2-x}dx=\int\frac{-1}{x}dx+\int\frac{1}{x-1}dx=-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|$$

Luego,

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-x}dx=\left[-Ln\,|x|+Ln\,|x-1|\right]_2^3=\left(-Ln\,|3|+Ln\,|3-1|\right)-\left(-Ln\,|2|+Ln\,|2-1|\right)=$$

$$=\left(-Ln\,3+Ln\,2\right)-\left(-Ln\,2+Ln\,1\right)=-Ln\,3+Ln\,2+Ln\,2-Ln\,1=2Ln\,2-Ln\,3-0=$$

$$=2Ln\,2-Ln\,3\approx 0\acute{}2877$$

Solución: el valor del área pedida es $\left(2Ln\,2-Ln\,3\right)u^2 \approx$ ***0´2877 u^2.***

PROBLEMA A.3. Se considera la función $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las asíntotas, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como los máximos y mínimos relativos de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) La representación gráfica de la curva de la curva *y = f(x)*, *(2 puntos)*

c) El valor del parámetro *a* para que se pueda aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [0,1] a la función *g(x) = f(x) + a x*. *(4 puntos)*

d) El valor de las integrales indefinidas $\int f(x)\,dx$, $\int x\,e^{-x}dx$. *(1 punto)*

Solución:

a) $f(x) = x\,e^{-x^2}$

Dom f(x) = $\Re$*, por tanto no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\text{aplicando L´Hopital}) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x\,e^{-x^2}\right) = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^{x^2}}\right) = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = (\text{aplicando L´Hopital}) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2x\,e^{x^2}}\right) = \frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo que la ***asíntota horizontal es y = 0.***

Monotonía.

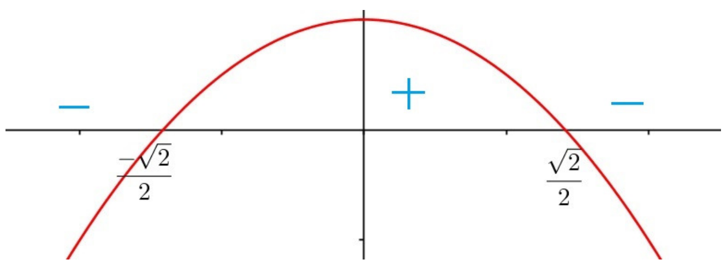
$$f'(x) = e^{-x^2} + x\,e^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}\left(1-2x^2\right)$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$$f'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad e^{-x^2}\left(1-2x^2\right) = 0 \quad \begin{cases} e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } solución \\ \left(1-2x^2\right) = 0 \rightarrow 2x^2 = 1 \rightarrow x^2 = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los intervalos:

En f´(x) el factor e^{-x^2} *es siempre positivo y el factor* $\left(1-2x^2\right)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces las obtenidas, por tanto:*



Luego, ***f(x) es creciente en*** $\left(\dfrac{-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(-\infty, \dfrac{-\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Del estudio de la monotonía de f(x) deducimos que hay un máximo relativo en $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *y un mínimo relativo en* $x = \dfrac{-\sqrt{2}}{2}$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad \rightarrow \quad \textit{Máximo relativo} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (0´71, 0´43)$$

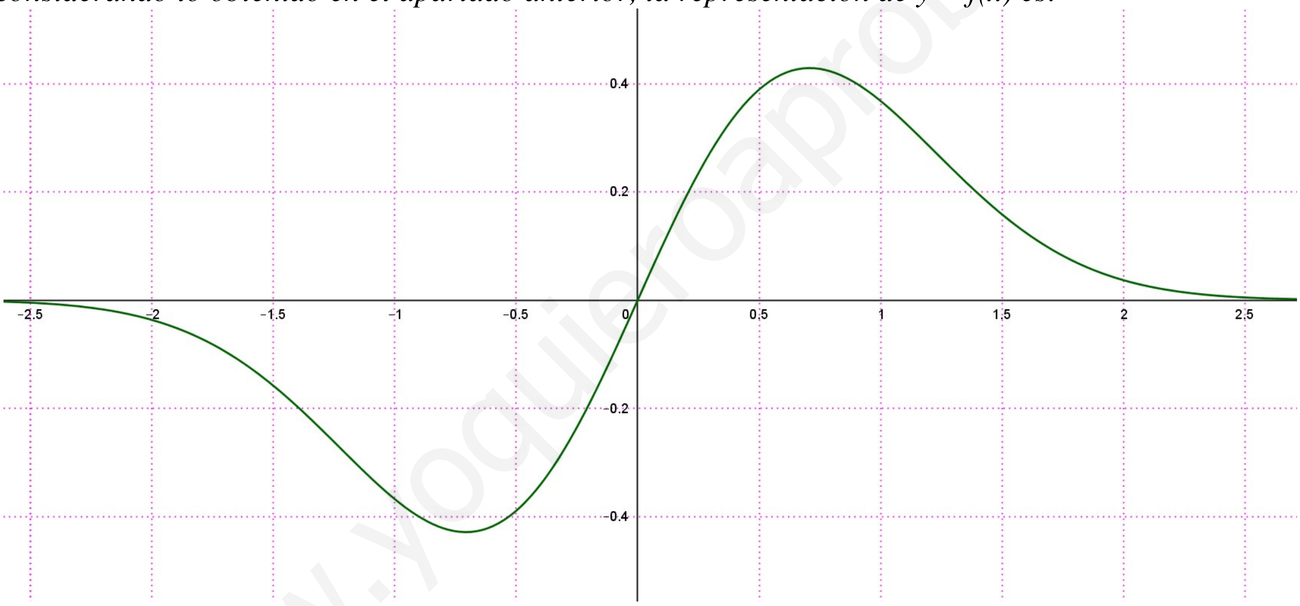
$$x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \quad \rightarrow \quad f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} e^{-\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}} \quad \rightarrow \quad \textit{Mínimo relativo} \quad \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{e}}\right) \cong (-0´71, -0´43)$$

b) Representación gráfica de y = f(x)

Obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados,

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \quad \rightarrow \quad y = 0 \cdot e^{-0^2} = 0 \\ y = 0 \quad \rightarrow \quad x \cdot e^{-x^2} = 0 \quad \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ e^{-x^2} = 0 \quad \text{sin } \textit{solución} \end{array} \right. \end{array}\right\} \quad \textit{pto. corte} \quad (0{,}0)$$

Y considerando lo obtenido en el apartado anterior, la representación de y = f(x) es:



c) ¿a? / g(x) = f(x) + a x cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1]

$$g(x) = x\, e^{-x^2} + a\, x$$

El teorema de Rolle dice:

Si f(x) es continua en [a, b], f(x) derivable en (a, b) y f(a) = f(b) entonces $\exists c \in (a, b) / f´(c) = 0$

Por definición, g(x) es continua y derivable en $\Re$*, entonces:*

g(x) es continua en [0, 1]

g(x) es derivable en (0, 1)

hay que comprobar que g(0) = g(1)

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 0 \\ g(1) = \dfrac{1}{e} + a \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{1}{e} + a \quad \rightarrow \quad a = \frac{-1}{e}$$

Para que g(x) cumpla el teorema de Rolle en el intervalo [0, 1] debe ser $a = \dfrac{-1}{e}$.

d)

$$1)\ \int f(x)\,dx = \int x\,e^{-x^2}dx = \left\{\begin{array}{l} t=-x^2 \\ dt=-2x\,dx \rightarrow \dfrac{dt}{-2}=x\,dx \end{array}\right\} = \int e^t\,\frac{dt}{-2} = \frac{-1}{2}\int e^t dt =$$

$$= \frac{-1}{2}e^t + C = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$Luego\quad \int f(x)\,dx = \frac{-1}{2}e^{-x^2} + C$$

$$2)\ \int x\,e^{-x}dx = \left\{\begin{array}{l} u=x \rightarrow du=dx \\ dv=e^{-x}dx \rightarrow v=-e^{-x} \end{array}\right\} = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + C = -e^{-x}(x+1)+C$$

$$Luego\quad \int x\,e^{-x}dx = -e^{-x}(x+1)+C$$

Problema 3. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$. Obtened:

a) El dominio y las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)*. *(4 puntos)*
c) La integral $\int f(x)\,dx$. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+2)}$

Dom f(x),

$$x(x+2)=0\left\langle\begin{array}{l}x=0\\ x+2=0\rightarrow x=-2\end{array}\right.\qquad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$$

Asíntotas,

verticales,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{-3}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=-2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{-1}{0}=\infty\quad\rightarrow\quad x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{x^2+2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x(x+2)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x^2+2x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\infty}=0\end{array}\right\}\rightarrow\quad y=0 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, $Dom\ f(x)=\Re-\{-2,0\}$, ***las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 0 y la asíntota horizontal es y = 0.***

b) *¿Monotonía de f(x)?*

Para estudiar la monotonía de esta función, usaremos la siguiente expresión de ella:

$$f(x)=\frac{x-1}{x(x+2)}\quad\rightarrow\quad y=\frac{x-1}{x(x+2)}=\frac{x-1}{x^2+2x}$$

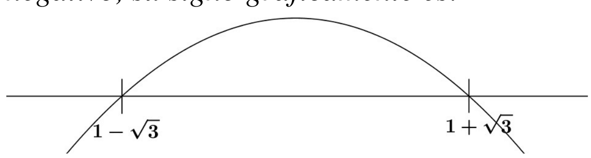
Debemos estudiar el signo de y´ en su dominio.

$$y'=\frac{1(x^2+2x)-(x-1)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-(2x^2+2x-2x-2)}{(x^2+2x)^2}=\frac{x^2+2x-2x^2+2}{(x^2+2x)^2}=\frac{-x^2+2x+2}{(x^2+2x)^2}$$

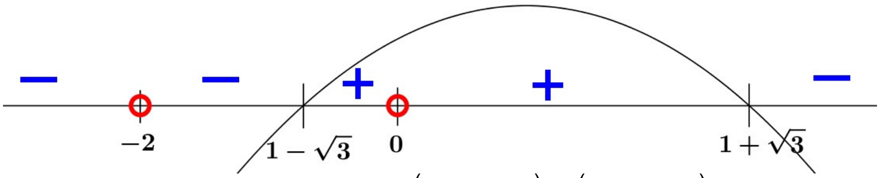
Como el denominador está elevado al cuadrado será positivo, luego el signo de y´ sólo depende del numerador. Obtengamos las raíces del numerador:

$$-x^2+2x+2=0\quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-2\pm\sqrt{12}}{-2}=\frac{-2\pm2\sqrt{3}}{-2}=1\pm\sqrt{3}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=1-\sqrt{3}\approx-0'7321\\ x_2=1+\sqrt{3}\approx 2'7321\end{array}\right.$$

Como $-x^2+2x+2$ *es un polinomio de segundo grado con las raíces obtenidas y coeficiente de* x^2 *negativo, su signo gráficamente es:*



Añadiendo los valores que no son del dominio de f(x):



Por tanto, ***f(x) es creciente en*** $\left(1-\sqrt{3},0\right)\cup\left(0,1+\sqrt{3}\right)$ ***y***

decreciente en $\left(-\infty,-2\right)\cup\left(-2,1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3},+\infty\right)$.

c) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\,(x+2)}\,dx$

Es una integral racional,

$$\frac{x-1}{x\,(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}=\frac{A\,(x+2)+B\,x}{x\,(x+2)}\quad\rightarrow\quad x-1=A\,(x+2)+B\,x$$

$$x=-2\rightarrow\ -2-1=A\,(-2+2)+B\,(-2)\quad\rightarrow\quad -3=-2B\quad\rightarrow\quad B=\frac{3}{2}$$

$$x=0\rightarrow\quad 0-1=A\,(0+2)+B\cdot 0\quad\rightarrow\quad -1=2A\quad\rightarrow\quad A=\frac{-1}{2}$$

Entonces,

$$\int\frac{x-1}{x\,(x+2)}\,dx=\int\left(\frac{-1/2}{x}+\frac{3/2}{x+2}\right)dx=\int\frac{-1/2}{x}\,dx+\int\frac{3/2}{x+2}\,dx=$$

$$=\frac{-1}{2}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x+2|+C$$

Solución: $\displaystyle\int\frac{x-1}{x\,(x+2)}\,dx=\frac{-1}{2}Ln|x|+\frac{3}{2}Ln|x+2|+C$

Problema 5. Consideremos la función $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$. Obtener:

a) El dominio y los puntos de corte con los ejes. *(1 punto)*
b) Las asíntotas de la función. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos. *(3 puntos)*
d) La integral de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

Dom f(x),

$$x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2 \quad\rightarrow\quad Dom\ f(x)=\Re-\{-2,2\}$$

Puntos de corte con

$$eje\ OY,\quad x=0 \quad\rightarrow\quad f(0)=\frac{0^2+3}{0^2-4}=\frac{-3}{4} \quad\rightarrow\quad \left(0,\frac{-3}{4}\right)$$

$$eje\ OX,\quad f(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{x^2+3}{x^2-4}=0;\quad x^2+3=0;\quad x^2=-3,$$ *sin solución. f(x) no corta al eje OX.*

El dominio de f(x) es $\Re-\{-2,2\}$ ***y sólo corta al eje OY en el punto*** $\left(0,\dfrac{-3}{4}\right)$**.**

b) Asíntotas.

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2,

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{(-2)^2+3}{(-2)^2-4}=\frac{7}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=-2 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\frac{2^2+3}{2^2-4}=\frac{7}{0}=\infty \quad\rightarrow\quad x=2 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+3}{x^2-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1\end{array}\right\}\quad\rightarrow\quad y=1 \text{ es la asíntota horizontal.}$$

Oblicua, como la función es un cociente de dos polinomios al tener a. horizontal no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas verticales son x = – 2 y x = 2 y la asíntota horizontal es y = 1.

c) Monotonía y extremos.

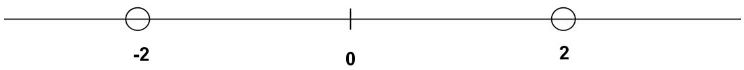
$$f(x)=\frac{x^2+3}{x^2-4},\qquad f'(x)=\frac{2x\left(x^2-4\right)-\left(x^2+3\right)2x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{2x^3-8x-2x^3-6x}{\left(x^2-4\right)^2}=\frac{-14x}{\left(x^2-4\right)^2}$$

Estudiemos el signo de f´(x). Obtengamos las raíces del numerador y denominador de f´(x).

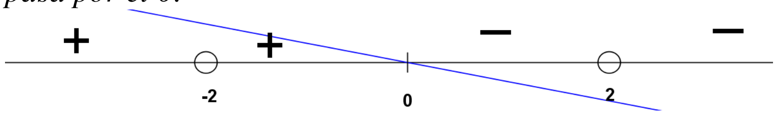
$-14x=0;\quad x=0$

$$\left(x^2-4\right)^2=0;\quad x^2-4=0;\quad x^2=4;\quad x=\pm\sqrt{4}=\pm 2$$

Considerando el dominio de f(x) = $\Re - \{-2, 2\}$, *debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,*



Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado es positivo, por tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es un polinomio de primera grado (una línea recta) con coeficiente de x negativo que pasa por el 0:



Luego, ***f(x) es creciente en*** $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ ***y es decreciente en*** $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

El único extremo de la función está en $x = 0$ *y como la función pasa de creciente a decreciente es un máximo relativo.*

La función f(x) sólo tiene un máximo relativo en $\left(0, \frac{-3}{4}\right)$.

d) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx$

Como los dos polinomios son del mismo grado efectuamos la división,

$$\frac{x^2+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4+4+3}{x^2-4} = \frac{x^2-4}{x^2-4} + \frac{7}{x^2-4} = 1 + \frac{7}{x^2-4}$$

Luego, $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = \int\left(1+\frac{7}{x^2-4}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx = x + \int \frac{7}{x^2-4}\,dx$

La integral pendiente es una integral racional,

$$\frac{7}{x^2-4} = \frac{7}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A\,(x+2)+B\,(x-2)}{(x-2)(x+2)} \quad \to \quad 7 = A\,(x+2)+B\,(x-2)$$

$$x=-2 \quad \to \quad 7 = A\,(-2+2)+B\,(-2-2) \quad \to \quad 7=-4B \quad \to \quad B = \frac{-7}{4}$$

$$x=2 \quad \to \quad 7 = A\,(2+2)+B\,(2-2) \quad \to \quad 7=4A \quad \to \quad A = \frac{7}{4}$$

Entonces,

$$\int \frac{7}{x^2-4}\,dx = \int\left(\frac{7/4}{x-2} + \frac{-7/4}{x+2}\right)dx = \int \frac{7/4}{x-2}\,dx + \int \frac{-7/4}{x+2}\,dx = \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2|$$

Finalmente, $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^2-4}\,dx = x + \frac{7}{4}\,Ln|x-2| - \frac{7}{4}\,Ln|x+2| + C$

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(2 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(4 puntos)*

c) El área comprendida entre la curva *y=f(x)* y las rectas *y=0, x=1* y *x=2*. *(4 puntos)*

Solución:

a) $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$

Dom f(x),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} \;\rightarrow\; x\neq 0 \\ \ln(x+1) \;\rightarrow\; x+1>0 \;\rightarrow\; x>-1 \end{array}\right\} \rightarrow \; Dom\ f(x)=(-1,0)\cup(0,+\infty)$$

Asíntotas,

Verticales. Las posibles asíntotas verticales son x = – 1 y x = 0,

$$\lim_{x\to -1}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{-1}+\ln(0)=-1+\infty=\infty \;\rightarrow\; x=-1 \text{ es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{0}+\ln(1)=\infty+0=\infty \;\rightarrow\; x=0 \text{ es asíntota vertical.}$$

Horizontales,

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x}+\ln(x+1)\right)=\frac{1}{+\infty}+\ln(+\infty)=0+(+\infty)=+\infty \;\rightarrow\; \text{no hay asíntota horizontal.}$$

Oblicua,

$y = m\,x + n$

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(x+1)}{x}\right)=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=\frac{1}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{*}{=}0\end{cases} \;\rightarrow\; m=0$$

* *{como x es un infinito de orden superior a ln(x+1)}*

No hay asíntota oblicua por ser m = 0.

El dominio de f(x) es $(-1,0)\cup(0,+\infty)$ ***y sus asíntotas son x = – 1 y x = 0.***

b) Monotonía y extremos.

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1),\qquad f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}=\frac{-x-1+x^2}{x^2(x+1)}=\frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}$$

Estudiemos el signo de $f'(x)$. Obtengamos las raíces del numerador y denominador de $f'(x)$.

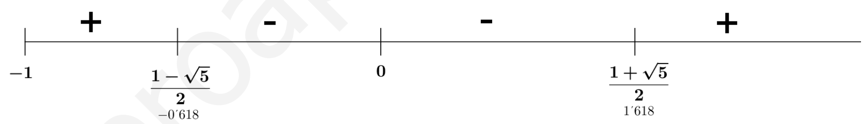
$$x^2-x-1=0 \quad\to\quad x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-1)}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\cong -0'618\in Dom\, f(x)\\ x_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\cong 1'618\in Dom\, f(x)\end{cases}$$

$$x^2(x+1)=0 \quad\to\quad \begin{cases} x^2=0 \quad\to\quad x=0\\ x+1=0 \quad\to\quad x=-1\end{cases}$$

Considerando el dominio de f(x) = $(-1,0)\cup(0,+\infty)$*, debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,*

x	$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$
$-0'7$	$\frac{-1}{(-0'7)^2}+\frac{1}{-0'7+1}=1'29...>0$
$-0'5$	$\frac{-1}{(-0'5)^2}+\frac{1}{-0'5+1}=-2<0$
1	$\frac{-1}{1^2}+\frac{1}{1+1}=-0'5<0$
2	$\frac{-1}{2^2}+\frac{1}{2+1}=0'083...>0$

Es decir:



f(x) es creciente en $\left(-1,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},+\infty\right)$ ***y es decreciente en*** $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

En $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo y*

en $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *como la función pasa de decreciente a creciente hay un mínimo relativo.*

$$x=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cong -2'5805$$

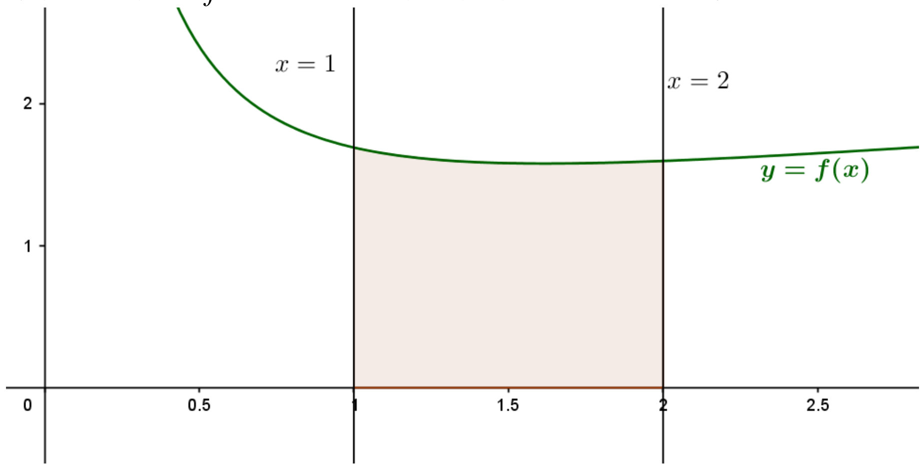
$$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)=\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cong 1'5805$$

La función f(x) tiene un máximo relativo en $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{2}{1-\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(-0'618\,,-2'5805)$ ***y***

un mínimo relativo en $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{2}{1+\sqrt{5}}+\ln\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\right)\cong(1'618\,,1'5805)$ **.**

c) Área entre $f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = 2$

Nos interesa la función a ambos lado del mínimo relativo. El área a calcular gráficamente es:



El área la obtendremos mediante la siguiente integral definida $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx$.

Los valores de x están comprendidos entre 1 y 2, por tanto podemos emplear indistintamente $\ln(x)$ *o* $\ln|x|$.

Calculamos la integral de cada uno de los sumandos,

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$$

$$\int \ln(x+1)\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln(x+1) & \to & du = \frac{1}{x+1} dx \\ dv = dx & \to & v = x \end{matrix} \right\} = x\ln(x+1) - \int x \frac{1}{x+1}\, dx = x\ln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}\, dx \overset{*}{=}$$

$$\left\{ \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \quad \to \quad \int \frac{x}{x+1}\, dx = \int 1\, dx - \int \frac{1}{x+1}\, dx = x - \ln(x+1) \right\}$$

$$\overset{*}{=} x\ln(x+1) - \left(x - \ln(x+1)\right) = x\ln(x+1) - x + \ln(x+1) = (x+1)\ln(x+1) - x$$

Entonces $\int \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x$,

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + \ln(x+1) \right) dx = \left[\ln(x) + (x+1)\ln(x+1) - x \right]_1^2 =$$

$$= [\ln(2) + (2+1)\ln(2+1) - 2] - [\ln(1) + (1+1)\ln(1+1) - 1] = \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - (0 + 2\ln 2 - 1) =$$

$$= \ln 2 + 3\ln 3 - 2 - 2\ln 2 + 1 = 3\ln 3 - \ln 2 - 1 = \ln 27 - \ln 2 - 1 = \ln\left(\frac{27}{2}\right) - 1 \cong 1'6027$$

Solución: el área pedida es de $\ln\left[\left(\frac{27}{2} \right) - 1 \right]$ *u.a.* $\cong$ *1´6027 u.a.*

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:
Como k es un parámetro real, si $k = 0$ $f(x) = 0$ y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:
a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.
b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x} \neq 0 \;\; \forall\, x \in \Re \quad \rightarrow \quad Dom\, f(x) = \Re.$

Asíntotas.
Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ f(x) no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\underset{x\to-\infty}{Lím}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\underset{x\to+\infty}{Lím}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$ en $+\infty$.

Asíntota oblicua: ($y = m\,x + n$)

$$m=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x}=\underset{x\to\infty}{Lím}\frac{k}{e^{2x}}=\begin{cases}\underset{x\to-\infty}{Lím}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{0}=\infty\\[2ex]\underset{x\to+\infty}{Lím}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{\infty}=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

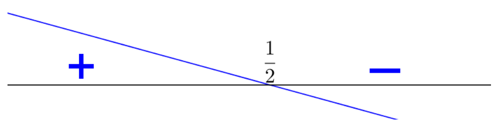
$$f'(x)=\frac{k\,e^{2x}-k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x\in\Re \quad e^{2x}$ *y* $e^{4x}>0 \quad \rightarrow$ *el signo de f´(x) depende de la expresión $k\,(1 – 2\,x)$*

$1 – 2\,x$ es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: $1 – 2\,x = 0$;

$1 = 2\,x$; $x=\dfrac{1}{2}$. Gráficamente



En consecuencia:

si k > 0 f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2\,e}\right)$***.***

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\,\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2\,e}$$

si k < 0 f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2\,e}\right)$***.***

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en* $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en [– 1 , 1]*

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \frac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^2 \\ f(1) = \frac{k \cdot 1}{e^{2 \cdot 1}} = \frac{k}{e^2} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad f(-1) \cdot f(1) = -k\,e^2\,\frac{k}{e^2} = \left\{e^2 \neq 0\right\} = -k^2 < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 $\rightarrow$ $\boldsymbol{\exists\, c \in (-1, 1)\ /\ f(c) = 0}$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx$ que cumple $H(1) = 1$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

Asíntotas de $y = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$

Asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto no tiene asíntota horizontal.

Asíntota vertical.

Buscamos las posibles asíntotas verticales,

$6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4.6.2}}{2.6} = \frac{7 \pm \sqrt{49-48}}{12} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{12} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} \dfrac{7+1}{12} = \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{7-1}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Posibles a.v. $x = \dfrac{1}{2}$ *y* $x = \dfrac{2}{3}$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9\frac{1}{2} - 5}{0} = \frac{12\frac{1}{8} - 8\frac{1}{4} + \frac{9}{2} - 5}{0} = \frac{\frac{12-16+36-40}{8}}{0} =$$

$$= \frac{\frac{48-56}{8}}{0} = \frac{\frac{-8}{8}}{0} = \frac{-1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{1}{2}$ *es asíntota vertical.*

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \frac{12\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 8\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 9\frac{2}{3} - 5}{0} = \frac{12\frac{8}{27} - 8\frac{4}{9} + 6 - 5}{0} = \frac{\frac{96-96}{27} + 1}{0} = \frac{1}{0} = \infty$$

luego $x = \dfrac{2}{3}$ *es asíntota vertical.*

Asíntota oblicua.

La asíntota oblicua es la recta de ecuación $y = m\,x + n$ *siendo,*

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{f(x)}{g(x)}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^3-7x^2+2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{g(x)} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^3-8x^2+9x-5-12x^3+14x^2-4x}{6x^2-7x+2} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2+5x-5}{6x^2-7x+2} = 1$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es: $y = 2\,x + 1$

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}$$

efectuemos la división polinómica

$$\begin{array}{rrrrrrrr|l}
 & 12x^3 & - & 8x^2 & + & 9x & - & 5 & \;6x^2-7x+2 \\ \cline{9-9}
- & 12x^3 & + & 14x^2 & - & 4x & & & \;2x+1 \\ \cline{1-6}
 & & & 6x^2 & + & 5x & - & 5 & \\
 & & - & 6x^2 & + & 7x & - & 2 & \\ \cline{3-8}
 & & & & & 12x & - & 7 &
\end{array}$$

luego $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2} = (2x+1) + \dfrac{12x-7}{6x^2-7x+2}$

$$H(x) = \int\left[(2x+1) + \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right]dx = x^2 + x + Ln\left|6x^2-7x+2\right| + C$$

Como debe ser $H(1) = 1$

$$1 = 1^2 + 1 + Ln\left|6\,.\,1^2 - 7\,.\,1 + 2\right| + C$$

$$1 = 1 + 1 + Ln\left|6-7+2\right| + C$$

$$1 = 2 + Ln\left|1\right| + C$$

$$1 = 2 + 0 + C \;\rightarrow\; 1 = 2 + C \;\rightarrow\; C = -1$$

Por lo tanto $H(x) = x^2 + x - 1 + Ln\left|6x^2-7x+2\right|$

Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:
a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*
b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

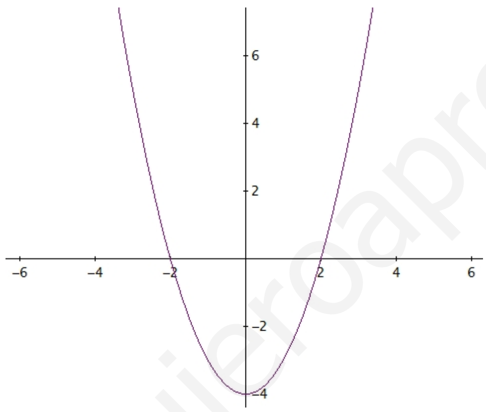
Solución:
a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.

a1) Como $y = x^2 - 4$ *es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.*
Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4;$ *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Vértice de la parábola,

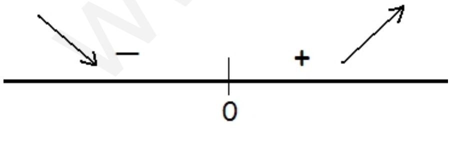
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

El vértice es (0 , – 4)

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*

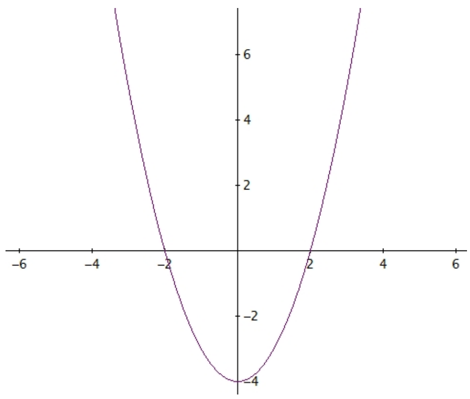


a2) $y = x^2 - 4$ *tratada como función.*
Dom y = R, por ser una función polinómica.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0, \quad y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0, \quad 0 = x^2 - 4; \quad x^2 = 4;$ *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Monotonía, signo de y´
$y' = 2x$
$2x = 0; \quad x = 0$



Decreciente $(-\infty, 0)$
Creciente $(0, +\infty)$
Mínimo relativo $(0, -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*



b) $g(x) = Ln\ (x^2 - 4)$ *. Buscamos el dominio de* $g(x)$

$x^2 - 4 > 0$*, considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de* $g(x)$*,*

$$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

c) Monotonía de $g(x)$

$g(x) = Ln\ (x^2 - 4)$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

estudiemos el signo de $g'(x)$*, para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,*

$2x = 0;\ \ x = 0$

$x^2 - 4 = 0$*; dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$

Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de $g(x)$*, obtenemos*

Por lo tanto $g(x)$ *es*
$$\begin{array}{ll} Decreciente & (-\infty, -2) \\ Creciente & (2, +\infty) \end{array}$$

Y $g(x)$ *no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si* $g(x)$ *tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.*

$$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

Puntos de corte con eje OX,

$$y = 0 \ \rightarrow\ Ln(x^2 - 4) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 4 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}23 \in Dom\ g(x) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (-\sqrt{5}, 0) \\ (\sqrt{5}, 0) \end{array}$$

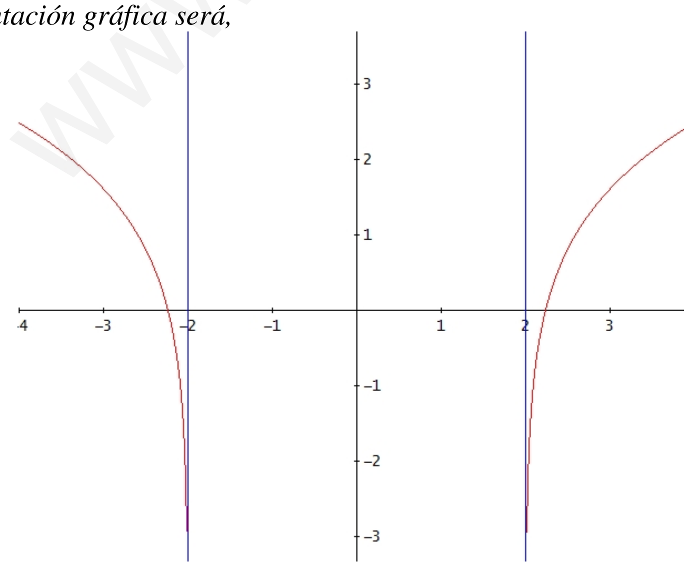
no hay corte con el eje OY porque $x = 0$ *no es del dominio de* $g(x)$

Asíntota vertical,

$$\lim_{x \to -2^-} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \ \rightarrow\ x = -2 \quad es \quad a.v.$$

$$\lim_{x \to 2^+} Ln(x^2 - 4) = Ln\ 0 = -\infty \ \rightarrow\ x = 2 \quad es \quad a.v.$$

La representación gráfica será,



Luego $g(x)$ *no tiene máximo absoluto.*

PROBLEMA A.3. Dada la función f definida por

$$f(x) = x^2\ e^{-x}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y el recorrido de la función f. *(2 puntos)*

b) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\ e^{-x}$ alcanza el máximo relativo y el mínimo relativo. *(2 puntos)*

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dicha función f. *(2 puntos)*

d) Los valores de x donde la función $f(x) = x^2\ e^{-x}$ tiene los puntos de inflexión. *(2 puntos)*

e) La gráfica de la curva $y = x^2\ e^{-x}$, explicando con detalle la obtención de su asíntota horizontal. *(2 puntos)*

Solución:

a) Dominio:

Tanto x^2 *como* e^{-x} *se pueden calcular para cualquier número real x, por lo que* $Dom\ f(x) = \Re$

Recorrido:

$\forall\, x \in \Re,\quad x^2 \geq 0 \quad y \quad e^{-x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2\, e^{-x} \geq 0$. *Por lo que* $Im\ f(x) = [\,0\,,+\infty\,)$

b) Calculemos f´(x),

$f'(x) = 2\,x\,e^{-x} + x^2\,e^{-x}(-1) = 2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x} = (2x - x^2)\,e^{-x}$

Igualamos la primera derivada a cero para buscar los posibles extremos de f(x)

$(2x - x^2)\,e^{-x} = 0$

como $e^{-x} \neq 0 \quad \forall x \in \Re \quad \to \quad 2x - x^2 = 0 \quad \to \quad x(2-x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ 2 - x = 0 \quad \to \quad x = 2 \end{array} \right.$

Calculemos la segunda derivada para determinar si para estos valores de x f(x) alcanza un extremo relativo.

$f''(x) = (2-2x)\,e^{-x} + (2x - x^2)\,e^{-x}(-1) = (2-2x)\,e^{-x} - (2x-x^2)\,e^{-x} = (2-2x-2x+x^2)\,e^{-x} = (x^2 - 4x + 2)\,e^{-x}$

$x = 0,\quad f''(0) = 2\,e^0 = 2 > 0 \quad \to$ *mínimo relativo*

$x = 2,\quad f''(2) = (4 - 8 + 2)2\,e^{-2} = -2\,e^{-2} < 0 \quad \to$ *máximo relativo*

Por lo tanto, la función f(x) alcanza el máximo relativo en x = 2 y el mínimo relativo en x = 0.

Calculemos los puntos correspondientes para usarlos en el apartado e):

para $x = 0,\quad f(0) = 0^2\,.\ e^{-0} = 0 \quad \to$ *en* $(\,0\,,\,0\,)$ *mínimo relativo*

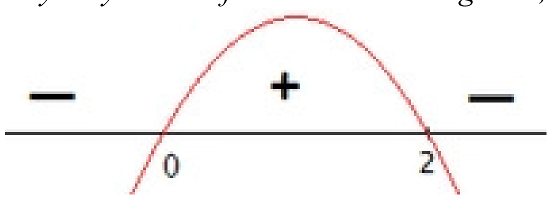
para $x = 2,\quad f(2) = 2^2\,.\ e^{-2} = 4\,e^{-2} \quad \to$ *en* $(\,2\,,\,4\,e^{-2}\,) \approx (\,2\,,\,0'5413\,)$ *máximo relativo*

c) Monotonía.

Debemos estudiar el signo de f´(x).

Por lo calculado en el apartado anterior sabemos que $f'(x) = (2x - x^2)\,e^{-x}$ *y* $f'(x) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array} \right.$

Como $\forall\, x \in \Re,\quad e^{-x} > 0$, *el signo de f´(x) depende de* $(\,2\,x - x^2\,)$ *que es un polinomio de 2º grado cuyas raíces son 0 y 2 y con coeficiente de* x^2 *negativo, luego el signo de f´(x) es:*



Por lo tanto:

f(x) es creciente en $(\,0\,,\,2\,)$ *y*

f(x) es decreciente en $(-\infty\,,\,0\,) \cup (\,2\,,+\infty)$

d) Puntos de inflexión.

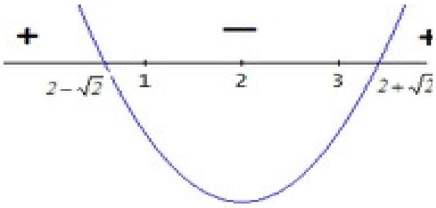
Debemos estudiar el signo de la segunda derivada.

Del apartado b) sabemos que: $f''(x)=(x^2-4x+2)\,e^{-x}$

En $f''(x)$ el factor e^{-x} es siempre positivo, luego el signo de $f''(x)$ depende del otro factor que es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y cuyas raíces son:

$$x^2-4x++2=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{2}}{2}=2\pm\sqrt{2}\left\langle\begin{array}{l} x_1=2+\sqrt{2}\\ x_2=2-\sqrt{2}\end{array}\right.$$

El signo de $f''(x)$ será:



Luego en $x=2-\sqrt{2}$ y $x=2+\sqrt{2}$ hay puntos de inflexión porque en ellos la segunda derivada cambia de signo.

e) Por los cálculos realizados en los apartados anteriores, de la curva $y=x^2\,e^{-x}$ conocemos: dominio, imagen, monotonía y extremos relativos. Para completar su representación obtengamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su asíntotas.

Puntos de corte:

Para $x = 0$ (calculado en el apartado b)) $y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$\text{Para}\quad y=0 \quad\rightarrow\quad 0=x^2\,e^{-x} \quad\rightarrow\left\langle\begin{array}{l} x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=0\\ e^{-x}=0,\ \text{sin solución pues } e^{-x}\neq 0\end{array}\right. \quad\rightarrow\quad (0,0)$$

Asíntotas:

Como el dominio de la función es $\Re$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

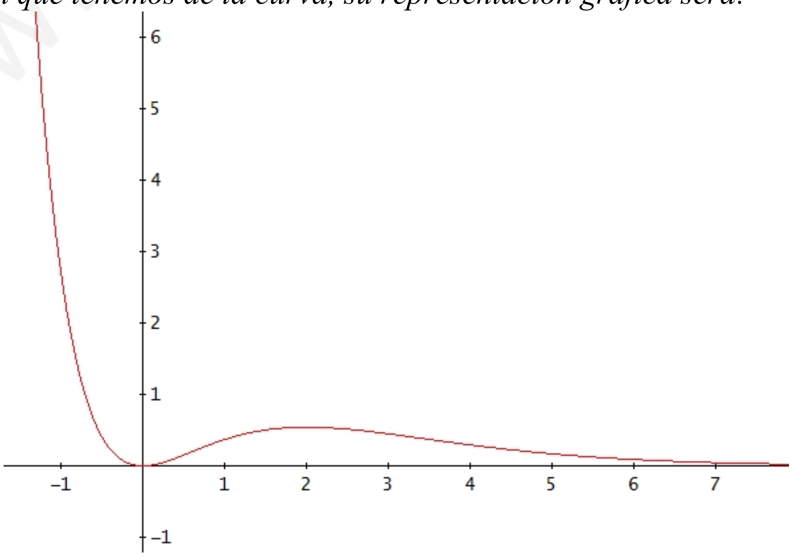
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\,e^{-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$(indeterminado). Como e^x es infinito de orden superior a x^2 entonces

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\,e^{-x}\right)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2\,e^{-x}\right)=(-\infty)^2\,e^{+\infty}=(+\infty)\,(+\infty)=(+\infty)$

Luego $y = 0$ es asíntota horizontal en $+\infty$. Como $f(x)\geq 0$ (visto en apartado a)) la posición de la curva respecto de la asíntota será:

Con la información que tenemos de la curva, su representación gráfica será:



PROBLEMA 3. Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función *f*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. *(3 + 1 puntos)*

c) El valor de $\int_2^3 f(x)\, dx.$ *(3 puntos)*

Solución:

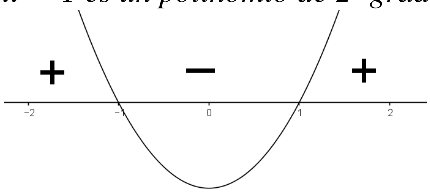
a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$

Dom f(x),

$x^2 - 1 > 0$

$x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

x^2 – 1 es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces – 1 y 1, luego



Por tanto, Dom f(x) = (– ∞, – 1) ∪ (1 , + ∞).

Asíntotas,

verticales,

x = – 1 por la izquierda

$\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{-1}{0} = \infty \quad \to \quad x = -1$ *es asíntota vertical por la izquierda.*

x = 1 por la derecha

$\lim\limits_{x\to -1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{0} = \infty \quad \to \quad x = 1$ *es asíntota vertical por la derecha.*

horizontales,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{|x|} = \{como\ x < 0\} = -1 \\ \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x}{|x|} = \{como\ x > 0\} = 1 \end{array}\right\} \to$$

tiene dos asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

oblicua, como la función tiene a. horizontal en ambos lados, no tiene a. oblicua.

Por lo tanto, las asíntotas de la función f son:

asíntotas verticales: x = – 1 por la izquierda y x = 1 por la derecha

asíntotas horizontales: y = – 1 en – ∞ e y = 1 en + ∞.

b) Monotonía y representación gráfica.

Para la monotonía calculamos $f'(x)$ y estudiamos su signo.

$$f'(x)=\frac{1\cdot\sqrt{x^2-1}-x\,\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\,2x}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

En el estudio del dominio de $f(x)$ hemos obtenido que $x^2-1>0\ \ \forall\, x\in Dom\, f(x)$, además, $\forall\, x\in Dom\, f(x)$, $\sqrt{x^2-1}>0$; por tanto $f'(x)<0\ \ \forall\, x\in Dom\, f(x)$.

Luego, $f(x)$ es decreciente en su dominio.

Representación gráfica de $f(x)$.

De la función conocemos: dominio, asíntotas y monotonía.

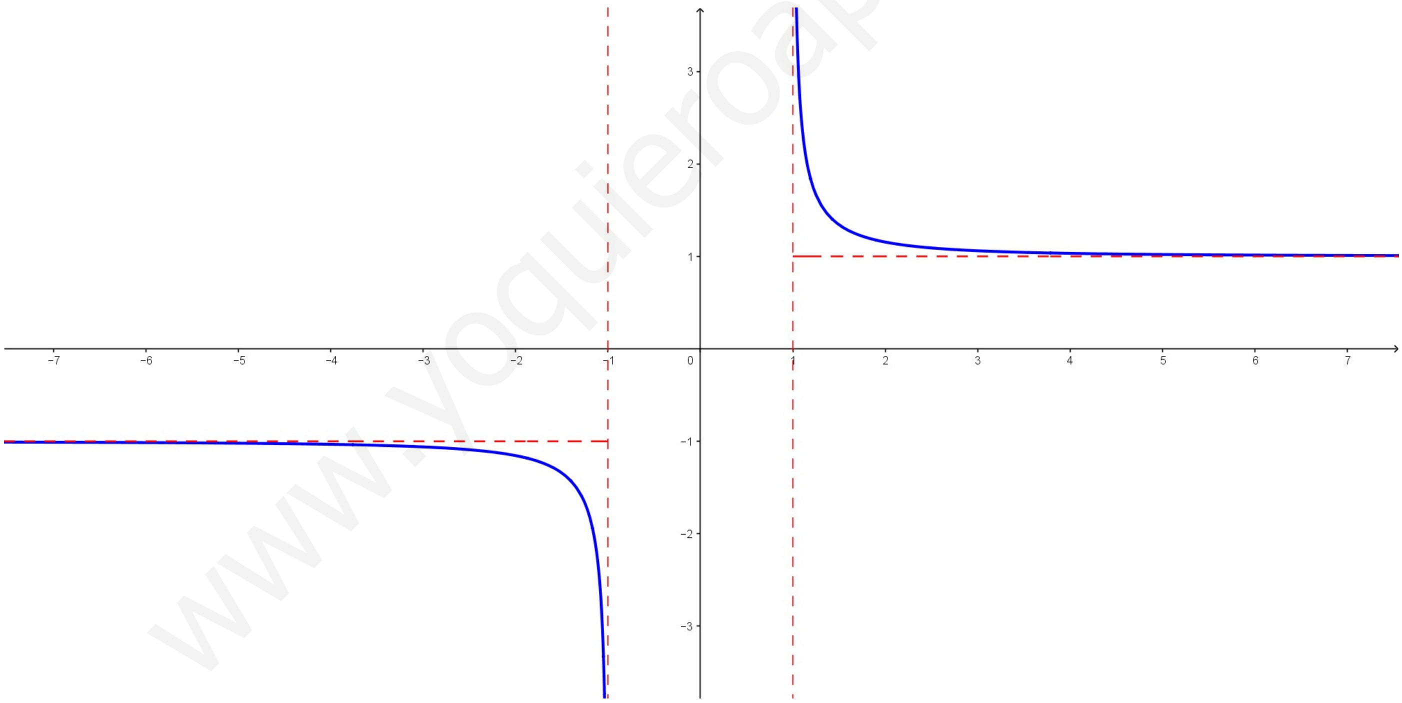
Puntos de corte:

Corte eje OX, $y=0$, $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=0$; $x=0\ \notin Dom\, f(x)\cdot$ No corta al eje OX

Corte eje OY, $x=0\ \notin Dom\, f(x)\cdot$ No corta al eje OY

Como $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ entonces si $x<-1$, {numerador negativo y denominador positivo}, $f(x)<0$; si $x>1$, {numerador y denominador positivos}, $f(x)>0$.

Considerando todo lo anterior, la representación gráfica de $f(x)$ será:



c) $\int_2^3 f(x)\,dx.$

Calculemos: $\int\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx=\left\{t=x^2-1;\quad dt=2x\,dx;\quad x\,dx=\frac{dt}{2}\right\}=\int\frac{\frac{dt}{2}}{\sqrt{t}}=\int\frac{dt}{2\sqrt{t}}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}$

Finalmente, $\int_2^3 f(x)\,dx=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3=\left(\sqrt{3^2-1}\right)-\left(\sqrt{2^2-1}\right)=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Solución: $\int_2^3 f(x)\,dx=\sqrt{8}-\sqrt{3}$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ y $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) Calcular la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumple $H(0) = 0$. *(1,7 puntos).*

Solución:
a)

$$y = \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}$$

Asíntotas verticales:

$x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0$

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 1 & 5 & 5 \\ -1 & & -1 & 0 & -5 \\ \hline & 1 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$x^2+5=0 \quad \to \quad x^2=-5$ *sin raíces reales.*

Veamos si $x = -1$ *es a.v.*

$$\lim_{x\to -1}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4(-1)^2+2(-1)+10}{0} = \frac{4-2+10}{0} = \frac{12}{0} = \infty$$

Por lo tanto $x = -1$ *es asíntota vertical.*

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x} = 0$$

análogamente,

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \left(\frac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim_{x\to -\infty}\frac{4x^2}{x^3} = \lim_{x\to -\infty}\frac{4}{x} = 0$$

Por lo tanto $y = 0$ *es la asíntota horizontal.*

Asíntota oblicua:

$$m = \lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}}{x} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2+2x+10}{x^4+x^3+5x^2+5x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{4x^2}{x^4} = \lim_{x\to +\infty}\frac{4}{x^2} = 0$$

Por lo tanto no hay asíntota oblicua.

b)

$$H(x) = \int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx$$

$$\frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5} = \frac{4x^2+2x+10}{(x+1)(x^2+5)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+5} = \frac{A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+5)}$$

$$4x^2+2x+10 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1)$$

$x=-1 \quad \rightarrow \quad 4-2+10=A(1+5)+(-B+C)=0$

$12=6A \quad \rightarrow \quad A=2$

$x=0 \quad \rightarrow \quad 10=5A+C$

$10=5\,.\,2+C$

$10=10+C \quad \rightarrow \quad C=0$

$x=1 \quad \rightarrow \quad 16=6A+(B+C)2$

$16=6\,.\,2+(B+0)2$

$16=12+2B \quad \rightarrow \quad 4=2B \quad \rightarrow \quad B=2$

$$H(x)=\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx=\int \frac{2}{x+1}dx+\int \frac{2x}{x^2+5}dx=2Ln|x+1|+Ln|x^2+5|+C=$$

como $x^2+5>0 \quad \forall x \in \Re$

$$=Ln(x+1)^2+Ln\left(x^2+5\right)+C$$

Debe ser $H(0)=0$

$0=Ln(0+1)^2+Ln\,(0^2+5)+C$

$0=Ln\,1+Ln\,5+C$

$0=0+Ln\,5+C$

$C=-\,Ln\,5$

Por lo que,

$$H(x)=Ln(x+1)^2+Ln\left(x^2+5\right)-Ln\,5=Ln\frac{(x+1)^2\left(x^2+5\right)}{5}$$

Problema 3.1. Se consideran las funciones reales $f(x) = 2x^2 + 12x - 6$ y $g(x) = (x - 2)(x^2 + 9)$. Se pide obtener razonadamente:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *(1,6 puntos).*

b) La función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)}\,dx$ *que cumple* $H(3) = \dfrac{\pi}{3}$. *(1,7 puntos).*

Solución:

a) Las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\left(x^2+9\right)} = \frac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\dfrac{+\infty}{-\infty}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18} = \left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2}{x} = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad y = 0 \quad \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntotas verticales,

Calculemos las raíces del denominador,

$$(x-2)\left(x^2+9\right) = 0 \quad \left\langle \begin{array}{l} x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=2 \\ x^2+9=0 \quad \rightarrow \quad x^2=-9 \quad \textit{sin raíces reales} \end{array}\right.$$

Por lo que la posible asíntota vertical será la recta x = 2, comprobemos si lo es calculando el límite siguiente,

$$\lim_{x\to2} \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\left(x^2+9\right)} = \frac{2\,.\,2^2+12\,.\,2-6}{(2-2)\left(2^2+9\right)} = \frac{26}{0} = \infty$$

Por lo tanto ***x = 2 es la asíntota vertical****.*

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\dfrac{2x^2+12x-6}{x^3-2x^2+9x-18}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+12x-6}{x^4-2x^3+9x^2-18x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2}{x^4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$$

y obtendríamos el mismo resultado al calcular el límite cuando $x \to +\infty$*; por lo tanto* ***no hay asíntota oblicua****.*

b)

$$H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx \quad / \quad H(3) = \frac{\pi}{3}.$$

$$H(x) = \int \frac{2x^2+12x-6}{(x-2)\left(x^2+9\right)}\,dx =$$

Descomponemos el integrando,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+9}=\frac{A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+9)}$$

luego, $\quad 2x^2+12x-6=A(x^2+9)+(Bx+C)(x-2)$

Calculamos los valores de A, B y C dando valores a x:

$x=2 \;\rightarrow\; 26=13\,A \;\rightarrow\; A=2$

$x=0 \;\rightarrow\; -6=2\,.\,9+C\,(-2) \;\rightarrow\; -6=18-2\,C \;\rightarrow\; 2\,C=18+6 \;\rightarrow\; 2\,C=24 \;\rightarrow\; C=12$

$x=1 \;\rightarrow\; 8=10\,A-B-C$ *; sustituyendo los valores obtenidos de A y C,*

$\qquad 8=10\,.\,2-B-12 \;\rightarrow\; 8=8-B \;\rightarrow\; B=0$

Por lo tanto,

$$\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}=\frac{2}{x-2}+\frac{0x+12}{x^2+9}=\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}$$

$$y \quad H(x)=\int\frac{2x^2+12x-6}{(x-2)(x^2+9)}\,dx=\int\left(\frac{2}{x-2}+\frac{12}{x^2+9}\right)dx=\int\frac{2}{x-2}dx+\int\frac{12}{x^2+9}dx\overset{*}{=}$$

calculamos cada integral por separado

$$\int\frac{2}{x-2}dx=2Ln|x-2|$$

$$\int\frac{12}{x^2+9}dx=12\int\frac{1}{9+x^2}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{\frac{9+x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\frac{x^2}{9}}dx=12\int\frac{\frac{1}{9}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=$$

$$=12\,\frac{1}{3}\int\frac{\frac{1}{3}}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx=4arctg\,\frac{x}{3}$$

$$\overset{*}{=}2Ln|x-2|+4arctg\,\frac{x}{3}+C$$

Calculemos el valor de C para que se cumpla la condición exigida,

$$H(3)=\frac{\pi}{3}$$

$$H(3)=2Ln|3-2|+4arctg\left(\frac{3}{3}\right)+C$$

$$\frac{\pi}{3}=2Ln\,1+4arctg\,1+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=2.0+4\frac{\pi}{4}+C \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}=\pi+C \;\rightarrow\; C=\frac{\pi}{3}-\pi=\frac{-2\pi}{3}$$

Finalmente, la función pedida es:

$$H(x)=2Ln|x-2|+4\;arctg\left(\frac{x}{3}\right)-\frac{2\pi}{3}$$