OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. En el plano *XY* está dibujada una parcela A cuyos límites son dos calles de ecuaciones $x = 0$ y $x = 40$, respectivamente, una carretera de ecuación $y = 0$, y el tramo del curso de un río de ecuación

$y = f(x) = 30\sqrt{2x+1}$, con $0 \le x \le 40$, siendo positivo el signo de la raíz cuadrada.

Se pretende urbanizar un rectángulo *R* inscrito en la parcela *A*, de manera que los vértices de *R* sean los puntos $(x, 0)$, $(x, f(x))$, $(40, f(x))$ y $(40, 0)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área de la parcela *A*. *(3 puntos).*

b) Los vértices del rectángulo R al que corresponde área máxima. *(5 puntos).*

c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos).*

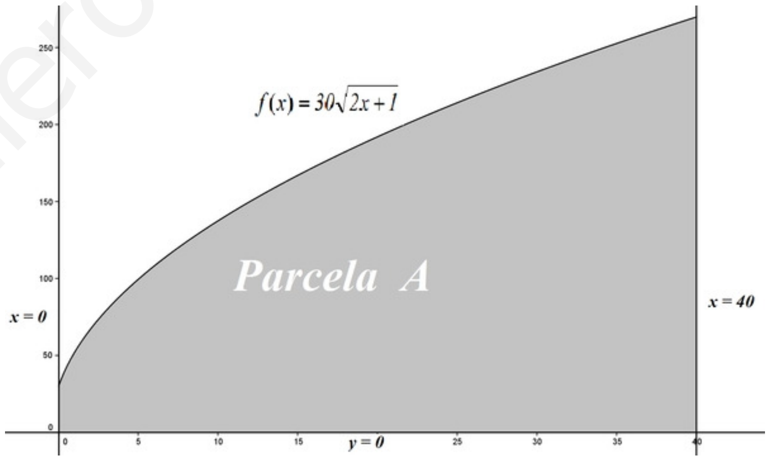
Solución:

Para representar la parcela A el dibujo de las rectas verticales $x = 0$ y $x = 40$ y de la recta horizontal $y = 0$ es sencillo. Efectuemos los cálculos necesarios para representar la función f(x),

$f(x) = 30\sqrt{2x+1}$

x	$f(x)$
0	$30\sqrt{2.0+1} = 30\sqrt{1} = 30$
12	$30\sqrt{2.12+1} = 30\sqrt{25} = 150$
40	$30\sqrt{2.40+1} = 30\sqrt{81} = 270$

La representación gráfica de la parcela A será:



a) Obtendremos el área de la parcela A mediante el siguiente cálculo integral,

$$Área_A = \int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx$$

Calculemos, previamente, la integral indefinida,

$$\int 30\sqrt{2x+1}\,dx = 30\int (2x+1)^{1/2}dx = 30\,\frac{1}{2}\int 2\,(2x+1)^{1/2}dx = 30\,\frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} =$$

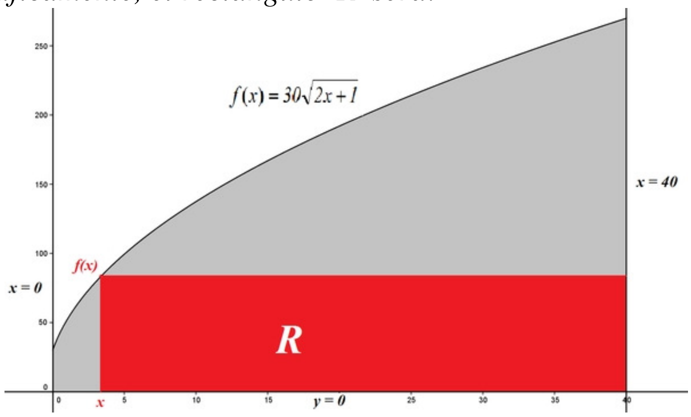
$$= 15\,\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = 10(2x+1)^{\frac{3}{2}} = 10\sqrt{(2x+1)^3}$$

Por lo tanto $\int_0^{40} 30\sqrt{2x+1}\,dx = \left[10\sqrt{(2x+1)^3}\right]_0^{40} = 10\sqrt{(2.40+1)^3} - 10\sqrt{(2.0+1)^3} =$

$= 10\sqrt{81^3} - 10\sqrt{1^3} = 10.81\sqrt{81} - 10 = 810.9 - 10 = 7280$

Finalmente, ***el área de la parcela A es de 7280 u^2.***

b) Gráficamente, el rectángulo R será:



Es un rectángulo de base (40 – x) y altura f(x).

El área de este rectángulo será: $A_R(x) = f(x)(40-x) = 30\sqrt{2x+1}\,(40-x)$

Obtengamos el máximo de A_R

$$A_R'(x) = 30\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}(40-x) + 30\sqrt{2x+1}\,(-1) = \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1}$$

$$A_R'(x) = 0 \quad\to\quad \frac{30(40-x)}{\sqrt{2x+1}} - 30\sqrt{2x+1} = 0 \quad\to\quad 30(40-x) - 30(2x+1) = 0 \quad\to\quad 40 - x - 2x - 1 = 0$$

$$39 - 3x = 0 \quad\to\quad 39 = 3x \quad\to\quad x = 13$$

Para determinar si $x = 13$ *es máximo o mínimo estudiaremos el signo de* $A_R'(x)$ *a la izquierda y derecha de 13,*

$$x = 10 \to \quad A_R'(10) = \frac{30(40-10)}{\sqrt{2.10+1}} - 30\sqrt{2.10+1} = \frac{900}{\sqrt{21}} - 30\sqrt{21} = \frac{900 - 30.21}{\sqrt{21}} = \frac{270}{\sqrt{21}} > 0$$

$$x = 20 \to \quad A_R'(20) = \frac{30(40-20)}{\sqrt{2.20+1}} - 30\sqrt{2.20+1} = \frac{300}{\sqrt{41}} - 30\sqrt{41} = \frac{300 - 30.41}{\sqrt{41}} = \frac{-930}{\sqrt{41}} < 0$$

Como a la izquierda de 13 la derivada es positiva, la función A_R *es creciente; a la derecha de 13 la derivada es negativa, la función* A_R *es decreciente. Por lo tanto en* $x = 13$ *hay un máximo que, además, es máximo absoluto porque la función pasa de creciente a decreciente.*

Obtengamos los vértices del rectángulo R para x = 13.

Sólo necesitamos calcular el valor de $f(13) = 30\sqrt{2.13+1} = 30\sqrt{27} = 30.3\sqrt{3} = 90\sqrt{3}$

Finalmente, ***los vértices del rectángulo R de área máxima son:***

$(13, 0)$, $(13, 90\sqrt{3})$, $(40, 90\sqrt{3})$ y $(40, 0)$

c) El valor del área máxima la obtenemos calculando $A_R(13)$.

$A_R(13) = 30\sqrt{2.13+1}\,(40-13) = 30\sqrt{27}\,27 = 810\sqrt{27} = 810.3\sqrt{3} = 2430\sqrt{3}$

El valor del área máxima es $2430\sqrt{3}\ u^2$

Problema A.3. Sea f la función real definida por $f(x) = x\,e^x - 3\,x$.
Se pide la obtención **razonada**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**, de:

a) Los puntos de corte de la curva $y = f(x)$ con el eje X. (2 *puntos*).
b) El punto de inflexión de la curva $y = f(x)$, (2 *puntos*), así como la **justificación razonada** de que la función f es creciente cuando $x > 2$. (2 *puntos*).
c) El área limitada por el eje X y la curva $y = f(x)$, cuando $0 \le x \le \ln 3$, donde ln significa logaritmo neperiano. (4 *puntos*).

Solución:

a) $y = f(x) = x\,e^x - 3\,x$, *¿corte con eje X?*

$$y = 0 \;\rightarrow\; x\,e^x - 3\,x = 0 \;\rightarrow\; x\,(e^x - 3) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ e^x - 3 = 0 \;\rightarrow\; e^x = 3 \;\rightarrow\; x = Ln\,3 \end{cases}$$

Finalmente, ***los puntos de corte de la curva y = f(x) con el eje X son (0 , 0) y (Ln 3 , 0).***

b) Para estudiar el crecimiento de y = f(x) tenemos que estudiar y´, y para obtener sus puntos de inflexión y´´. Calculemos y´ e y´´.

$y = x\,e^x - 3\,x$

En primer lugar, Dom $y = \Re$

$y' = e^x + x\,e^x - 3$

$y'' = e^x + e^x + x\,e^x = 2\,e^x + x\,e^x = (2 + x)\,e^x$

Obtengamos el punto de inflexión de la curva.

Resolvemos $y'' = 0$

$$(2 + x)\,e^x = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} 2 + x = 0 \;\rightarrow\; x = -2 \\ e^x = 0 \quad \text{sin solución} \end{cases}$$

Podemos determinar si para $x = -2$ *hay un punto de inflexión de dos formas:*

1^a	*Calculamos* $y''' = 2\,e^x + e^x + x\,e^x = 3\,e^x + x\,e^x = (3 + x)\,e^x$ $y'''_{x=-2} = (3-2)e^{-2} = e^{-2} \neq 0 \;\rightarrow\;$ *En* $x = -2$ *hay un punto de inflexión.*
2^a	*Estudiamos el signo de y´´* *En y´´ hay dos factores, uno de ellos* e^x *es siempre positivo, luego el signo de y´´ depende del signo del segundo factor, 2 + x, que es un polinomio de 1^er grado con coeficiente de x positivo y raíz x = – 2.* *Por tanto, a la izquierda de – 2 y´´ es negativa y a la derecha positiva, luego en x = – 2 hay un punto de inflexión.*

Calculemos el punto de inflexión.

$$x = -2 \;\rightarrow\; y = -2\,e^{-2} - 3(-2) = -2\,e^{-2} + 6 = 6 - \frac{2}{e^2}$$

El punto de inflexión de la curva y = f(x) es $\left(-2\,,\,6 - \dfrac{2}{e^2}\right)$

Veamos que f es creciente cuando x > 2.

Como $f'(x) = e^x + x\,e^x - 3 = e^x\,(x + 1) - 3$,

$$\text{Si } x > 2 \;\begin{cases} x + 1 > 3 \\ e^x > 1 \end{cases} \;\rightarrow\; e^x(x+1) > 3 \;\rightarrow\; e^x(x+1) - 3 > 0$$

Es decir, si x > 2 entonces f´(x) > 0 y por tanto f(x) es creciente.

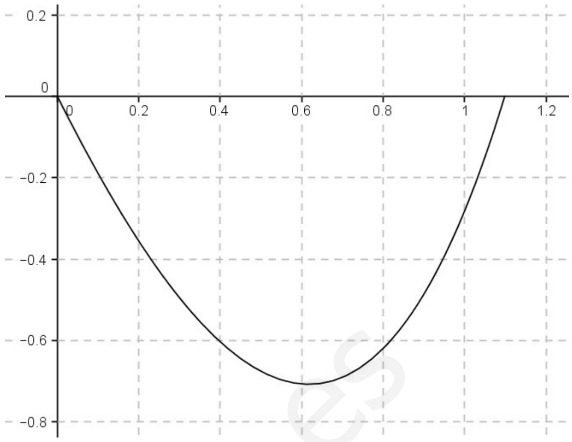
c) Es conveniente representar, de forma aproximada, $y = f(x)$ cuando $0 \le x \le Ln\, 3$ ($Ln\, 3 \cong 1´098$)

$y = f(x) = x\, e^x - 3\, x$

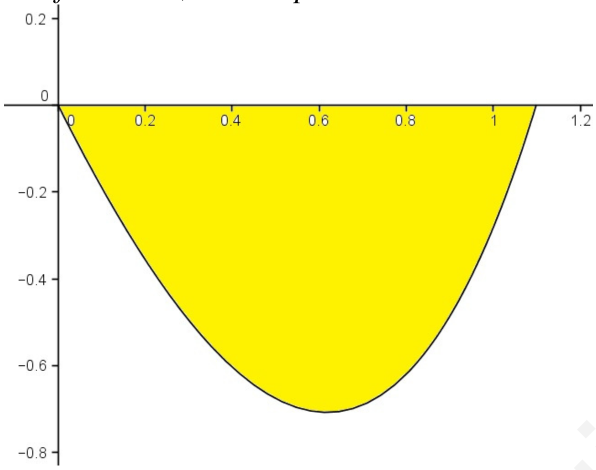
Del apartado a) sabemos que la curva corta al eje X en $(0, 0)$ y $(Ln\, 3, 0)$. Calculemos un punto de la curva para un valor de x entre 0 y $Ln\, 3$, por ejemplo, $x = 1$

$x = 1 \;\rightarrow\; y = 1 \,.\, e^1 - 3 \,.\, 1 = e - 3 = -0´281\ldots$

A partir de estos datos la representación gráfica de f(x) será,



Gráficamente, el área pedida es:



El área pedida se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$A = -\int_0^{Ln\,3} \left(x\, e^x - 3x\right) dx$$

En primer lugar calculamos la integral indefinida:,

$$\int \left(x\, e^x - 3x\right) dx = \int x\, e^x\; dx - \int 3x\; dx \overset{*}{=}$$

La primera integral es más complicada, calculémosla previamente.

$$\int x\, e^x\, dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^x\, dx & \rightarrow & v = e^x \end{matrix} \right\} = x\, e^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x$$

La segunda integral es más sencilla: $\int 3x\, dx = 3\dfrac{x^2}{2}$

Luego, $\overset{*}{=} x\, e^x - e^x - 3\dfrac{x^2}{2}$

Por tanto, $A = -\left[x e^x - e^x - 3\dfrac{x^2}{2} \right]_0^{Ln\,3} = -\left[\left((Ln\,3)\, e^{Ln\,3} - e^{Ln\,3} - 3\dfrac{(Ln\,3)^2}{2} \right) - \left(0\, e^0 - e^0 - 3\dfrac{0^2}{2} \right) \right] =$

$$= -\left[\left((Ln\,3)\; 3 - 3 - 3\frac{(Ln\,3)^2}{2} \right) - (-1) \right] = -\left[3Ln\,3 - 3 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 + 1 \right] = -\left[3Ln\,3 - 2 - \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 \right] =$$

$$= 2 + \frac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3 = 0´5145865\ldots \cong 0´51459$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(2 + \dfrac{3}{2}(Ln\,3)^2 - 3Ln\,3 \right) u.a. \cong 0´51459\; u.a.$

OPCIÓN B

Problema B.3. Un club deportivo alquila un avión de 80 plazas para realizar un viaje a la empresa VR. Hay 60 miembros del club que han reservado su billete. En el contrato de alquiler se indica que el precio de un billete será 800 euros si sólo viajan 60 personas, pero que el precio por billete disminuye en 10 euros por cada viajero adicional a partir de esos 60 viajeros que ya han reservado el billete.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El total que cobra la empresa VR si viajan 61, 70 y 80 pasajeros. (1 *punto*).

b) El total que cobra la empresa VR si viajan $60 + x$ pasajeros, siendo $0 \le x \le 20$. (4 *puntos*).

c) El número de pasajeros entre 60 y 80 que maximiza lo que cobra en total la empresa VR. (5 *puntos)*

Solución:

a) Llamando P al precio del billete y T al total que cobra la empresa VR.

Viajan 61 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(61 - 60) = 790$ *y* $T = 790 \cdot 61 = 48190$

Viajan 70 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(70 - 60) = 700$ *y* $T = 700 \cdot 70 = 49000$

Viajan 80 pasajeros $\rightarrow$ $P = 800 - 10\,(80 - 60) = 600$ *y* $T = 600 \cdot 80 = 48000$

Solución: ***si viajan 61 pasajeros la empresa cobra 48190€, si viajan 70 pasajeros cobra 49000€ y si viajan 80 pasajeros cobra 48000€.***

b) Viajan $60 + x$ *pasajeros,* $0 \le x \le 20$.

$P = 800 - 10\,(60 + x - 60) = 800 - 10x$

$T = (60 + x)(800 - 10x) = 48000 + 200x - 10x^2 = -10x^2 + 200x + 48000$

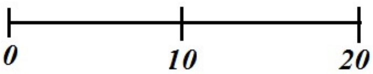
Solución: ***si viajan*** $60 + x$ ***pasajeros, VR cobra*** $-10x^2 + 200x + 48000$***, siendo*** $0 \le x \le 20$.

c) Buscamos el máximo de $T = -10x^2 + 200x + 48000$, $0 \le x \le 20$.

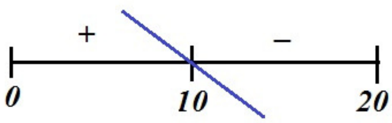
$T' = -20x + 200$

$T' = 0$, $\;-20x + 200 = 0$; $\;-20x = -200$; $\;x = 10$

Debemos estudiar el signo de T´ en los siguientes intervalos:



Como T´ es un polinomio de primer grado con coeficiente de x negativo y raíz x = 10, a la derecha de 10 T´es positivo y a la izquierda negativo:



Por tanto, en x = 10 hay un máximo relativo de la función T, además como a la izquierda de 10 T es creciente y a la derecha decreciente es el máximo absoluto de T para $0 \le x \le 20$.

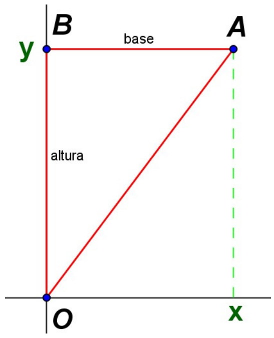
*Solución**: el número de pasajeros que maximiza lo que cobra en total la empresa VR es 70** (60 + 10)**.**

PROBLEMA B.3. Se considera el triángulo T de vértices $O = (0, 0)$, $A = (x, y)$ y $B = (0, y)$, siendo $x > 0$, $y > 0$, y tal que la suma de las longitudes de los lados OA y AB es 30 metros. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El área del triángulo T en función de x. *(3 puntos)*
b) El valor de x para el que dicha área es máxima. *(5 puntos)*
c) El valor de dicha área máxima. *(2 puntos)*

Solución:
a) ¿ A_T ?

La representación gráfica del triángulo T es:



$$A_T = \frac{b\,.\,h}{2} = \frac{x\,y}{2}$$

Como debemos expresar el área en función de x hay que buscar una relación entre x e y.
Del enunciado sabemos que $d(O, A) + d(A, B) = 30$ m. Por tanto:

$\sqrt{x^2+y^2} + x = 30$, *despejemos y,*

$$\sqrt{x^2+y^2} = 30 - x \quad \to \quad \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = (30-x)^2 \quad \to \quad x^2+y^2 = 900 - 60x + x^2$$

$$y^2 = 900 - 60x \quad \to \quad y = \sqrt{900-60x} \qquad (y > 0)$$

Para que se pueda calcular el valor de y debe ser $900 - 60x > 0 \;\to\; 60x < 900 \;\to\; x < 15$
Según el enunciado del problema $x > 0$.

Por tanto, $A_T = \dfrac{x\sqrt{900-60x}}{2}, \quad 0 < x < 15$

b) ¿x? / área es máxima

$$A_T' = \frac{1}{2}\left(1\cdot\sqrt{900-60x} + x\,\frac{-60}{2\sqrt{900-60x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}}\right)$$

$$A_T' = 0$$

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}}\right) = 0 \quad \to \quad \sqrt{900-60x} - \frac{30x}{\sqrt{900-60x}} = 0 \quad \to \quad 900 - 60x - 30x = 0$$

$$900 - 90x = 0 \quad \to \quad 900 = 90x \quad \to \quad x = 10$$

Estudiemos el signo de $A_T{}'$ en el intervalo $(0, 15)$

$$x = 1 \quad \to \quad A_T' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60\,.\,1} - \frac{30\,.\,1}{\sqrt{900-60\,.\,1}}\right) = 11'75.. > 0$$

$$x = 11 \quad \to \quad A_T' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{900-60\,.\,11} - \frac{30\,.\,11}{\sqrt{900-60\,.\,11}}\right) = -2'90.. < 0$$

Por lo que:

Por lo tanto en $x = 10$ hay un máximo relativo que además es el absoluto porque la función a la izquierda de 10 es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: para que el área sea máxima x = 10.

c) Para $x = 10$ el valor del área es:

$$A_T(10) = \frac{10\sqrt{900 - 60 \cdot 10}}{2} = 86{\acute{}}6025\ m^2$$

Solución: el valor de dicha área máxima es 86´6025 m²^{2}.

Problema 5. Se considera la función $h(x) = a\,x + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abcisa $x = \frac{-3}{4}$. *(3 puntos)*

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. *(2 puntos)*

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿a? / $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4}$.

$h'(x) = a + 2x;\quad a + 2x = 0;\quad 2x = -a;\quad x = \frac{-a}{2}$.

$h''(x) = 2 \quad \rightarrow \quad h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \quad \rightarrow \quad$ en $x = \frac{-a}{2}$ hay un mínimo relativo.

Por tanto, $\frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad -a = \frac{-6}{4} \quad \rightarrow \quad a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{3}{2}}$.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ dibujar las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

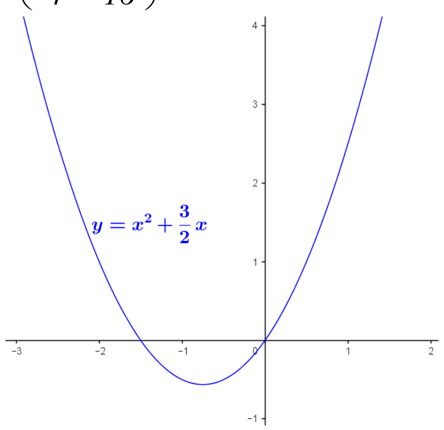
Corte con ejes coordenados $(0, 0)$ y $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

$x = 0 \rightarrow y = 0$

$y = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0;\quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{array} \right.$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo relativo en $x = \frac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}\cdot\frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$

Mínimo relativo $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



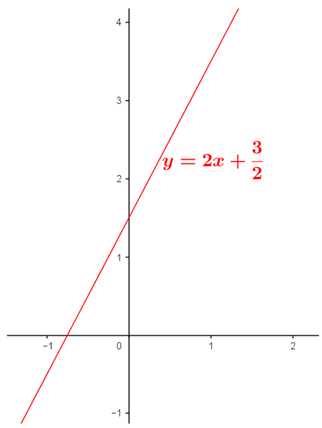
$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$x = 0 \rightarrow y = 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

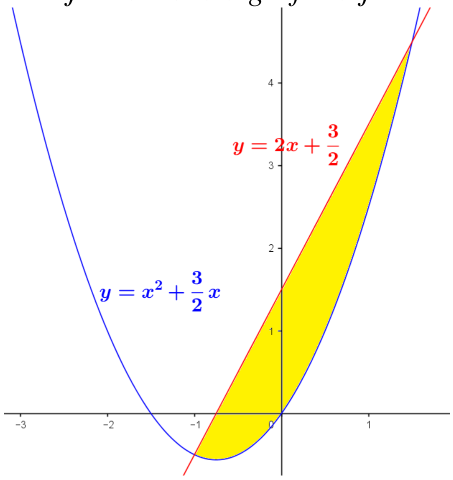
$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0;\ 2x = \frac{-3}{2};\ x = \frac{-3}{4}$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

$$= \left[-\frac{\left(3/2\right)^3}{3} + \frac{\left(3/2\right)^2}{4} + \frac{3}{2}\left(3/2\right) \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2\acute{}6042$$

Solución: el área pedida mide $\frac{125}{48}$ *u.a.* $\cong 2\acute{}6042$ *u.a.*

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Considerar las funciones definidas para $x \geq 0, \quad f(x) = arcsen\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad y \quad g(x) = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Calcular *f´(x) y g´(x)* y expresarlas del modo más simplificado posible. (*2 puntos*)
Comparar los resultados y deducir justificadamente la diferencia entre *f(x) y g(x)*. (*1,3 puntos*)

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\,\frac{\sqrt{1+x^2} - x\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{\dfrac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2-x^2}{1+x^2}}}\,\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{1+x^2}}}\,\frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}}\,\frac{-\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{1+x^2}}}\,\frac{\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\dfrac{1+x^2-1}{1+x^2}}}\,\frac{x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x^2}{1+x^2}}}\,\frac{x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\dfrac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}\,\frac{x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}} \overset{(a)}{=} \frac{1}{1+x^2}$$

$$(a)\ como\ x \geq 0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{x^2}} = 1$$

Lo obtenido indica que f'(x) = g'(x).

Como f(x) y g(x) tienen la misma derivada ambas funciones se diferencian en una constante, es decir, $f(x) - g(x) = K$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Sea T un triángulo de perímetro 60 cm. Uno de los lados del triángulo T mide x cm y los otros dos lados tienen la misma longitud.

a) Deducir razonadamente las expresiones de las funciones A y f tales que:

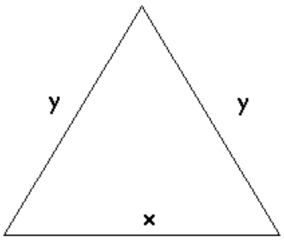
$A(x)$ = Área del triángulo T.

$f(x) = \{A(x)\}^2$ (*1,3 puntos*).

b) Obtener, razonadamente, el valor de x para el que $f(x)$ alcanza el valor máximo (*2 puntos*).

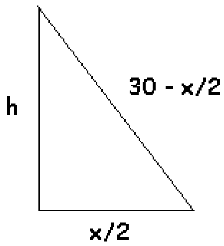
Solución:

a) El triángulo T es un triángulo isósceles, por lo tanto,



$$x + 2y = 60$$
$$2y = 60 - x$$
$$y = 30 - \frac{x}{2}$$

Calculamos la altura del triángulo aplicando el teorema de Pitágoras



$$h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \left(30 - \frac{x}{2}\right)^2$$
$$h^2 + \frac{x^2}{4} = 900 - 30x + \frac{x^2}{4}$$
$$h^2 = 900 - 30x$$
$$h = \sqrt{900 - 30x}$$

Las expresiones de las funciones serán:

$$A(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}$$

$$f(x) = \{A(x)\}^2 = \left(\frac{1}{2}x\sqrt{900 - 30x}\right)^2 = \frac{1}{4}x^2(900 - 30x) = \frac{1}{4}\left(900x^2 - 30x^3\right)$$

Por ser un triángulo isósceles, lado igual y, debe cumplirse que 2 y > x; luego 60 – x > x; 60 >2 x, es decir, x<30.
Para que haya triángulo debe ser x>0.
Por lo que el dominio de las funciones A(x) y f(x) es el intervalo abierto (0 , 30)

b) Busquemos el máximo de f(x)

$$f'(x) = \frac{1}{4}\left(1800x - 90x^2\right)$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{4}\left(1800x - 90x^2\right) = 0 \;\rightarrow\; 1800x - 90x^2 = 0 \;\rightarrow\; 20x - x^2 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x = 20 \end{array}\right.$$

Como Dom f(x) = (0,30) sólo consideramos la solución x=20

$$f''(x) = \frac{1}{4}(1800 - 180x) = 450 - 45x$$

Para $x = 20 \quad f''(20) = 450 - 900 = -450 < 0$

f(x) tiene un máximo relativo para x = 20.

f(x) es una función polinómica, luego es continua; en sus extremos, f(0)=0 y f(30)=0, toma valores inferiores a f(20)=30000; por lo que en x = 20 f(x) alcanza su máximo absoluto.

f(x) alcanza su máximo para x = 20.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Encontrar razonadamente el punto de la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ en el que la recta tangente a la curva tiene pendiente máxima y calcular el valor de esta pendiente. *(3,3 puntos)*

Solución:

La pendiente de la recta tangente a la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ *en cualquier punto de ella se obtiene calculando y´*

$$y'=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Sea $m=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ *, queremos que sea máxima, debe ser m´ = 0 y m´´ < 0.*

Calculemos m´ y m´´

$$m'=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2-(-2\,x)\,2\,\left(1+x^2\right)2\,x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)+8x^2}{\left(1+x^2\right)^3}=\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$$

$$m''=\frac{12x\left(1+x^2\right)^3-(6x^2-2)\,3\left(1+x^2\right)^2 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=\frac{12x\left(1+x^2\right)-(6x^2-2)\,6x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{12x+12x^3-36x^3+12x}{\left(1+x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{-24x^3+24x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{24x(1-x^2)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$m'=0\ \rightarrow\ \frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}=0\ \rightarrow\ 6x^2-2=0\ \rightarrow\ 6x^2=2\ \rightarrow\ x^2=\frac{2}{6}\ \rightarrow$$

$$\rightarrow\ x^2=\frac{1}{3}\ \rightarrow\ x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$Para\quad x=\frac{1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\ m''=\frac{24\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^4}=\frac{24\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{\frac{24}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4}>0\ \Rightarrow\ mínimo$$

$$Para\quad x=\frac{-1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\ m''=\frac{24\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(1-\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}{\left(1+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^4}=\frac{24\frac{-1}{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^4}=\frac{\frac{-24}{\sqrt{3}}\,\frac{2}{3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^4}<0\ \Rightarrow\ máximo$$

$$Para\quad x=\frac{-1}{\sqrt{3}}\ \rightarrow\ y=\frac{1}{1+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$$

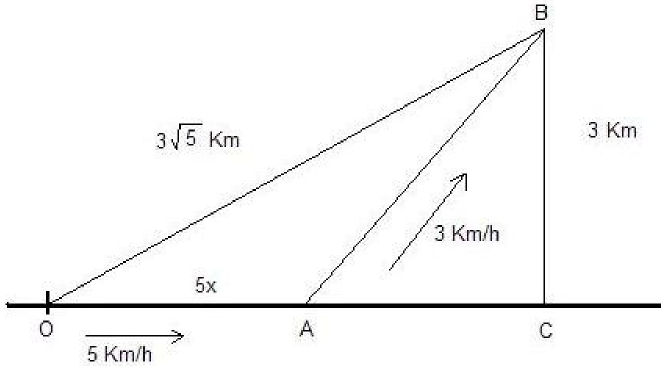
$$m=\frac{-2\,\frac{-1}{\sqrt{3}}}{\left(1+\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{16}{9}}=\frac{18}{16\sqrt{3}}=\frac{9}{8\sqrt{3}}=\frac{9\sqrt{3}}{8\,.\,3}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

En conclusión, el punto de curva $y = \frac{1}{1+x^2}$ *en que la recta tangente a ella tiene pendiente máxima es* $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{3}{4}\right)$ *y esta pendiente es* $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Desde un punto N de la orilla del mar, un nadador debe alcanzar una boya que flota a 3 kilómetros de la costa y dista $3\sqrt{5}$ kilómetros del punto N. Si recorriendo la orilla (que se supone recta y plana), su velocidad media es de 5 kilómetros por hora y nadando, de 3 kilómetros por hora, ¿cuánto tiempo deberá caminar hasta lanzarse al mar, para alcanzar la boya en el menor tiempo posible? (3,3 puntos)

Solución:
La representación gráfica del problema es,



OA distancia que recorre por la orilla.

AB distancia que recorre nadando

Si x = tiempo que camina por la orilla

OA = 5 x
calculemos AB.

En el triángulo rectángulo OCB, ángulo recto en C, aplicamos el teorema de Pitágoras,

$\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 3^2 + OC^2 \quad \rightarrow \quad 45 = 9 + OC^2 \quad \rightarrow \quad 36 = OC^2 \quad \rightarrow \quad OC = 6$ *por lo tanto AC = 6 – 5 x.*

En el triángulo rectángulo ACB,

$$AB^2 = 3^2 + (6-5x)^2 \quad \rightarrow \quad AB^2 = 9 + 36 - 60x + 25x^2 \quad \rightarrow \quad AB^2 = 45 - 60x + 25x^2 \quad \rightarrow \quad AB = \sqrt{45-60x+25x^2}$$

nadando estará $\dfrac{\sqrt{45-60x+25x^2}}{3}$ *horas*

El tiempo empleado en ir desde N hasta B será: $T = x + \dfrac{\sqrt{45-60x+25x^2}}{3}$

Como 45 – 60 x + 25 x^2 = (5 x – 6 $)^2$ + 9 > 0 para cualquier valor de x, Dom T = $[0, +\infty)$

Queremos que el tiempo empleado sea el menor posible. Buscamos los mínimos relativos de T.

$$T' = 1 + \frac{1}{3}\,\frac{50x-60}{2\sqrt{45-60x+25x^2}} = 1 + \frac{50x-60}{6\sqrt{45-60x+25x^2}} = 1 + \frac{25x-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}}$$

$$T' = 0$$

$$1 + \frac{25x-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}} = 0 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2} + 25x - 30 = 0 \quad \rightarrow \quad 3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2} = 30 - 25x$$

$$\left(3\sqrt{5}\sqrt{9-12x+5x^2}\right)^2 = (30-25x)^2 \quad \rightarrow \quad 45\left(9-12x+5x^2\right) = 900 - 1500x + 625x^2$$

$$9\left(9-12x+5x^2\right) = 180 - 300x + 125x^2 \quad \rightarrow \quad 81 - 108x + 45x^2 = 180 - 300x + 125x^2$$

$$80x^2 - 192x + 99 = 0$$

$$x = \frac{192 \pm \sqrt{(-192)^2 - 4.80.99}}{2.80} = \frac{192 \pm \sqrt{5184}}{160} = \frac{192 \pm 72}{160} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{192+72}{160} = \dfrac{264}{160} = \dfrac{33}{20} = 1'65 \\[2ex] x_2 = \dfrac{192-72}{160} = \dfrac{120}{160} = \dfrac{3}{4} = 0'75 \end{array} \right.$$

Como estamos resolviendo una ecuación irracional, debemos comprobar estos valores de x en la ecuación inicial,

$x = 1'65$

$$1+\frac{25\,.\,1'65-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12\,.\,1'65+5\,.\,1'65^2}}=0$$

x = 1´65 no es solución.

$$1+\frac{11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{2'8125}}=0 \quad\rightarrow\quad 1+\frac{11'25}{11'25}=0 \quad\rightarrow\quad 2=0 \quad \textit{Falso}$$

$x = 0'75$

$$1+\frac{25\,.\,0'75-30}{3\sqrt{5}\sqrt{9-12\,.\,0'75+5\,.\,0'75^2}}=0$$

x = 0,75 es solución

$$1+\frac{-11'25}{3\sqrt{5}\sqrt{2'8125}}=0 \quad\rightarrow\quad 1-\frac{11'25}{11'25}=0 \quad\rightarrow\quad 0=0 \quad \textit{Cierto}$$

Este valor que anula T´ divide el dominio de T en dos intervalos, calculemos el signo de T´ en cada uno de ellos,

int	x	T'
$0-0'75$	$0'5$	$1+\frac{25.0'5-30}{3\sqrt{5}\sqrt{5\,.\,0'5^2-12\,.\,0'5+9}}=1+\frac{-17'5}{3\sqrt{5}\sqrt{4'25}}=-0'265\ <0$
$0'75-$	1	$1+\frac{25.1-30}{3\sqrt{5}\sqrt{5\,.\,1^2-12\,.\,1+9}}=1+\frac{-5}{3\sqrt{5}\sqrt{2}}=0'473\ >0$

La función T es decreciente en $(0,\,0'75)$
creciente en $(0'75,\,+\infty)$

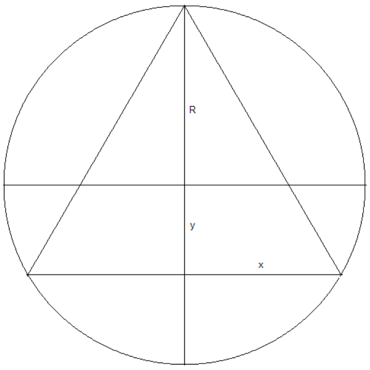
En x = 0´75 la función T tiene un mínimo relativo, que además es el mínimo absoluto ya que en ese punto la función pasa de decreciente a creciente.

Solución: hasta lanzarse al mar deberá caminar durante 0´75 h, es decir, 45 minutos.

EJERCICIO A

PROBLEMA 4.1. Probar que el volumen de cualquier cono recto inscrito en una esfera es menor que el 30% del volumen de la misma *(3,3 puntos)*.

Solución:
Al inscribir un cono en una esfera, los volúmenes de ambos cuerpos son, llamando R al radio de la esfera,

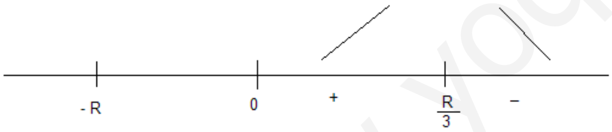


$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\, x^2 (y+R)$$
$$siendo \quad x^2 + y^2 = R^2, \quad x, y > 0$$

despejando x^2, expresamos el volumen del cono en función de y, $x^2 = R^2 - y^2$, luego
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\,(R^2 - y^2)\,(y+R) = \frac{1}{3}\pi\left(R^3 + R^2 y - R\, y^2 - y^3\right)$$

Busquemos el mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera de radio R,
$$V' = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\, y - 3y^2\right)$$
$$V' = 0 \;\rightarrow\; \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - 2R\, y - 3y^2\right) = 0 \;\rightarrow\; R^2 - 2R\, y - 3y^2 = 0$$
$$3y^2 + 2R\, y - R^2 = 0 \;\rightarrow\; y = \frac{-2R \pm \sqrt{(2R)^2 - 4\,.\,3\,(-R^2)}}{6} = \frac{-2R \pm \sqrt{4R^2 + 12R^2}}{6} = \frac{-2R \pm 4R}{6} = \left\langle \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{2R}{6} = \dfrac{R}{3} \\ y_2 = \dfrac{-6R}{6} = -R \end{array} \right.$$

Puesto que los valores de y deben ser positivos, estudiamos el signo de V´en R^+,
como V´ es un polinomio de 2º grado con coeficiente de y^2 negativo, obtenemos



Para $y = R/3$ V alcanza un máximo relativo; por ser V creciente en el intervalo (0, R/3) y decreciente en (R/3,+∞) este máximo es absoluto. Es decir que el mayor cono recto que podemos inscribir en una esfera de radio R es aquel cuyo volumen es:
$$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \left(\frac{R}{3}\right)^2\right)\left(\frac{R}{3} + R\right) = \frac{1}{3}\pi\left(R^2 - \frac{R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{9R^2 - R^2}{9}\right)\left(\frac{4R}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{8R^2}{9}\frac{4R}{3} = \frac{32}{81}\pi\, R^3$$

Comprobemos que con el mayor cono recto inscrito en la esfera se cumple la condición del problema,
$$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\, R^3$$
$$V_{cono} = \frac{32}{81}\pi\, R^3$$
$$¿V_{cono} < \frac{30}{100} V_{esfera}?$$
$$\frac{32}{81} < \frac{30}{100}\frac{4}{3} \;\rightarrow\; \frac{32}{81} < \frac{10}{25} \;\rightarrow\; 0'395 < 0'4 \quad \textit{Sí}$$

Como el volumen del mayor cono recto que podemos inscribir en la esfera cumple la condición del problema, cualquier cono recto inscrito en una esfera la cumple.

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1 La concentración en sangre de un fármaco después de su toma es $C(t) = 0{,}29483\ t + 0{,}04253\ t^2 - 0{,}00035\ t^3$ mg/ml, donde t es el tiempo transcurrido en minutos. Se pide:

a) Calcular el periodo de tiempo durante el cual el fármaco actúa (*1,8 puntos*).
b) Determinar en qué instante la concentración del fármaco es máxima (*1,5 puntos*).

Solución:

a) El fármaco actúa en el intervalo de tiempo en que $C(t) > 0$ para $t > 0$

Como C(t) es una función polinómica buscamos los valores de t / C(t) = 0

$0{,}29483\ t + 0{,}04253\ t^2 - 0{,}00035\ t^3 = 0$; sacando factor común t

$t\ (0{,}29483 + 0{,}04253\ t - 0{,}00035\ t^2) = 0$

$$\left\langle \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ 0{,}29483 + 0{,}04253 t - 0{,}00035 t^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \dfrac{-0{,}04253 \pm \sqrt{0{,}04253^2 - 4\ (-0{,}00035)\ 0{,}29483}}{2\ (-0{,}00035)} = \\ \dfrac{-0{,}04253 \pm \sqrt{0{,}0022215629}}{-0{,}0007} = \dfrac{-0{,}04253 \pm 0{,}0471334}{-0{,}0007} = \left\langle \begin{array}{l} t_2 = 128{,}0906548 \\ t_3 = -6{,}576369131 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Estudiamos el signo de C(t) en los dos intervalos positivos que hemos obtenido,

intervalo	t	C(t)	
$(0, 128'09)$	1	0,33701	*positivo*
$(128'09, +\infty)$	1000	$-307175{,}17$	*negativo*

Esto quiere decir que el periodo durante el cual el fármaco actúa es de 0 a 128,090 minutos

b) Para encontrar el instante en que la concentración del fármaco es máxima, buscamos los extremos relativos de C(t).

$C'(t) = 0{,}29483 + 0{,}08506\ t - 0{,}00105\ t^2$

$$C'(t) = 0 \quad \rightarrow \quad t = \frac{-0{,}08506 \pm \sqrt{0{,}08506^2 - 4\ (-0{,}00105)\ 0{,}29483}}{2\ (-0{,}00105)} = \frac{-0{,}08506 \pm \sqrt{0{,}0084734896}}{-0{,}0021} =$$

$$= \frac{-0{,}08506 \pm 0{,}0920515}{-0{,}0021} = \left\langle \begin{array}{l} t_1 = -3{,}329314 \\ t_2 = 84{,}33887 \end{array}\right.$$

$C''(t) = 0{,}08506 - 0{,}00105\ t$

Para $t = -3{,}329314$; $C''(t) = 0{,}08506 - 0{,}00105\ (-3{,}329314) = 0{,}0885557$ positivo, luego en $t = -3{,}329314$ hay un mínimo relativo

Para $t = 84{,}33887$; $C''(t) = 0{,}08506 - 0{,}00105\ (84{,}33887) = -0{,}0034958$ negativo, luego en $t = 84{,}33887$ hay un máximo relativo

Como C(t) es un polinomio de 3º grado, es una función continua; en los extremos del intervalo en que el fármaco actúa C(0) = 0, C(128,090) = 0 por lo que el máximo relativo que tiene C(t) en t=84,33887 es un máximo absoluto.

La concentración del fármaco es máxima al cabo de 84,33 minutos de su toma.

EJERCICIO A

PROBLEMA 3.

a) Dibujar razonadamente la gráfica de la función $g(x) = x^2 - 4$, cuando $-1 \le x \le 4$ *(1,1 puntos)*.

b) Obtener razonadamente los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f(x) = |x^2 - 4|$ en el intervalo $[-1, 4]$ *(1,1 puntos)*.

c) Calcular el área del recinto limitado por la curva de ecuación $y = f(x)$ y las rectas $x = -1$, $x = 4$ e $y = 0$ *(1,1 puntos)*.

Solución:

a)

Como la función g(x) esta definida como un trozo de parábola, haremos los cálculos (puntos de corte con los ejes, vértice) para representar la parábola y calcularemos los puntos de inicio y fin de g(x).

$y = x^2 - 4$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

eje OY, $x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$, $(0, -4)$

eje OX, $y = 0$ $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4$; $x = \pm 2$, $(2, 0)$ y $(-2, 0)$

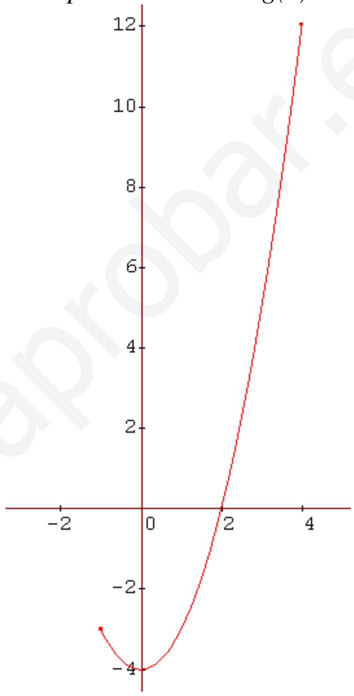
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0 \quad , \quad (0, -4)$$

Calculemos el inicio y fin de g(x)

inicio $x = -1$, $y = (-1)^2 - 4 = 1 - 4 = -3$; $(-1, -3)$

fin $x = 4$, $y = 4^2 - 4 = 16 - 4 = 12$; $(4, 12)$

La representación de g(x) será:



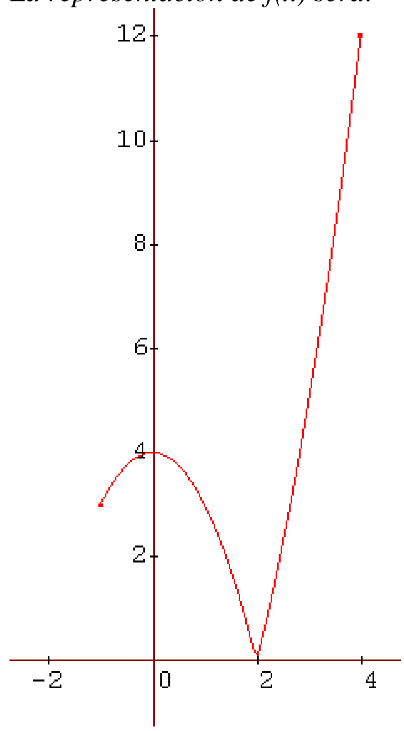
b)

$f(x) = |x^2 - 4|$ *en el intervalo [-1, 4]*

Por su definición $f(x) = |g(x)|$

Por lo que podemos dibujar la función f(x) a partir de la representación de g(x) trazando la parte negativa de g(x) simétrica respecto del eje OX.

La representación de f(x) será:



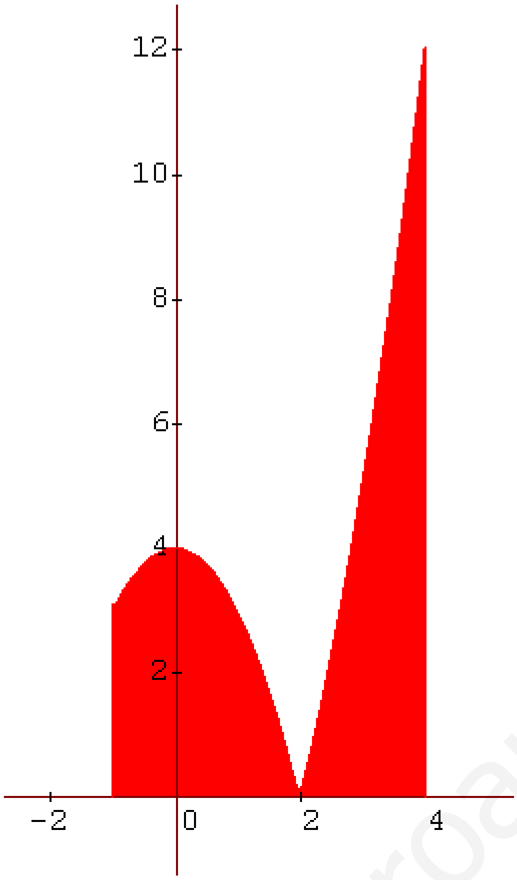
Los valores máximo y mínimo absoluto de f(x) podemos obtenerlos directamente de la gráfica,

el máximo absoluto se alcanza en el punto (4 , 12)

el mínimo absoluto se alcanza en el punto (2 , 0) *c)*

La definición de f(x) es $f(x)=\begin{cases}-x^2+4 & , \quad -1\le x<2\\ x^2-4 & , \quad 2\le x\le 4\end{cases}$

El área a calcular será



La obtendremos mediante el siguiente cálculo integral,

$$A=\int_{-1}^{2}\left(-x^2+4\right)dx+\int_{2}^{4}\left(x^2-4\right)dx=\left[\frac{-x^3}{3}+4x\right]_{-1}^{2}+\left[\frac{x^3}{3}-4x\right]_{2}^{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{-8}{3}+8\right)-\left(\frac{1}{3}-4\right)\right]+\left[\left(\frac{64}{3}-16\right)-\left(\frac{8}{3}-8\right)\right]=$$

$$=\frac{-8}{3}+8-\frac{1}{3}+4+\frac{64}{3}-16-\frac{8}{3}+8=\frac{47}{3}+4=\frac{47+12}{3}=\frac{59}{3}$$

El área del recinto pedido mide $\frac{59}{3}$ *u. a.*

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Dada la función f(x) = ln x en el intervalo cerrado [1 , e], siendo e = 2,718281…:

a) Razonar que existe un punto P de la gráfica y = ln x en el que la recta tangente a ella es paralela a la recta que pasa por los puntos A = (1, 0) y B = (e, 1) *(1 punto)*.

b) Obtener el punto P considerado en a) *(1,8 punto)*.

c) Calcular la pendiente de la recta tangente a y = ln x en ese punto P *(0,5 puntos)*.

Solución:

a) $f(x) = Ln\,x\;,\; x \in [\,1\,,\,e\,]$

Calculemos los valores de la función f(x) en los extremos del intervalo de definición,

f(1) = Ln 1 = 0 , luego el punto A(1,0) es de la gráfica de y = Ln x

f(e) = Ln e = 1 , luego el punto B(e,1) “ “ “ “ “ “

Veamos si f(x) verifica las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo [1,e]

f(x) es continua en [1,e] por ser f(x) continua en (0,+∞)

f(x) es derivable en (1,e) por la misma razón que antes

como f(x) verifica las condiciones del TVM concluimos que

$$\exists\, c \in (1,e)\ /\ f'(c) = \frac{f(e)-f(1)}{e-1} = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$$

La recta que pasa por los puntos A y B tiene de pendiente $\dfrac{1-0}{e-1} = \dfrac{1}{e-1}$

Por lo tanto en el punto de abcisa c, valor obtenido en el TVM, la recta tangente a f(x) cuya pendiente es f’(c), es paralela a la recta que pasa por A y B (puesto que tienen la misma pendiente)

Solución: el punto P de la gráfica buscado es el (c , Ln c)

b)

$$Como \quad f'(x) = \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{e-1} \quad \rightarrow \quad c = e-1$$

El punto P será (e – 1 , Ln (e – 1))

c)

La pendiente de la recta tangente a y = Ln x en el punto P será, según lo obtenido en los apartados anteriores, $\dfrac{1}{e-1}$

EJERCICIO B

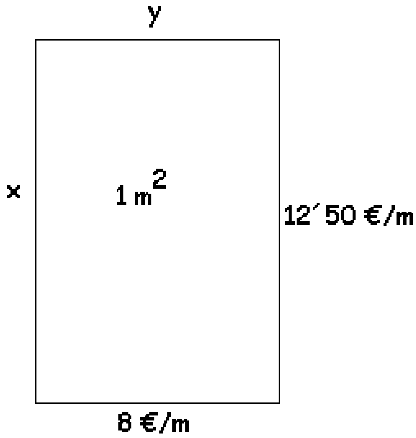
PROBLEMA 4. El coste del marco de una ventana rectangular es 12,50 € por metro lineal de los lados verticales y 8 € por metro lineal de los lados horizontales.

a) Calcular razonadamente las dimensiones que debe tener el marco de una ventana de 1 m^3 de superficie para que resulte lo más económico posible *(2,3 puntos)*.

b) Calcular, además el coste de ese marco más económico posible considerado en a) *(1 punto)*.

Solución:

a)



Los datos iniciales del problema podemos representarlos mediante la figura de la izquierda.

Llamando C al coste del marco de la ventana, éste se obtendrá:

C = 12´5 . 2 x + 8 . 2 y (x longitud vertical e y longitud horizontal en m.)

C= 25 x + 16 y

Como la superficie de la ventana debe ser de 1 m^2,

$$x\ y = 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad C = 25\,x + \frac{16}{x}$$

Busquemos el valor de x para él que sale un coste mínimo.

$$C' = 25 - \frac{16}{x^2}$$

$$25 - \frac{16}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 25\,x^2 = 16 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{16}{25} \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{16}{25}}$$

La solución negativa no tiene sentido, ya que x es la longitud de un lado

$$x = \sqrt{\frac{16}{25}} = 0´8$$

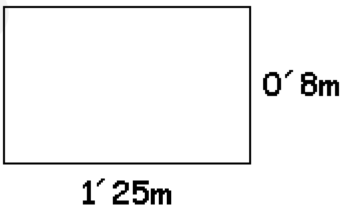
$$C'' = \frac{32}{x^3}$$

Para x = 0´8, C'' > 0, luego en x = 0´8 hay un mínimo.

Para x = 0´8 y = 1´25

Para que el marco resulte lo más económico posible debe tener 0´8 m de lado vertical y 1´25 m de lado horizontal.

La solución es una ventana de la forma



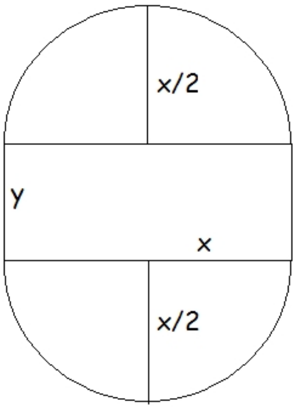
b)

El coste del marco obtenido en el apartado anterior será: C = 25 . 0´8 + 16 . 1´25 = 40, es decir, 40 €.

PROBLEMA A.3. Se quiere construir un estadio vallado de 1000 metros cuadrados de superficie. El estadio está formado por un rectángulo de base x y dos semicírculos exteriores de diámetro x, de manera que cada lado horizontal del rectángulo es diámetro de uno de los semicírculos. El precio de un metro de valla para los lados verticales del rectángulo es de 1 euro y el precio de un metro de valla para las semicircunferencias es de 2 euros. Se pide obtener razonadamente:

a) La longitud del perímetro del campo en función de x. *(3 puntos)*
b) El coste f(x) de la valla en función de x. *(3 puntos)*
c) El valor de x para el que el coste de la valla es mínimo. *(4 puntos)*

Solución:
La forma del estadio vallado será,



a) El perímetro a vallar medirá: $2y + 2\pi\, x/2 = 2y + \pi x$

Para poder expresar el perímetro en función de x, hay que buscar la relación entre x e y.
La relación la obtendremos a partir del valor de la superficie del estadio (10000 m²)
El estadio está formado por un rectángulo y dos semicírculos,
- rectángulo de lados x e y $\rightarrow A_R = x\,y$
- dos semicírculos de radio x/2 $\rightarrow A_{SC} = (1/2)\,\pi\,(x/2)^2 = (1/2)\,\pi\,(x^2/4) = \pi\,x^2/8$
el área de los dos semicírculos será: $2\,\pi\,x^2/8 = \pi\,x^2/4$

$$\text{Área del estadio} = xy + \frac{\pi}{4}x^2$$

$$\text{Luego} \quad 10000 = xy + \frac{\pi}{4}x^2 \qquad \text{despejemos } y$$

$$10000 - \frac{\pi}{4}x^2 = xy \quad \rightarrow \quad y = \frac{10000 - \frac{\pi}{4}x^2}{x} = \frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x$$

$$\text{Finalmente,} \quad P(x) = 2\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + \pi\,x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + \pi\,x = \frac{20000}{x} + \frac{\pi}{2}x$$

b) Coste de la valla,

$$f(x) = 1\,.\,2\,.\left(\frac{10000}{x} - \frac{\pi}{4}x\right) + 2\,\pi\,x = \frac{20000}{x} - \frac{\pi}{2}x + 2\pi\,x = \frac{20000}{x} + \frac{3\pi}{2}x$$

c) x / coste de la valla sea mínimo

Debemos buscar el mínimo de $f(x) = \dfrac{20000}{x} + \dfrac{3\pi}{2}x$

Previamente nos interesa conocer el dominio de f(x). Como x representa la longitud del lado de un rectángulo debe ser un número positivo. Además, en la definición de la función la x está en el denominador (no puede ser 0). Por lo tanto Dom f(x) = (0 , +∞)

$$f'(x) = \frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

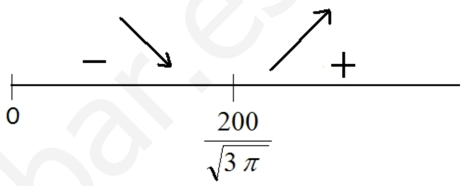
$$\frac{-20000}{x^2} + \frac{3\pi}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{20000}{x^2} = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{40000}{3\pi} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{40000}{3\pi}} = \pm\frac{200}{\sqrt{3\pi}} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{200}{\sqrt{3\pi}} \approx 65'1470 \\ x_2 = \dfrac{-200}{\sqrt{3\pi}} \notin Dom\ f(x) \end{array} \right.$$

Representamos en la recta real el dominio de f(x) y el valor de x obtenido anteriormente y estudiamos el signo de f´(x) en los dos intervalos que obtenemos,

x	$f'(x)$
1	$\frac{-20000}{1^2} + \frac{3\pi}{2} = -19995'2876 < 0$
100	$\frac{-20000}{100^2} + \frac{3\pi}{2} = \frac{-20000}{10000} + \frac{3\pi}{2} = -2 + \frac{3\pi}{2} = 2'7124 > 0$

luego



Por lo que el mínimo relativo se alcanza para $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ *que además es el mínimo absoluto puesto que la función es decreciente a la izquierda y creciente a la derecha.*

Solución: ***el coste de la valla es mínimo para*** $x = \frac{200}{\sqrt{3\pi}}$ ***≈ 65´147 m***

PROBLEMA A.3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 3x + 2}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El dominio y las asíntotas de la función *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. *(4 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\,dx$ *(3 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Cálculo del dominio,

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4\,.\,1\,.\,2}}{2\,.\,1} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{3+1}{2} = 2 \\ \frac{3-1}{2} = 1 \end{cases}$$

Por lo que $Dom\ f(x) = \Re - \{1, 2\}$

Cálculo de las asíntotas,

Asíntotas verticales, las posibles asíntotas verticales son x = 1 y x = 2.

x = 1

$$\lim_{x \to 1} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{1^2 - 3\,.\,1 + 2} = \frac{1}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 1 \text{ es a. v.}$$

x = 2

$$\lim_{x \to 2} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2}{2^2 - 3\,.\,2 + 2} = \frac{2}{0} = \infty \quad \Rightarrow \quad x = 2 \text{ es a. v.}$$

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 - 3x + 2} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Luego y = 0 es la asíntota horizontal.

Asíntota oblicua,

Es una función racional con asíntota horizontal, por lo que no tiene asíntota oblicua. Comprobémoslo,

La asíntota oblicua será la recta de ecuación y = m x + n; calculando los coeficientes m y n

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3 - 3x^2 + 2x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como m = 0, no hay asíntota oblicua.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de f(x),
Estudiemos el signo de y´,

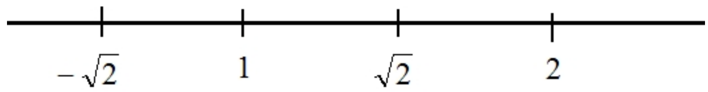
$$y' = \frac{1\left(x^2-3x+2\right)-x(2x-3)}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{\left(x^2-3x+2\right)^2} = \frac{-x^2+2}{\left(x^2-3x+2\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

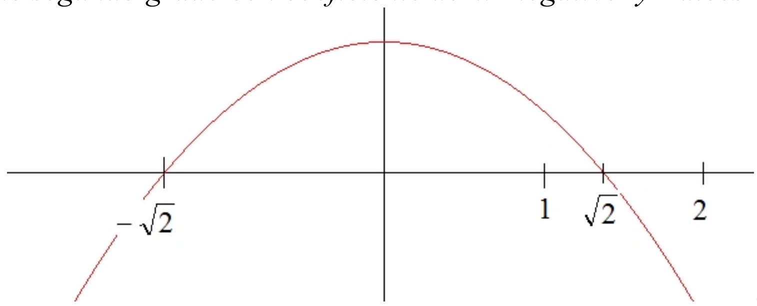
$-x^2+2=0 \quad \rightarrow \quad x^2=2 \quad \rightarrow \quad x=\pm\sqrt{2}$

$\left(x^2-3x+2\right)^2=0 \quad \rightarrow \quad x^2-3x+2=0 \quad \rightarrow \quad$ (*resuelta en el apartado a*)) $\quad x=1,2$

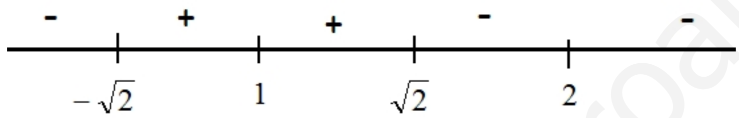
Representamos en la recta real las cuatro soluciones obtenidas y tenemos en cuenta el dominio de la función,



Como el denominador de y´ está elevado al cuadrado, el signo de y´ sólo depende del numerador que es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces $\pm\sqrt{2}$, es decir:



Por lo que el signo de y´ será:



Finalmente f(x) es creciente en $\left(-\sqrt{2}\,,1\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$ *y decreciente en* $\left(-\infty\,,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2}\,,2\right)\cup\left(2\,,+\infty\right)$.

c) Cálculo de la integral,
El denominador tiene dos raíces simples, x =1 y x =2, luego

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)\,(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)\,(x-2)}$$

Luego, $x = A\,(x-2) + B\,(x-1)$, *calculemos los valores de A y B:*
para $x=1 \;\rightarrow\; 1=-A+0 \;\rightarrow\; A=-1$
para $x=2 \;\rightarrow\; 2=0+B\,.\,1 \;\rightarrow\; B=2$

Entonces:

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \int\left(\frac{-1}{x-1}+\frac{2}{x-2}\right)dx = \int\frac{-1}{x-1}\,dx + \int\frac{2}{x-2}\,dx =$$

$$= -Ln\left|x-1\right| + 2\,Ln\left|x-2\right| + C$$

PROBLEMA B.3. Se desea construir un campo rectangular con vértices A, B, C y D de manera que:
Los vértices A y B sean puntos del arco de la parábola $y = 4 - x^2$, $-2 \le x \le 2$, y el segmento de extremos A y B es horizontal.
Los vértices C y D sean puntos del arco de la parábola $y = x^2 - 16$, $-4 \le x \le 4$, y el segmento de extremos C y D es horizontal.
Los puntos A y C deben tener la misma abcisa, cuyo valor es el número real positivo x.
Los puntos B y D deben tener la misma abcisa, cuyo valor es el número real negativo $-x$.
Se pide obtener **razonadamente**:

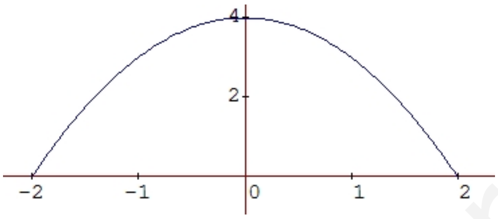
a) La expresión $S(x)$ del área del campo rectangular en función del número real positivo x. *(4 puntos)*
b) El número real positivo x para el que el área $S(x)$ es máxima. *(4 puntos)*
c) El valor del área máxima. *(2 puntos)*

Solución:
El arco de parábola $y = 4 - x^2 \,,\, -2 \le x \le 2$ *será:*

$x = 0 \rightarrow y = 4$

$y = 0 \rightarrow 4 - x^2 = 0$

$x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$

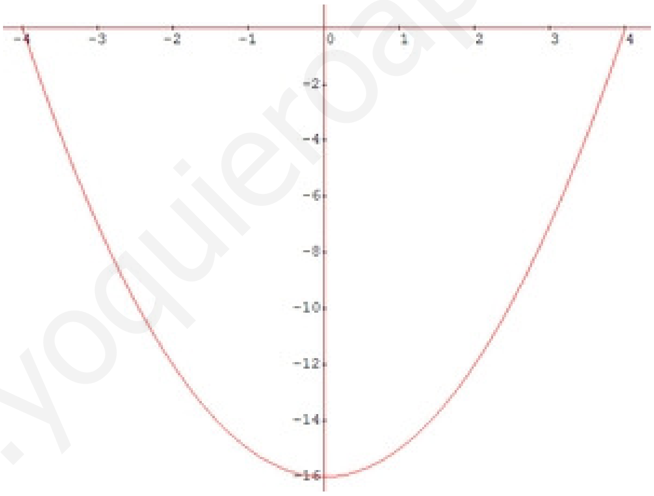


El arco de parábola $y = x^2 - 16 \,,\, -4 \le x \le 4$ *será:*

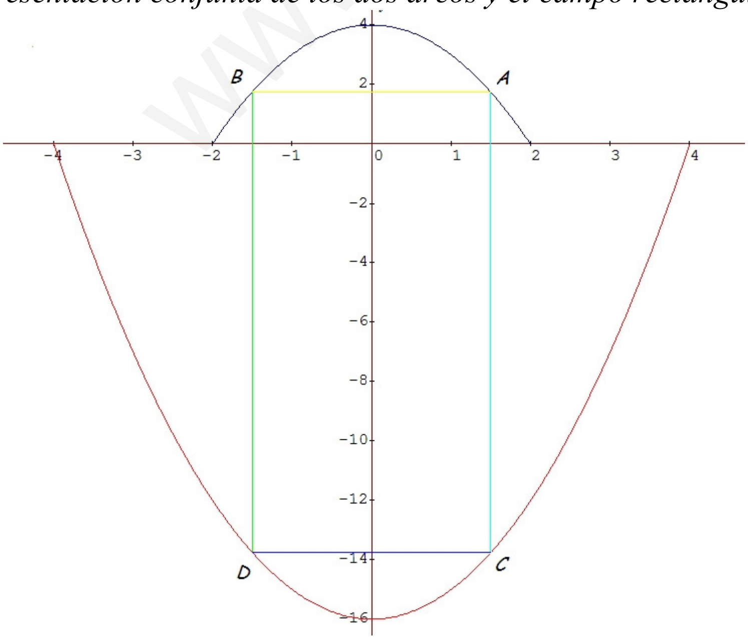
$x = 0 \rightarrow y = -16$

$y = 0 \rightarrow x^2 - 16 = 0$

$x^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4$



La representación conjunta de los dos arcos y el campo rectangular será:



Las coordenadas de los puntos son:

$A\left(x \,,\, 4 - x^2\right),\; B\left(-x \,,\, 4 - x^2\right)$

$C\left(x \,,\, x^2 - 16\right),\; D\left(-x \,,\, x^2 - 16\right)$

Por construcción $x \in (\,0\,,\,2\,]$

a) El área del campo rectangular será:

La base del rectángulo mide $2x$

La altura del rectángulo mide $4 - x^2 - (x^2 - 16) = 4 - x^2 - x^2 + 16 = 20 - 2x^2$

Por lo que $S(x) = 2x(20 - 2x^2) = 40x - 4x^3,\ x \in (0, 2]$

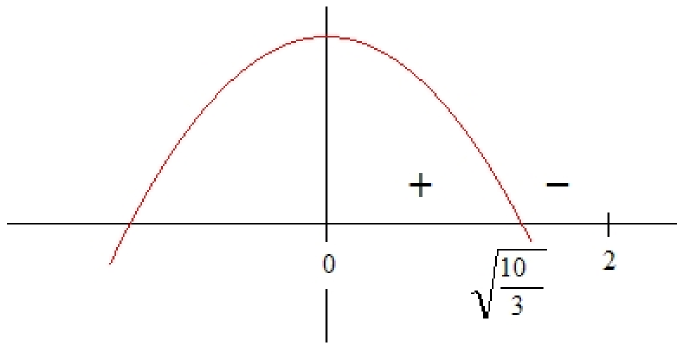
b) Para encontrar el máximo de $S(x)$ *estudiemos el signo de* $S'(x)$.

$S'(x) = 40 - 12x^2,\ x \in (0, 2]$

$40 - 12x^2 = 0;\quad 12x^2 = 40;\quad x^2 = \frac{40}{12};\quad x = \pm\sqrt{\frac{40}{12}} = \pm\sqrt{\frac{10}{3}}$. *Como* $x \in (0,2] \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{10}{3}} = 1'825 \in (0,2]$

Calculemos el máximo de forma gráfica.

$S'(x)$ *es un polinomio de 2º grado con coeficiente de* x^2 *negativo y raíces* $\pm\sqrt{\frac{10}{3}}$



Por lo tanto en $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ *hay un máximo absoluto ya que a la izquierda* $S'(x)$ *es creciente y a la derecha decreciente. Es decir,* $S(x)$ *es máxima para* $x = \sqrt{\frac{10}{3}}$.

c) Cálculo del valor del área máxima.

$$S\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right)^3 = 40\sqrt{\frac{10}{3}} - 4\,\frac{10}{3}\left(\sqrt{\frac{10}{3}}\right) = \left(40 - \frac{40}{3}\right)\sqrt{\frac{10}{3}} = \frac{80}{3}\sqrt{\frac{10}{3}} \cong 48'6864\,u^2$$

El valor del área máxima es de aproximadamente $48'6864\,u^2$.

PROBLEMA A.3. Con el símbolo *ln x* se representa el logaritmo de un número positivo *x* cuando la base del logaritmo es el número *e*. Sea *f* la función que para un número positivo *x* está definida por la igualdad

$$f(x) = 4\,x\,\ln x.$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de x donde la función f alcanza el mínimo relativo. *(4 puntos)*

b) La ecuación de la recta tangente a la curva $y = 4\,x\,\ln x$ en el punto (1,0). *(3 puntos)*

c) El área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ y $x = e^2$ y la curva $y = 4\,x\,\ln x$. *(3 puntos)*

Solución:

a) Mínimo relativo de f(x)

Primero obtengamos el dominio de f(x).

Como ln x sólo puede calcularse para valores de x > 0, $Dom\, f(x) = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 4\ln x + 4\,x\,\frac{1}{x} = 4\ln x + 4$$

$$f'(x) = 0 \quad\rightarrow\quad 4\ln x + 4 = 0$$

$$4\ln x = -4$$

$$\ln x = -1 \quad\rightarrow\quad x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

Calculemos la segunda derivada para determinar si es máximo o mínimo,

$$f''(x) = 4\,\frac{1}{x} = \frac{4}{x}$$

$$\text{Para}\quad x = \frac{1}{e} \quad\rightarrow\quad f''(x) = \frac{4}{1/e} = 4\,e > 0 \quad\Rightarrow\quad \text{mínimo}$$

La función f(x) alcanza el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e}$.

b) Recta tangente a $y = 4\,x\,\ln x$ *en* $(1, 0)$

Para $x = 1$, $y = 4 \cdot 1 \cdot \ln 1 = 0$, *el punto* $(1, 0)$ *es de la curva.*

De la recta pedida, un punto es $(1, 0)$ *y la pendiente será* $y'_{x=1}$.

$y' = 4\ln x + 4$ *(según hemos obtenido en el apartado anterior al calcular f´(x))*

$$y'_{x=1} = 4\ln 1 + 4 = 4$$

Por lo tanto, la recta tangente será:

$y - 0 = 4(x - 1)$; $\boldsymbol{y = 4x - 4}$

c) Área limitada entre las rectas $y = 0$, $x = e$ *y* $x = e^2$ *y la curva* $y = 4\,x\,\ln x$.

Para obtener esta área es conveniente realizar la representación gráfica del problema.

En primer lugar representemos la curva $y = 4\,x\,\ln x$,

Por cálculos de los apartados anteriores, de esta curva conocemos:

$Dom\, y = (0, +\infty)$

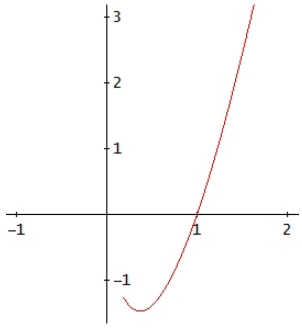
Su único extremo es el mínimo relativo en $x = \frac{1}{e} \rightarrow y = 4\,\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{-4}{e} \rightarrow \left(\frac{1}{e}, \frac{-4}{e}\right) \approx (0'368, -1'472)$

Puntos de corte con los ejes coordenados:

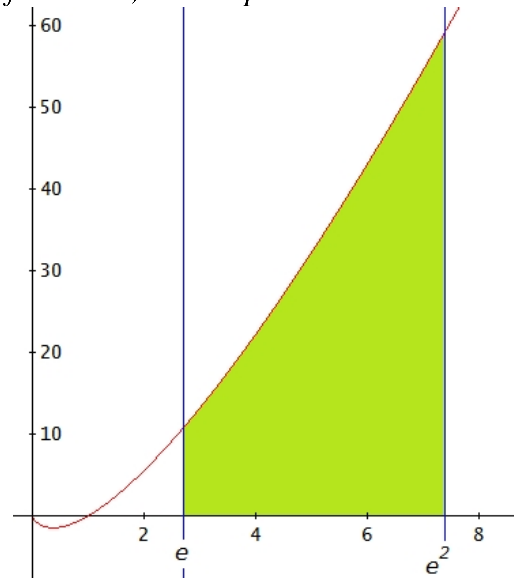
$x = 0$, *no es del dominio*

$$y = 0,\quad 4\,x\,\ln x = 0 \begin{cases} 4x = 0 \rightarrow x = 0 \notin Dom\, y \\ \ln x = 0 \rightarrow x = 1 \end{cases} \rightarrow (1,0)$$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Para obtener la región del plano de la que debemos calcular su área nos falta por representar las rectas $x = e$ *y* $x = e^2$. *Tanto* e *como* e^2 *son mayores que 1, por lo que no necesitamos realizar más cálculos sobre la curva. Gráficamente, el área pedida es:*



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_e^{e^2} (4\,x\ln x)\,dx$$

Calculemos en primer lugar la integral indefinida.

$$\int (4\,x\ln x)\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x & \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = 4x\,dx & \rightarrow \quad v = 2x^2 \end{array} \right\} = 2x^2\ln x - \int 2x^2\,\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= 2x^2\ln x - \int 2x\,dx = 2x^2\ln x - x^2$$

Por lo que,

$$\int_e^{e^2} (4\,x\ln x)\,dx = \left[2x^2\ln x - x^2\right]_e^{e^2} = \left[2\left(e^2\right)^2\ln e^2 - \left(e^2\right)^2\right] - \left[2\,e^2\ln e - e^2\right] =$$

$$= \left(2\,e^4\;2\ln e - e^4\right) - \left(2\,e^2\;1 - e^2\right) = 4\,e^4 - e^4 - \left(e^2\right) = 3e^4 - e^2 \approx 156´405394$$

Finalmente, el área pedida mide: $(\,3\,e^4 - e^2\,)$ *u.a.* $\approx$ *156´405394 u.a.*

PROBLEMA A.3. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El valor de m para el cual la función $f(x)=\begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x\le 0 \\ \dfrac{(x+1)\,sen\,x}{x}, & x>0 \end{cases}$ es continua en x = 0. *(3 puntos)*

b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x + 1)e^{2x}$. *(3 puntos)*

c) La integral $\int (x+1)e^{2x}\,dx$, *(2 puntos)* y el área limitada por la curva $y = (x+1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. *(2 puntos)*

Solución:

a) m? / f(x) es continua en x = 0

Condiciones para que f(x) sea continua en x = 0.

1) ¿Existe f(0)?

$f(0) = m\,(0+1)\,e^{2\cdot 0} = m\,e^0 = m\,.\,1 = m.$ *Existe* $f(0) = m$

2) ¿Existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *?*

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, *como a la izquierda y derecha de 0 la función f(x) tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,*

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0-}\left(m(x+1)e^{2x}\right)=m(0+1)e^{2.0}=m$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(x+1)\,sen\,x}{x}=\frac{(0+1)\,sen\,0}{0}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$ *(resolvemos la indeterminación aplicando la Regla de L´Hopital)* $$=\lim_{x\to 0^+}\frac{sen\,x+(x+1)\cos x}{1}=sen\,0+(0+1)\cos 0=1$$

Para que exista $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ *los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto m = 1.*

3) Para este valor de m se cumple la tercera condición de continuidad: $f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Luego, ***f(x) es continua en x = 0 para m = 1***.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = (x+1)\,e^{2x}$

En primer lugar, Dom y = $\Re$

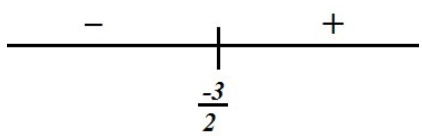
Calculemos y´

$$y' = e^{2x}+(x+1)\,2\,e^{2x}=e^{2x}+(2x+2)\,e^{2x}=(1+2x+2)\,e^{2x}=(2x+3)\,e^{2x}$$

Estudiemos el signo de y´

$$(2x+3)e^{2x}=0 \quad \begin{cases} 2x+3=0 \;\rightarrow\; x=\dfrac{-3}{2} \\ e^{2x}=0 \;\rightarrow\; \text{sin solución} \end{cases}$$

$\forall x\in\Re$ $e^{2x}>0$, *luego el signo de y´ solo depende de (2 x + 3) que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y cuya raíz es* $\frac{-3}{2}$, *por lo tanto el signo de (2 x + 3) es:*



Y finalmente, $y = (x+1)\,e^{2x}$ *es decreciente en* $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$ *y creciente en* $\left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$.

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x}\,dx = \left\{\begin{matrix} u = x+1 & \rightarrow & du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx & \rightarrow & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{matrix}\right\} = (x+1)\frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx =$$

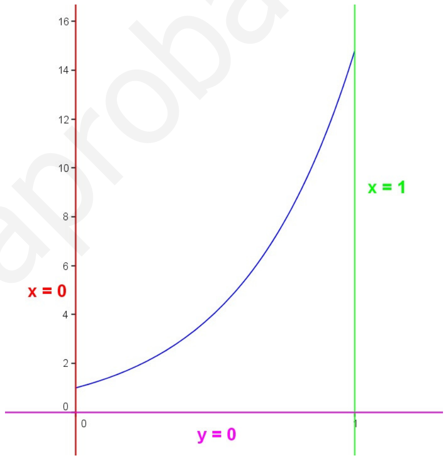
$$= \frac{x+1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\frac{1}{2}\;e^{2x} + C = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4}e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$$

Es decir, $\int (x+1)e^{2x}\,dx = \frac{2x+1}{4}e^{2x} + C$

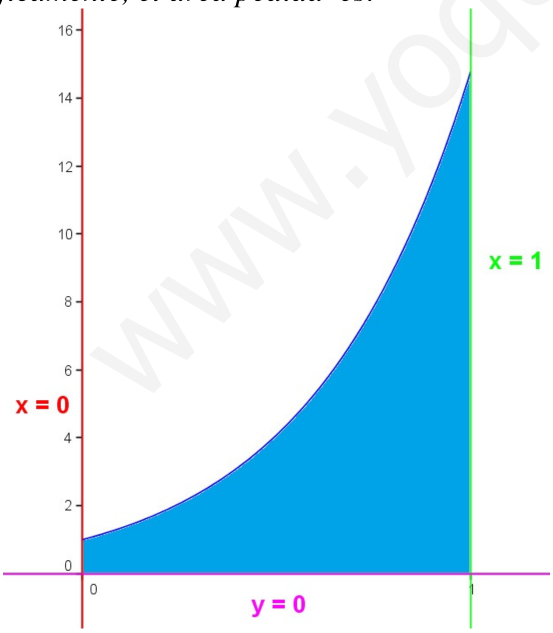
Para obtener el área limitada por la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *y las rectas* $x = 0$, $x = 1$ *e* $y = 0$ *es conveniente realizar la representación gráfica.*
En primer lugar representemos la curva $y = (x+1)\,e^{2x}$ *que según lo estudiado en el apartado b) entre* $x = 0$ *y* $x = 1$ *es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:*

x	$y = (x+1)\,e^{2x}$
0	1
1	$2\,e^2 \approx 14'78$

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x+1}{4}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{2.1+1}{4}e^{2.1} - \frac{2.0+1}{4}e^{2.0} =$$

$$= \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918\;u.a.$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(\frac{3}{4}e^2 - \frac{1}{4}\right)\;u.a. \approx 5'2918\;u.a.$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.3. Se tiene un cuadrado de mármol de lado 80 cm. Se produce la rotura de una esquina y queda un pentágono de vértices $A = (0, 20)$, $B = (20, 0)$, $C = (80, 0)$, $D = (80, 80)$ y $E = (0, 80)$. Para obtener una pieza rectangular se elige un punto $P = (x , y)$ del segmento AB y se hacen dos cortes paralelos a los ejes X e Y. Así se obtiene un rectángulo cuyos vértices son los puntos $P = (x , y)$, $F = (80, y)$, $D = (80, 80)$ y $G = (x, 80)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

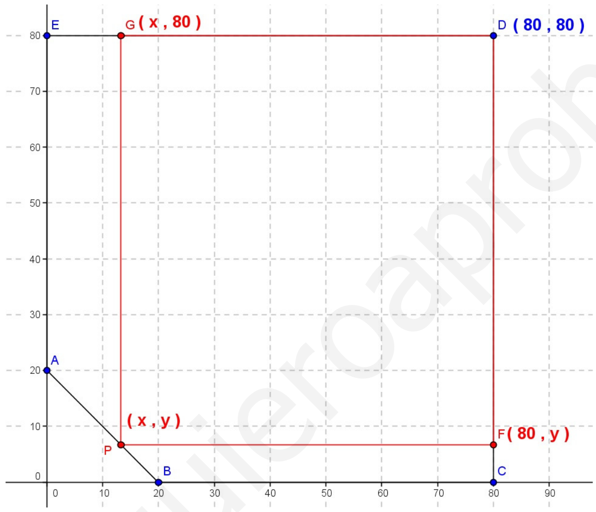
a) El área del rectángulo R en función de x, cuando $0 \le x \le 20$. *(3 puntos)*

b) El valor de x para el que el área del rectángulo R es máxima. *(5 puntos)*

c) El valor del área máxima del rectángulo R. *(2 puntos)*

Solución:

La representación gráfica del problema es:



a) Área del rectángulo R de vértices $PFDG$

El lado PF mide $(80 – x)$ cm, el lado PG mide $(80 – y)$ cm. El área del rectángulo R quedaría en función de x e y. Para expresar el área de R en función de x, consideramos que el punto $P (x , y) \in \overline{AB}$.

Calculamos la ecuación de la recta que pasa por A y B para expresar y en función de x.

$$\begin{cases} A = (0,20) \\ B = (20,0) \end{cases} \rightarrow r : \begin{cases} Punto\ (0,20) \\ v.\ director\ (20,-20) \approx (1,-1) \end{cases} \quad luego\ r : \frac{x-0}{1} = \frac{y-20}{-1} \rightarrow -x = y - 20 \rightarrow y = -x + 20$$

El área de rectángulo R será:

$$A_R = (80 – x) (80 – y) = (80 – x) [80 – (– x + 20)]= (80 – x) (80 + x – 20) = (80 – x) (60 + x) =$$
$$= – x^2 + 20 x + 4800$$

Solución: el área del rectángulo R es $– x^2 + 20 x + 4800$ (cm^2), cuando $0 \le x \le 20$ (cm)

b) Valor de x / A_R es máxima.

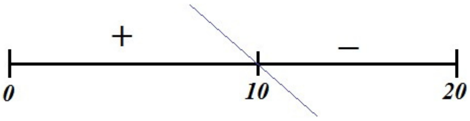
$A_R = -x^2 + 20x + 4800$, *cuando* $0 \le x \le 20$

$A_R' = -2x + 20$

$-2x + 20 = 0 \quad \to \quad -2x = -20 \quad \to \quad x = \dfrac{-20}{-2} = 10$

Estudiemos el signo de A_R' a la izquierda y derecha de 10.

Como A_R' es una recta de pendiente negativa cuya raíz es 10:



Luego en $x = 10$ A_R tiene un máximo relativo que es el absoluto en $[0, 20]$ ya que a la izquierda de 10 A_R es creciente y a la derecha es decreciente.

Solución: el área del rectángulo R es máxima para x = 10 cm.

c) Para $x = 10$, $A_R = -10^2 + 20 \cdot 10 + 4800 = -100 + 200 + 4800 = 4900$

Solución: el área máxima del rectángulo R mide 4900 cm²^{2}***.***

PROBLEMA B.3. Un pueblo está situado en el punto A (0, 4) de un sistema de referencia cartesiano. El tramo de un río situado en el término municipal del pueblo describe la curva

$$y = \frac{x^2}{4}, \quad \text{siendo } -6 \le x \le 6.$$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia entre un punto P (x, y) del río y el pueblo en función de la abcisa x de P. *(2 puntos)*

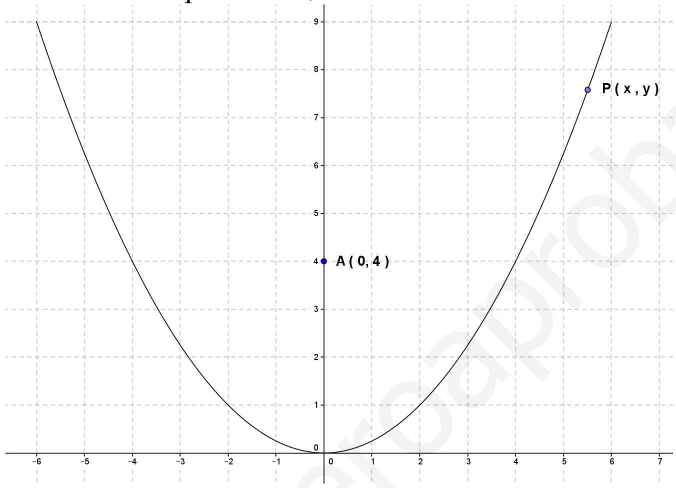
b) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia mínima del pueblo. *(4 puntos)*

c) El punto o puntos del tramo del río situados a distancia máxima del pueblo. *(4 puntos)*

Solución:

Representemos gráficamente los datos del problema,

x	$y = \frac{x^2}{4}$
-6	9
-4	4
0	0
4	4
6	9



a) ¿Distancia entre P y A?

$$d = d(P,A) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2} = [\text{como } P \text{ es de la curva } y = \frac{x^2}{4},\ ] = \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2}{4} - 4\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \frac{x^4}{16} - 8\,\frac{x^2}{4} + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} + x^2 - 2x^2 + 16} = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}$$

Solución: $d(P,A) = \sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16} \qquad x \in [-6, 6]$

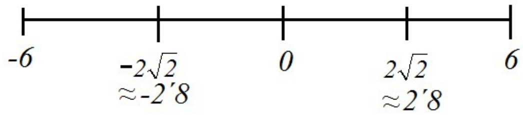
b) Debemos buscar el mínimo de la función d del apartado anterior.

$$d' = \frac{\frac{4x^3}{16} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}} = \frac{\frac{x^3}{4} - 2x}{2\sqrt{\frac{x^4}{16} - x^2 + 16}}$$

Estudiemos el signo de d´. En d´ el radicando del denominador lo obtuvimos como suma de dos términos al cuadrado, por tanto es positivo. Luego el denominador es positivo y el signo de d´ depende del numerador. Estudiamos el signo del numerador,

$$\frac{x^3}{4} - 2x = 0 \;\rightarrow\; x^3 - 8x = 0 \;\rightarrow\; x(x^2 - 8) = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 8 = 0 \;\rightarrow\; x^2 = 8 \;\rightarrow\; x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \end{array} \right.$$

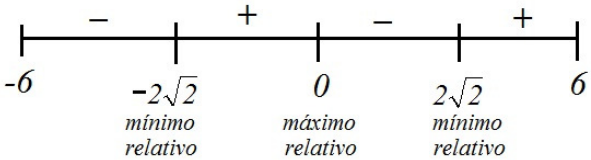
Tenemos que estudiar el signo de d' en los intervalos:



Como el numerador es un polinomio de tercer grado con tres raíces reales, el signo del polinomio alterna en los cuatro intervalos; sólo necesitamos calcular el signo de d' en uno de los intervalos.

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad d' = \frac{\frac{1^3}{4} - 2.1}{2\sqrt{\frac{1^4}{16} - 1^2 + 16}} = \frac{\frac{1}{4} - 2}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} = \frac{\frac{-7}{4}}{2\sqrt{\frac{1}{16} + 15}} < 0$$

Por tanto:



Como a la izquierda de los mínimos la función es decreciente y a la derecha creciente, uno de ellos o ambos serán los mínimos absolutos.
Calculemos el valor de d en los dos mínimos relativos obtenidos:

$$x = -2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^4}{16} - \left(-2\sqrt{2}\right)^2 + 16} = \sqrt{\frac{16\,.\,4}{16} - 4\,.\,2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

$$x = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{\left(2\sqrt{2}\right)^4}{16} - \left(2\sqrt{2}\right)^2 + 16} = \sqrt{\frac{16\,.\,4}{16} - 4\,.\,2 + 16} = \sqrt{4 - 8 + 16} = \sqrt{12}$$

Como en los dos mínimos relativos la función vale lo mismo, ambos son los absolutos.

Obtengamos los puntos del río,

$$x = -2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\left(-2\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{4\,.\,2}{4} = 2$$

$$x = 2\sqrt{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2}{4} = \frac{4\,.\,2}{4} = 2$$

***Solución: los puntos del río situados a distancia mínima del pueblo son** $\left(-2\sqrt{2}\,,\,2\right)$ y $\left(2\sqrt{2}\,,\,2\right)$.*

c) Del estudio realizado en el apartado anterior, el máximo relativo de la distancia se alcanza en $x = 0$. Pero como estamos trabajando con una función definida en un intervalo, el máximo absoluto se puede alcanzar en los extremos del intervalo o en el máximo relativo.
Veamos,

$$x = 0 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{0^4}{16} - 0^2 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$x = -6 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{(-6)^4}{16} - (-6)^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

$$x = 6 \quad \rightarrow \quad d = \sqrt{\frac{6^4}{16} - 6^2 + 16} = \sqrt{\frac{1296}{16} - 36 + 16} = \sqrt{61} = 7'8102$$

Es decir, ***los puntos del río situados a distancia máxima del pueblo son (– 6 , 9) y (6 , 9).***

PROBLEMA A.3. Se da la función f definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}$

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Dominio y asíntotas de la función f. *(2 puntos)*

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f. *(3 puntos)*

c) La integral $\int f(x)\,dx.$ *(3 puntos)*

d) El valor de a>4 para el que el área de la superficie limitada por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = 4$ y $x = a$ es ln(3/2). *(4 puntos)*

Solución:

a) Dominio y asíntotas.

Dominio,

$$f(x)=\frac{1}{x^2-5x+6}$$

$$x^2-5x+6=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4.1.6}}{2.1}=\frac{5\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{5\pm 1}{2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{5+1}{2}=3 \\ x_2=\dfrac{5-1}{2}=2\end{cases}$$

Por tanto, ***Dom f(x) =*** $\boldsymbol{\Re \sim \{2\,,\,3\}}$

Asíntotas.

Asíntotas verticales,

Las posibles asíntotas verticales son x = 2 y x = 3. Comprobemos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{2^2-5.2+6}=\frac{1}{0}=\infty,\ \textit{por tanto}\ \ x=2\ \ \textit{es asíntota vertical.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{3^2-5.3+6}=\frac{1}{0}=\infty,\ \textit{por tanto}\ \ x=3\ \ \textit{es asíntota vertical.}$$

Asíntota horizontal,

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{\infty}=0\\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{\infty}=0\end{array}\right\},\ \textit{por tanto}\ \ y=0\ \textit{es la asíntota horizontal}$$

Asíntota oblicua,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x^2-5x+6}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{1}{\infty}=0,\ \ \textit{por tanto no tiene asíntota oblicua.}$$

La función f tiene dos asíntotas verticales, x = 2 y x = 3, y una asíntota horizontal y = 0.

b) Monotonía de la función f.

Estudiemos el signo de f´(x).

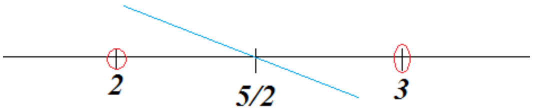
$$f'(x)=\frac{-(2x-5)}{\left(x^2-5x+6\right)^2}=\frac{-2x+5}{\left(x^2-5x+6\right)^2}$$

Obtengamos las raíces del numerador y del denominador,

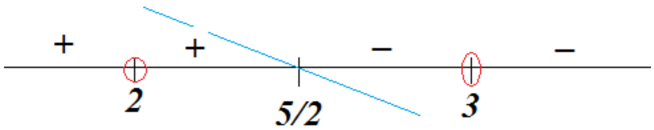
$$-2x+5=0 \rightarrow -2x=-5 \rightarrow x=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2}$$

$$\left(x^2-5x+6\right)^2=0 \rightarrow x^2-5x+6=0 \rightarrow \{resuelta\ en\ a)\}\begin{cases} x=2 \\ x=3 \end{cases}$$

Como en f´(x) el denominador es un término al cuadrado, es positivo. Luego el signo de f´ depende del numerador que, gráficamente, es una recta de pendiente negativa que pasa por (5/2 , 0), por lo que:



El signo de f´ es:



Finalmente, ***f(x) es creciente en*** $\left(-\infty, 2\right) \cup \left(2, \frac{5}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{5}{2}, 3\right) \cup \left(3, +\infty\right)$.

c) $\int f(x)\,dx$.

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx \overset{*}{=}$$

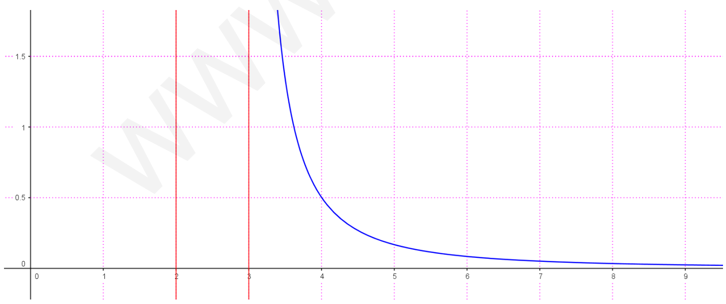
$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)\,(x-3)} \rightarrow 1 = A(x-3)+B(x-2)$$

$$\begin{array}{l} Para\ \ x=3 \ \rightarrow\ 1 = B \\ Para\ \ x=2 \ \rightarrow\ 1 = -A \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{l} A = -1 \\ B = 1 \end{array}$$

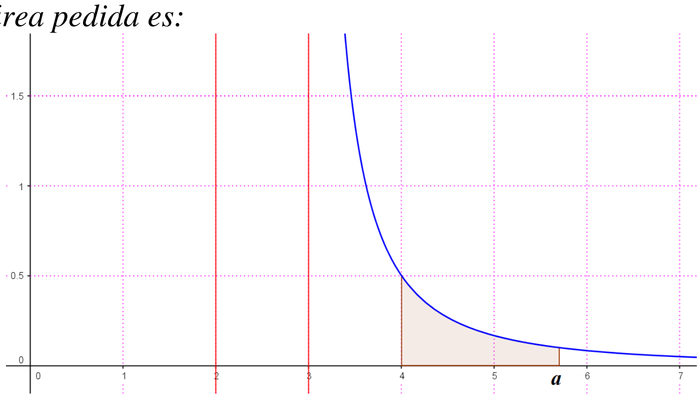
$$\overset{*}{=}\int\left(\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}\right)dx = -Ln|x-2| + Ln|x-3| + C = Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C$$

d) *¿a? / a>4 y el área de la superficie limitada por y = f(x) y las rectas y = 0, x = 4 y x = a es ln(3/2).*
Para determinar el área a calcular representemos la función f(x), para $x \geq 4$, a partir de la información obtenida en los apartados a) y b) y algún punto de la función, por ejemplo,

$$x=4, \quad f(4) = \frac{1}{4^2-5.4+6} = \frac{1}{2}.$$



El área pedida es:



Para calcular este área realizamos la siguiente integral definida:

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$$

Considerando la integral indefinida obtenida el apartado c,

$$\int_4^a \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx = \left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right|\right]_4^a =$$

$$= \left[Ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| \right]_4^a = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{4-3}{4-2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\left|\frac{1}{2}\right| = Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2}$$

Como el área debe ser Ln(3/2), entonces:

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| - Ln\frac{1}{2} = Ln\frac{3}{2}$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \left(Ln\frac{3}{2}\right) + \left(Ln\frac{1}{2}\right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$Ln\left|\frac{a-3}{a-2}\right| = Ln\left(\frac{3}{4}\right) \quad \rightarrow \quad \left|\frac{a-3}{a-2}\right| = \frac{3}{4} \quad \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = 3a-6 \quad \rightarrow \quad a = 6 \\[2ex] \dfrac{a-3}{a-2} = \dfrac{-3}{4} \quad \rightarrow \quad 4a-12 = -3a+6 \quad \rightarrow \quad 7a = 18 \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad a = \dfrac{18}{7} = 2'5\ldots < 4 \end{array} \right.$$

Como a debe ser mayor que 4, ***la solución es a = 6****.*

PROBLEMA A.3. Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m. de anchura, con el punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m. más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N. Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que $M = (0, 6)$, $P = (x, 0)$ y $N = (18, 0)$. El cable *MP* tiene que ser más grueso debido a que cruza la calle sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10 €/m. El precio del cable *PN* es de 5 €/m. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

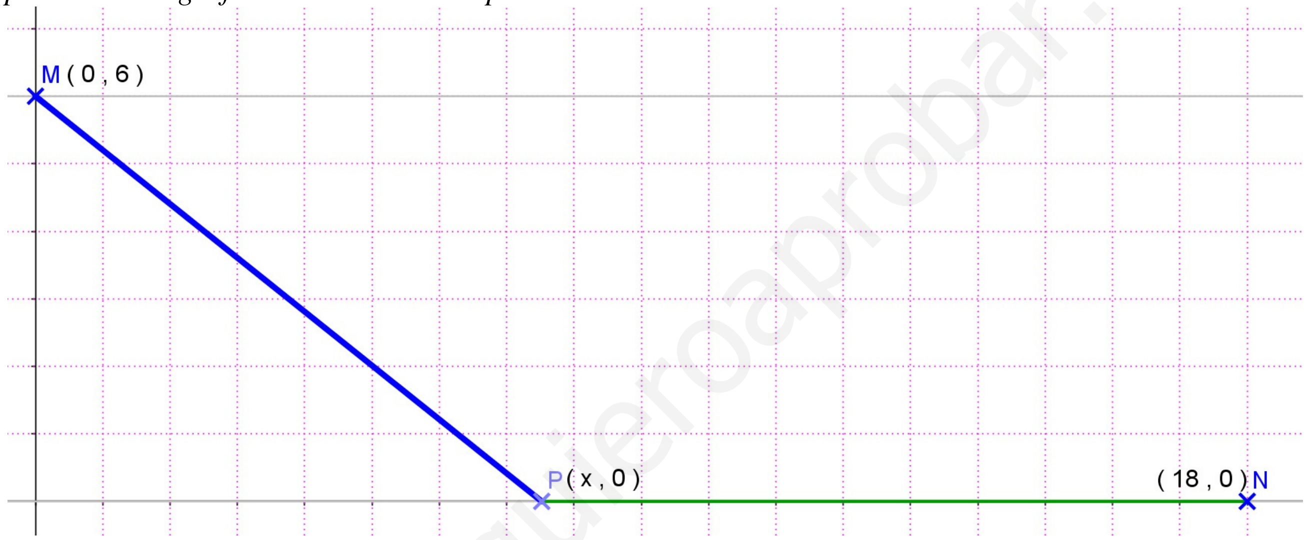
a) El costo total C de los dos cables en función de la abcisa x del punto P, cuando $0 \le x \le 18$. *(3 puntos)*

b) El valor de x, con $0 \le x \le 18$, para el que el costo total C es mínimo. *(4 puntos)*

c) El valor de dicho costo total mínimo. *(3 puntos)*

Solución:

La representación gráfica de los datos del problema es:



a) Coste de los dos cables en función del valor x del punto P.

Sabemos que $0 \le x \le 18$,

$$d(M,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2+36}$$

$$d(P,N) = 18 - x$$

Por lo que el coste C de los cables será: $C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x) \qquad 0 \le x \le 18$

b) Mínimo de C.

$$C' = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5$$

$$C' = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{10x}{\sqrt{x^2+36}} - 5 = 0 \quad \rightarrow \quad 10x - 5\sqrt{x^2+36} = 0 \quad \rightarrow \quad 10x = 5\sqrt{x^2+36}$$

$$(10x)^2 = \left(5\sqrt{x^2+36}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 100\,x^2 = 25(x^2+36) \quad \rightarrow \quad 100\,x^2 = 25\,x^2 + 900$$

$$100\,x^2 - 25\,x^2 = 900 \quad \rightarrow \quad 75\,x^2 = 900 \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{900}{75} \quad \rightarrow \quad x^2 = 12 \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{12}$$

Pero como $0 \le x \le 18$, *entonces* $x = \sqrt{12} \approx 3'4641$

Para determinar si es mínimo calculemos los valores de C´ a la izquierda y derecha de $\sqrt{12}$

$$x = 1, \quad C' = \frac{10\,.\,1}{\sqrt{1^2 + 36}} - 5 = \frac{10}{\sqrt{37}} - 5 = -3'3560 < 0$$

$$x = 5, \quad C' = \frac{10\,.\,5}{\sqrt{5^2 + 36}} - 5 = \frac{50}{\sqrt{61}} - 5 = 1'4018 > 0$$

Hemos obtenido que a la izquierda de $\sqrt{12}$ *C´ es negativa y a la derecha positiva, por lo que para x =* $\sqrt{12}$ *la función C tiene un mínimo relativo que además es el absoluto porque C es decreciente a la izquierda de* $\sqrt{12}$ *y creciente a la derecha.*

Por tanto, ***el coste total C es mínimo para x =*** $\sqrt{12}$ ***m ≈3´4641 m.***

c) El valor del coste total mínimo será:

$$C = 10\sqrt{\left(\sqrt{12}\right)^2 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 10\sqrt{12 + 36} + 5\left(18 - \sqrt{12}\right) = 141'9615$$

Por lo que, ***el coste total mínimo es de 141´96 €.***

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*
b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*
c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:
Como k es un parámetro real, si $k = 0$ $f(x) = 0$ y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:
a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.
b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x}\neq 0\ \ \forall x\in\Re \quad\rightarrow\quad Dom\, f(x)=\Re.$

Asíntotas.
Como $Dom\, f(x)=\Re \quad\rightarrow$ *f(x) no tiene asíntotas verticales.*

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\frac{\infty}{0}=\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{k\,x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\}=0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$ en $+\infty$.

Asíntota oblicua: ($y = m\,x + n$)

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{0}=\infty\\[2ex]\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k}{e^{2x}}=\dfrac{k}{\infty}=0\end{cases}\quad\rightarrow\quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

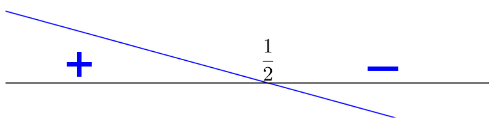
$$f'(x)=\frac{k\,e^{2x}-k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2}=\frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x\in\Re\quad e^{2x}$ *y* $e^{4x}>0 \quad\rightarrow$ *el signo de f´(x) depende de la expresión* $k\,(1-2\,x)$

$1 - 2\,x$ es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: $1 - 2\,x = 0$;

$1 = 2\,x$; $x=\dfrac{1}{2}$. Gráficamente



En consecuencia:

si $k > 0$ f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$***.***

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$***.***

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ → f(x) es continua en $\Re$ → f(x) es continua en [– 1 , 1]

$$f(-1) = \frac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^2$$

$$f(1) = \frac{k \cdot 1}{e^{2 \cdot 1}} = \frac{k}{e^2}$$

$$\rightarrow \quad f(-1) \cdot f(1) = -k\,e^2\,\frac{k}{e^2} = \left\{e^2 \neq 0\right\} = -k^2 < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 → ***$\exists$ c $\in$ (– 1 , 1) / f(c) = 0***

Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$, donde *a, b* y *c* son parámetros reales.
a) Averiguar los valores de *a* y *b* para los que las rectas tangentes a la gráfica de *f*(*x*) en los puntos de abscisas *x* = 2 y *x* = *4* son paralelas al eje OX. *(2 puntos).*
b) Con los valores de *a* y *b* hallados anteriormente, obtener el valor de *c* para el que se cumple que el punto de inflexión de la gráfica de *f*(*x*) está en el eje OX. *(1,3 puntos).*

Solución:
a) Recta tangente a f(x) en x = 2 y x = 4 debe ser paralela al eje OX
Es decir que la r.t. a f(x) en x = 2 y x = 4 deben tener pendiente 0.
$f'(x) = 3\,x^2 + 2\,a\,x + b$

pendiente de la r.t. a f(x) en x = 2
$f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 2\,a \cdot 2 + b = 12 + 4\,a + b$

pendiente de la r.t. a f(x) en x = 4
$f'(4) = 3 \cdot 4^2 + 2\,a \cdot 4 + b = 48 + 8\,a + b$

El sistema a resolver será
$$\begin{cases} 12+4a+b=0 \\ 48+8a+b=0 \end{cases}$$
Multiplicando la 1ª ecuación por – 1
$$\begin{cases} -12-4a-b=0 \\ 48+8a+b=0 \end{cases}$$
sumando $36+4a=0$
$a=-9$

Sustituyendo el valor de a en la 1ª ecuación,
$12 + 4\,(-9) + b = 0$
$12 - 36 + b = 0$
$-24 + b = 0$
$b = 24$

Solución: a = – 9 y b = 24

b) f (x) = $x^3 - 9\,x^2 + 24\,x + c$*, obtener el valor de para que el punto de inflexión esté en el eje OX.*
$f'(x) = 3\,x^2 - 18\,x + 24$
$f''(x) = 6\,x - 18$
$6\,x - 18 = 0$; $x = 3$ *esta es la abcisa del punto d einflexión.*
Para $x = 3$; $f(3) = 3^3 - 9 \cdot 3^2 + 24 \cdot 3 + c = 27 - 81 + 72 + c = 18 + c$
Como el punto de inflexión debe estar en el eje OX, $18 + c = 0$; $c = -18$
Solución: c = – 18

La función que cumple las condiciones de los apartados a) y b) será:
$f(x) = x^3 - 9\,x^2 + 24\,x - 18$

Problema 4.1. Unos altos hornos producen al día *x* toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo. *(3,3 puntos).*

Solución:
La función que nos da el valor de la venta de la producción diaria es

$$V(x) = 100x + 250\frac{40-5x}{10-x}$$

Busquemos el máximo de esta función,

$$V'(x) = 100 + 250\frac{-5(10-x)-(40-5x)(-1)}{(10-x)^2} = 100 + 250\frac{-50+5x+40-5x}{(10-x)^2} = 100 + 250\frac{-50+40}{(10-x)^2} =$$

$$= 100 + 250\frac{-10}{(10-x)^2} = 100 - \frac{2500}{(10-x)^2}$$

$$100 - \frac{2500}{(10-x)^2} = 0$$

$$100 = \frac{2500}{(10-x)^2}$$

$$100(10-x)^2 = 2500$$

$$(10-x)^2 = 25$$

$$10 - x = \pm\sqrt{25}$$

$$10 - x = \pm 5 \left\langle \begin{array}{l} 10-x=5 \quad \rightarrow \quad x = 10-5 = 5 \\ 10-x=-5 \quad \rightarrow \quad x = 10+5 = 15 \end{array} \right.$$

La solución x = 15 no es válida ya que supera la producción máxima diaria (que es de 8 Tm)

Veamos que ocurre con la solución x = 5

$$V''(x) = -\frac{-2500\,.\,2(10-x)(-1)}{(10-x)^4} = \frac{-5000}{(10-x)^3}$$

$$para\ x = 5, \quad V''(5) = \frac{-5000}{(10-5)^3} = \frac{-5000}{5^3} < 0$$

luego V(x) tiene un máximo relativo en x =5. ¿Es el máximo de V(x)?
Por definición de la función V(x), x puede tomar valores entre 0 y 8 (x son las toneladas de acero de baja calidad). Calculando los valores de V(x) para x = 0, x = 5 y x = 8 determinaremos el máximo.

$$x = 0, \quad V(0) = 100.0 + 250\frac{40-5.0}{10-0} = 250\frac{40}{10} = 1000$$

$$x = 5, \quad V(5) = 100.5 + 250\frac{40-5.5}{10-5} = 500 + 250\frac{15}{5} = 1250$$

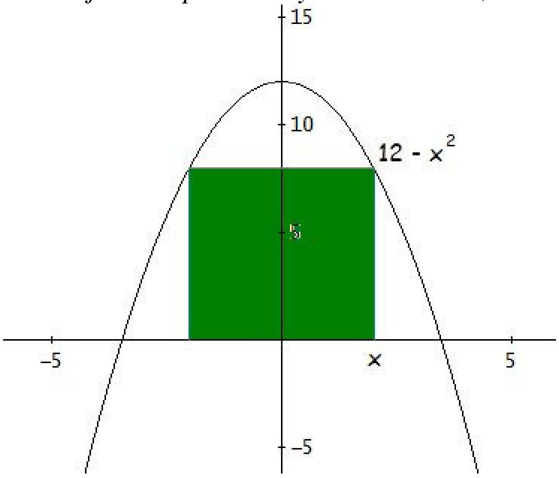
$$x = 8, \quad V(8) = 100.8 + 250\frac{40-5.8}{10-8} = 800 + 250\frac{0}{2} = 800$$

Por lo tanto el máximo se alcanza para x = 5.
Queda demostrado que se deben producir 5 Tm de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo.

Problema 4.2. Hallar las dimensiones del cartel de área máxima con forma de rectángulo que tiene dos vértices sujetos a una estructura rígida parabólica de ecuación $y = 12 - x^2$, y los otros dos vértices están situados sobre el eje OX. *(3,3 puntos).*

Solución:
Para representar la parábola $y = 12 - x^2$ *efectuamos los siguientes cálculos,*
para $x = 0,\ y = 12$
para $y = 0,\ 12 - x^2 = 0;\ 12 = x^2;\ x = \pm\sqrt{12} \approx \pm 3'46$
vértice $(0 , 12)$

El dibujo de la parábola y el cartel sería,



El área del rectángulo será: $A(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$
Busquemos el máximo.
$A'(x) = 24 - 6x^2$
$24 - 6x^2 = 0;\ 6x^2 = 24;\ x^2 = 4;\ x = \pm 2;\ x = -2$ *no es válida, por definición x debe ser positivo.*
Veamos si $x = 2$ *es máximo*
$A''(x) = -12x$
$A''(2) = -12 \cdot 2 = -24 < 0$ *luego máximo.*

Las dimensiones del cartel serán:

$base = 2 \cdot 2 = 4$ *u. l.*
$altura = 12 - 2^2 = 12 - 4 = 8$ *u. l.*

Problema 3.2. Se considera la función real f (x) = $x^2 - 4$. Obtener, explicando el proceso de cálculo:
a) La gráfica de la curva *y = f(x)*. *(2 puntos).*
b) Los valores de *x* para los que está definida la función real *g(x) = ln f(x)*. *(1,3 puntos).*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *g(x)*, razonando si tiene, o no, máximo absoluto. *(1,3 puntos).*

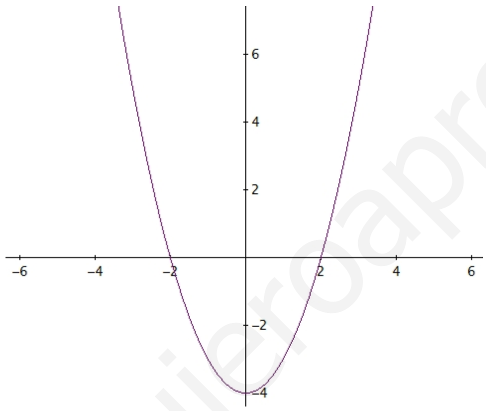
Solución:
a) Podemos obtener la gráfica de esta curva de dos formas diferentes.

a1) Como $y = x^2 - 4$ es una función polinómica de 2º grado, gráficamente es una parábola.
Efectuemos los cálculos para representar esta parábola.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0$, $0 = x^2 - 4$; $x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Vértice de la parábola,

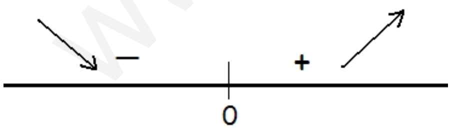
$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{2.1} = 0 \quad \rightarrow \quad y = -4$$

El vértice es (0 , – 4)

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*

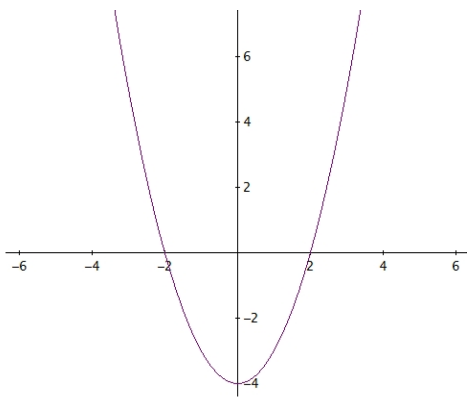


a2) $y = x^2 - 4$ *tratada como función.*
Dom y = R, por ser una función polinómica.
Puntos de corte con los ejes coordenados,
$x = 0$, $y = 0^2 - 4 = -4$
$y = 0$, $0 = x^2 - 4$; $x^2 = 4$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$
Los puntos de corte son (0 , – 4), (2 , 0) y (– 2 , 0)
Monotonía, signo de y´
$y' = 2x$
$2x = 0$; $x = 0$



Decreciente $(-\infty, 0)$
Creciente $(0, +\infty)$
Mínimo relativo $(0, -4)$

La gráfica de $y = x^2 - 4$ *es*



b) $g(x) = Ln\,(x^2 - 4)$. *Buscamos el dominio de g(x)*

$x^2 - 4 > 0$, *considerando la representación gráfica realizada en el apartado anterior obtenemos inmediatamente la solución de esta inecuación que es el dominio de g(x),*

$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

c) Monotonía de g(x)

$g(x) = Ln\,(x^2 - 4)$

$$g'(x) = \frac{2x}{x^2 - 4}$$

estudiemos el signo de g´(x), para ello buscamos las raíces del numerador y del denominador,

$2x = 0;\ \ x = 0$

$x^2 - 4 = 0$; *dos soluciones:* $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -2$

Representando estas raíces en la recta real y teniendo en cuenta el dominio de g(x), obtenemos

Por lo tanto g(x) es $\begin{array}{ll} Decreciente & (-\infty, -2) \\ Creciente & (2, +\infty) \end{array}$

Y g(x) no tiene ni máximos ni mínimos relativos. Para comprobar si g(x) tiene máximo absoluto representémosla gráficamente. Ya conocemos su dominio y su monotonía.

$Dom\ g(x) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Puntos de corte con eje OX,

$$y = 0 \ \rightarrow\ Ln(x^2 - 4) = 0 \ \rightarrow\ x^2 - 4 = 1 \ \rightarrow\ x^2 = 5 \ \rightarrow\ x = \pm\sqrt{5} \cong \pm 2{,}23 \in Dom\ g(x) \ \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} (-\sqrt{5}, 0) \\ (\sqrt{5}, 0) \end{array}$$

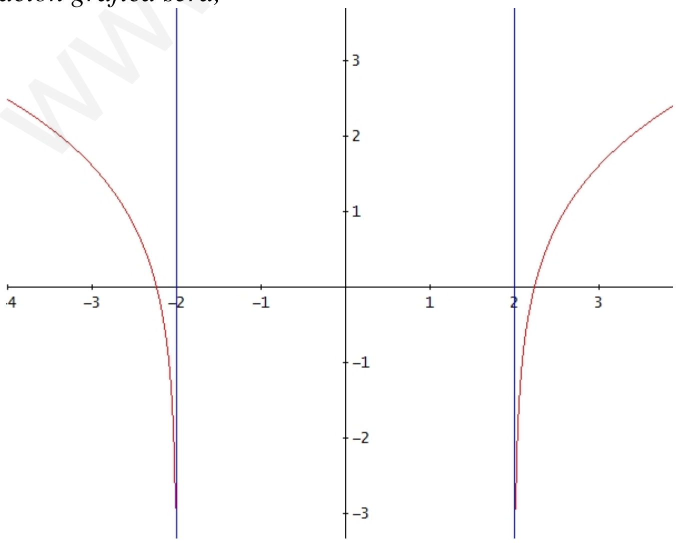
no hay corte con el eje OY porque x = 0 no es del dominio de g(x)

Asíntota vertical,

$$\lim_{x \to -2^-} Ln(x^2 - 4) = Ln\,0 = -\infty \ \rightarrow\ x = -2 \ \ es \ \ a.v.$$

$$\lim_{x \to 2^+} Ln(x^2 - 4) = Ln\,0 = -\infty \ \rightarrow\ x = 2 \ \ es \ \ a.v.$$

La representación gráfica será,

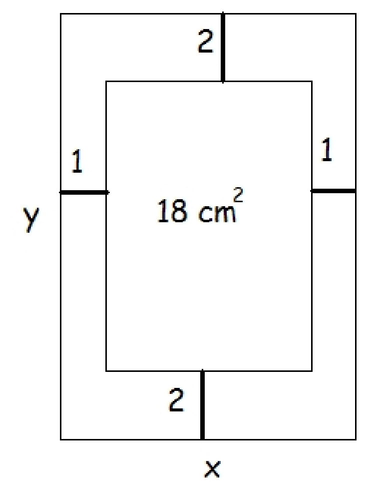


Luego g(x) no tiene máximo absoluto.

Problema 4.1. Una empresa decide lanzar una campaña de propaganda de uno de sus productos editando un texto que ocupa 18 cm^2 en hojas rectangulares impresas a una cara, con márgenes superior e inferior de 2 cm y laterales de 1 cm. Se pide calcular, razonadamente, las dimensiones de la hoja para las que el consumo de papel sea mínimo. *(3,3 puntos).*

Solución:

El formato y dimensiones de la hoja que se utiliza es:



Dimensiones de la hoja:
Largo: y
Ancho: x

Consumo de papel: x y

La relación entre x e y viene dada por el área que ocupa el texto impreso:

$$(y-4)(x-2)=18 \quad \rightarrow \quad y-4=\frac{18}{x-2} \quad \rightarrow \quad y=4+\frac{18}{x-2}$$

Por la forma de la propaganda los valores de x e y deben cumplir que: $x>2$ *e* $y>4$

La función que debemos minimizar, C(x), consumo de papel, será:

$$C(x)=x\ y=x\left(4+\frac{18}{x-2}\right)=4x+\frac{18x}{x-2}$$

por la condición que debe cumplir el valor de x deducimos que $Dom\ C(x)=(\ 2\ ,+\infty)$

Busquemos los extremos relativos de la función C(x).

$$C'=4+\frac{18(x-2)-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{18(x-2)-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{18x-36-18x}{(x-2)^2}=4+\frac{-36}{(x-2)^2}=4-\frac{36}{(x-2)^2}$$

$$C'=0 \quad \rightarrow \quad 4-\frac{36}{(x-2)^2}=0 \quad \rightarrow \quad 4=\frac{36}{(x-2)^2} \quad \rightarrow \quad 4(x-2)^2=36 \quad \rightarrow \quad (x-2)^2=9 \quad \rightarrow \quad x-2=\pm\sqrt{9}$$

$$x-2=\pm 3 \quad \rightarrow \quad \left\langle \begin{array}{l} x-2=3 \quad \rightarrow \quad x=5 \\ x-2=-3 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad \textit{solución no válida pues } x>2 \end{array} \right.$$

Calculemos C´´ para determinar el tipo de extremo.

Expresemos C´ de la siguiente forma, $C'(x) = 4 - 36\,(x-2)^{-2}$

$$C''(x) = -36\,(-2)\,(x-2)^{-3} = 72\,(x-2)^{-3} = \frac{72}{(x-2)^3}$$

$$\textit{para } x=5, \quad C''=\frac{72}{(5-2)^3}=\frac{72}{27}>0 \quad \rightarrow \quad x=5 \ \textit{mínimo relativo}$$

Comprobemos que este mínimo relativo es absoluto estudiando la función C(x). Como el dominio de esta función es un intervalo calculamos sus límites en los extremos del intervalo,

$$\underset{x\to 2^+}{Lím}\left(4x+\frac{18}{x-2}\right)=8+(+\infty)=+\infty$$

$$x\to 2^+ \quad \Rightarrow \quad (x-2)\to 0^+ \quad \Rightarrow \quad \frac{18}{x-2}\to+\infty$$

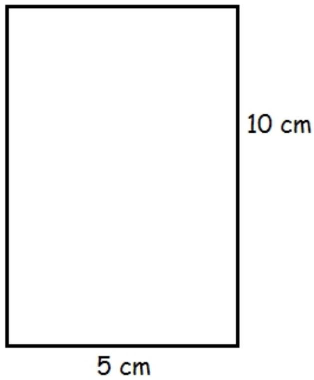
$$\underset{x\to +\infty}{Lím}\left(4x+\frac{18}{x-2}\right)=(+\infty)+0=+\infty$$

Luego el mínimo relativo anterior es un mínimo absoluto. Nos falta calcular el valor de y,

$$\textit{para} \quad x=5 \qquad y=4+\frac{18}{5-2}=4+\frac{18}{3}=4+6=10$$

Solución:

El consumo de papel es mínimo para una hoja de papel de 5 cm. x 10 cm.

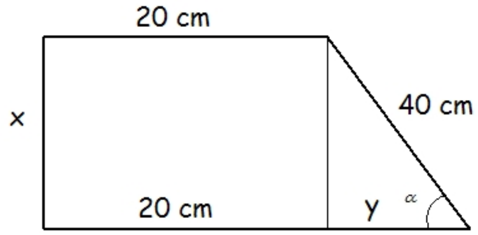


Problema 4.2. Una ventana tiene forma de trapecio rectangular. La base menor mide 20 cm y el lado oblicuo mide 40 cm. Hallar, razonadamente, el ángulo α que debe formar el lado oblicuo con la base mayor para que el área de la ventana sea máxima. *(3,3 puntos).*

Nota: Un trapecio rectangular es un cuadrilátero con dos lados paralelos y en el que uno de los otros dos lados es perpendicular a estos dos lados paralelos.

Solución:

Gráficamente el problema a resolver es



$¿\alpha?/ \quad A_{trapecio}$ *sea máxima*

$$A_{trapecio} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{((20+y)+20)x}{2}$$

Calculemos los valores de x e y en función del ángulo. En el triángulo rectángulo de la figura se obtiene:

$$sen\ \alpha = \frac{x}{40} \quad \rightarrow \quad x = 40\ sen\ \alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{40} \quad \rightarrow \quad y = 40\cos\alpha$$

$$luego \quad A(\alpha) = \frac{((20+40\cos\alpha)+20)\,40\ sen\ \alpha}{2} = \frac{(40+40\cos\alpha)\,40\ sen\ \alpha}{2} = (40+40\cos\alpha)\,20\ sen\ \alpha$$

Por construcción de la figura α *deber ser un ángulo agudo, luego* $\alpha \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$

La función A es una función continua por serlo las funciones seno y coseno y porque las operaciones que intervienen en su definición (suma y producto) también son continuas.
Procedamos a obtener el máximo de la función A

$$A' = -40\ sen\ \alpha\ .\ 20\ sen\ \alpha + (40+40\cos\alpha)\ 20\cos\alpha = -800\ sen^2\ \alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$

$$sabemos\ que\ \forall\alpha, \quad sen^2\ \alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \rightarrow \quad sen^2\ \alpha = 1-\cos^2\alpha$$

$$= -800\left(1-\cos^2\alpha\right) + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha = -800 + 800\cos^2\alpha + 800\cos\alpha + 800\cos^2\alpha =$$

$$= 1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800$$

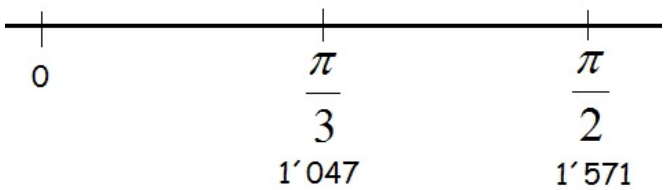
$$A' = 0 \quad \rightarrow \quad 1600\cos^2\alpha + 800\cos\alpha - 800 = 0 \quad \rightarrow \quad 2\cos^2\alpha + \cos\alpha - 1 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\,.\,2\,.\,(-1)}}{2\,.\,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-1\pm 3}{4} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-1+3}{4} = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{array}\right.$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\alpha = -1 \quad \rightarrow \quad \alpha = \pi \quad solución\ no\ válida,\ ya\ que\ \ \alpha \in \left(0\,,\frac{\pi}{2}\right)$$

Para determinar si la solución es máximo estudiemos el signo de A´ a ambos lados de la solución obtenida para A´ = 0.

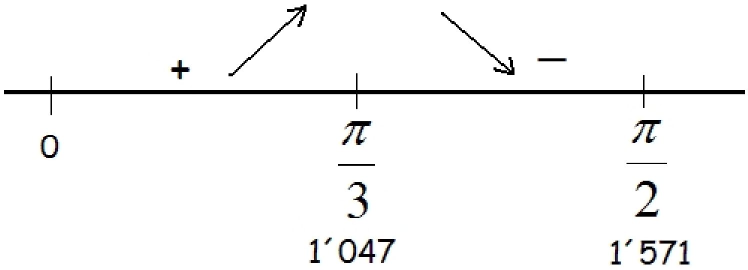


Estudiamos el signo de A´ en puntos intermedios de los dos intervalos en que está dividido el dominio de A,

$\alpha = 0'5 \quad A' = 1600\cos^2 0'5 + 800\cos 0'5 - 800 = 1134'3079 > 0$

$\alpha = 1'3 \quad A' = 1600\cos^2 1'3 + 800\cos 1'3 - 800 = -471'5119 < 0$

Tenemos el siguiente resultado:



Luego la función A tiene un máximo relativo para $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$

Como la función A, que es continua, es creciente a la izquierda de este valor y decreciente a su derecha, este máximo relativo es absoluto.

Para $\alpha = \dfrac{\pi}{3} \qquad A = \left(40 + 40\cos\dfrac{\pi}{3}\right) 20\, sen\dfrac{\pi}{3} = \left(40 + 40\,\dfrac{1}{2}\right) 20\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 60\,.\,20\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 600\sqrt{3}$

Por lo tanto, para que el área de la ventana sea máxima el ángulo $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ *rds y este área medirá* $600\sqrt{3}\ cm^2$

Problema 3.1.

a) Determinar, razonadamente, el dominio y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$ *. (1 punto).*

b) Obtener razonadamente los valores A y B tales que $\dfrac{1}{(3-x)(3+x)} = \dfrac{A}{3-x} + \dfrac{B}{3+x}$. *(1 punto).*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie S limitada por la curva $y = \dfrac{1}{(3-x)(3+x)}$, el eje OX y las rectas de ecuaciones x = – 2 y x = 2 . *(1,3 puntos).*

Solución:

a) Dominio e intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Dom f(x)

Como f(x) es una función racional busquemos las raíces del denominador,

$$(3-x)(3+x) = 0 \begin{cases} 3-x=0 & \rightarrow \quad x=3 \\ 3+x=0 & \rightarrow \quad x=-3 \end{cases}$$

Luego $Dom\ f(x) = \Re - \{-3\ ,\ 3\}$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

Debemos estudiar el signo de f´(x).

$$f(x) = \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{9-x^2}$$

$$f'(x) = \frac{-(-2x)}{\left(9-x^2\right)^2} = \frac{2x}{\left(9-x^2\right)^2}$$

Buscamos las raíces del numerador y denominador,

2 x = 0; x = 0

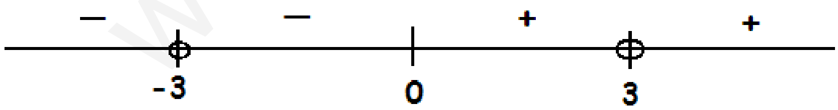
(9 – x²)² = 0; 9 – x² = 0; x² = 9; x = ±3

Marcamos en la recta real las raíces obtenidas anteriormente y tenemos en cuenta en dominio de la función,

Como el denominador de f´(x) está elevado al cuadrado será positivo, por lo que el signo de f´(x) sólo depende del numerador que es 2 x

2 x > 0; x > 0

Y el signo de f´(x) será



f(x) es decreciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$ *y es creciente en* $(0, 3) \cup (3, +\infty)$

b) Efectuando la suma que queda indicada,

$$\frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{A}{3-x} + \frac{B}{3+x} = \frac{A\,(3+x) + B\,(3-x)}{(3-x)(3+x)}$$

Luego debe ser 1 = A (3 + x) + B (3 – x), buscamos los valores de A y B dándole valores a x

para x = 3 1 = A (3 + 3) + B (3 – 3)

1 = 6 A

$$A = \frac{1}{6}$$

para x = – 3 $\quad 1 = A(3-3) + B(3-(-3))$

$$1 = 6B$$

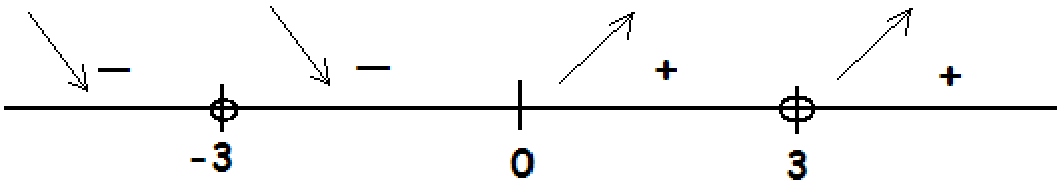
$$B = \frac{1}{6}$$

c) Para calcular esta área debemos dibujar, de forma aproximada, la curva dada

La curva corresponde a la función estudiada en el apartado a). Por lo tanto conocemos:

su dominio, $\quad Dom\ y = \Re - \{-3, 3\}$

y sus intervalos de crecimiento y decrecimiento:



De lo anterior deducimos que en x = 0 la curva tiene un mínimo relativo

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{(3-0)(3+0)} = \frac{1}{9} \quad \to \quad \textit{mínimo relativo} \quad \left(0\,,\frac{1}{9}\right)$$

Puntos de corte con el eje OX

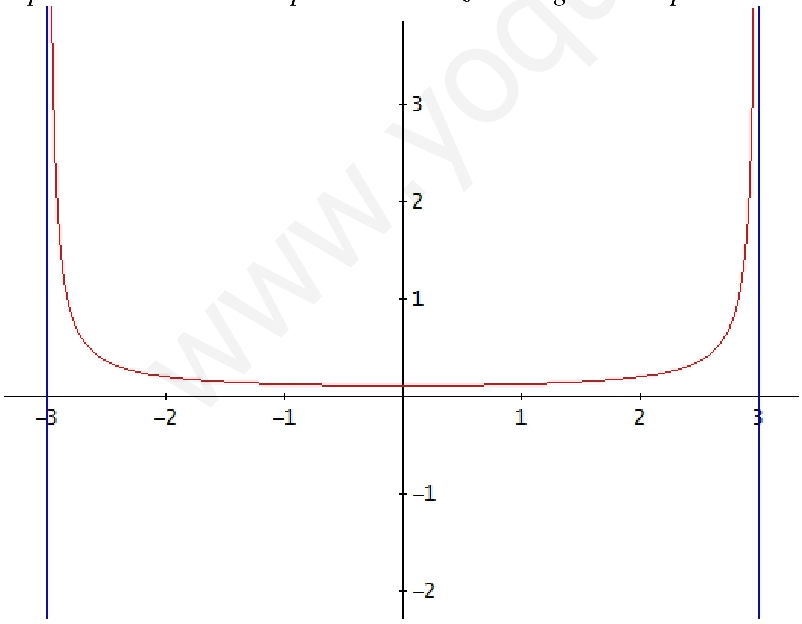
$$y = 0, \quad \frac{1}{(3-x)(3+x)} = 0 \quad \to \quad 1 = 0 \quad \textit{no tiene solución}$$

Posibles asíntotas verticales x = – 3 y   x = 3; veámoslo,

$$\lim_{x\to -3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{6\,.\,0} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = -3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

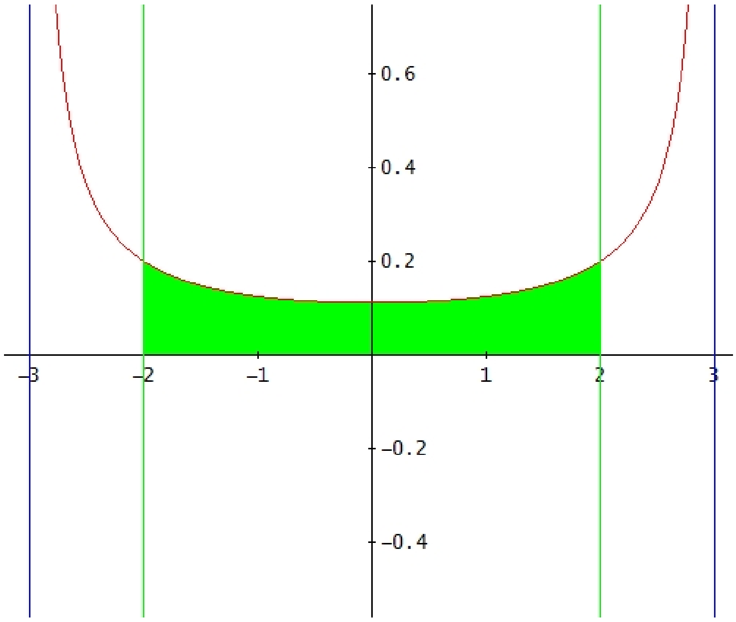
$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{(3-x)(3+x)} = \frac{1}{0\,.\,6} = \frac{1}{0} = \infty \quad \textit{luego } x = 3 \textit{ es una asíntota vertical}$$

A partir de lo estudiado podemos realizar la siguiente representación,



No es necesario realizar más cálculos sobre la representación de la curva puesto que el área buscada está limitada por las rectas verticales x = – 2 y x = 2 y hemos representado la curva entre – 3 y 3

Gráficamente, el área que debemos calcular es,



El cálculo de esta área lo realizamos mediante la siguiente integral

$$\int_{-2}^{2} \frac{1}{(3-x)(3+x)}\,dx =$$

por el apartado b) sabemos que,

$$\int_{-2}^{2} \left[\frac{1/6}{(3-x)} + \frac{1/6}{(3+x)} \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{6} Ln|3-x| + \frac{1}{6} Ln|3+x| \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \frac{-1}{6} Ln|3-2| + \frac{1}{6} Ln|3+2| - \left[\frac{-1}{6} Ln|3+2| + \frac{1}{6} Ln|3-2| \right] = \frac{-1}{6} Ln\ 1 + \frac{1}{6} Ln\ 5 + \frac{1}{6} Ln\ 5 - \frac{1}{6} Ln\ 1 =$$

$$= (como \quad Ln\ 1 = 0) = \frac{2}{6} Ln\ 5 = \frac{1}{3} Ln\ 5$$

Finalmente, el área de la superficie pedida es $\frac{1}{3} Ln\ 5\ u^2 \approx 0'5365\ u^2$

Problema 3.2. Dada la función real f (x) = $e^x - e^{-x}$, se pide calcular razonadamente:

a) La función f(x) + f(– x). *(1,1 puntos).*

b) La integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, donde a es un número real positivo. *(1,1 puntos).*

c) El punto de inflexión de f(x). *(1,1 puntos).*

Solución:

a)

$$f(x) + f(-x) = e^x - e^{-x} + e^{-x} - e^{-(-x)} = \underline{e^x} \ \underline{-\ e^{-x}} + \underline{e^{-x}} \ \underline{-\ e^x} = 0$$

b)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{a} \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left[e^x + e^{-x}\right]_{-a}^{a} = e^a + e^{-a} - \left(e^{-a} + e^{-(-a)}\right) =$$
$$= e^a + e^{-a} - e^{-a} - e^a = 0$$

c) Punto de inflexión de f(x)

$$f(x) = e^x - e^{-x}$$
$$f'(x) = e^x + e^{-x}$$
$$f''(x) = e^x - e^{-x}$$

$$f''(x) = 0 \ \rightarrow\ e^x - e^{-x} = 0 \ \rightarrow\ e^x = e^{-x} \ \rightarrow$$
$$\rightarrow\ e^x = \frac{1}{e^x} \ \rightarrow\ e^x e^x = 1 \ \rightarrow\ e^{2x} = 1 \ \rightarrow\ 2x = 0 \ \rightarrow\ x = 0$$

Estudiemos el signo de f´´(x) a la izquierda y derecha de x = 0

x	$f''(x)$
-1	$e^{-1} - e^{1} = \frac{1}{e} - e = -2'350 < 0$
1	$e^{1} - e^{-1} = e - \frac{1}{e} = 2'350 > 0$

Por lo tanto como f´´(x) cambia de signo en x = 0, en x = 0 hay un punto de inflexión.

x = 0, f(0) = $e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$

Luego el punto de inflexión de f(x) es (0 , 0).

Problema 4.1. Se desea construir una bodega con forma de paralelepípedo de 100 m^3 de volumen de manera que el largo de su base sea 3/4 de la anchura x de su base. Se sabe que los precios de un metro cuadrado de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, 225 €/m^2, 300 €/m^2 y 256 €/m^2. Determinar razonadamente:

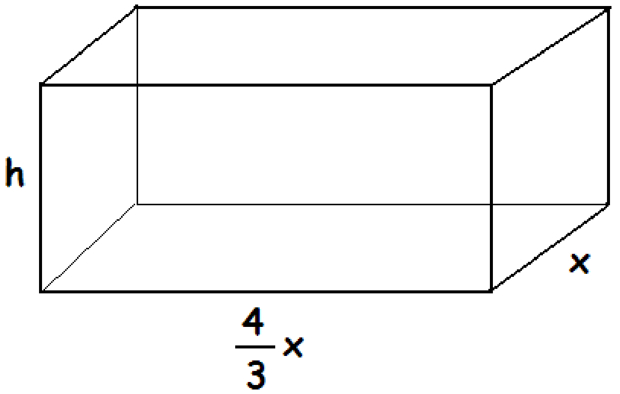
a) El valor x de la anchura de la base que minimiza el coste. *(2,3 puntos).*

b) Dicho coste mínimo. *(1 punto).*

Solución:

a) Calcular el valor x de la anchura que minimiza el coste..

La bodega a construir es, según el enunciado,



Sabemos que
El precio del suelo es de 225 €/m^2
El precio del techo es de 300 €/m^2
El precio de la pared lateral es de 256 €/m^2

El coste de la bodega, C, será

$$C = 225\frac{4}{3}x\ x + 300\frac{4}{3}x\ x + 2\ .\ 256\ x\ h + 2\ .\ 256\frac{4}{3}x\ h = 300x^2 + 400x^2 + 512\ x\ h + \frac{2048}{3}\ x\ h =$$

$$= 700x^2 + \frac{3584}{3}\ x\ h$$

Para poder encontrar el mínimo de C debemos tener una sola variable. Busquemos la relación entre x y h. Esta relación nos la da el volumen de la bodega, 100m^3.

$$V = x\ \frac{4}{3}\ x\ h = 100 \quad \rightarrow \quad x^2 h = \frac{300}{4} \quad \rightarrow \quad x^2 h = 75 \quad \rightarrow \quad h = \frac{75}{x^2}$$

Luego $C = 700x^2 + \dfrac{3584}{3}\ x\ \dfrac{75}{x^2} = 700x^2 + \dfrac{89600}{x}$

Por ser x y h longitudes, y teniendo en cuenta la relación entre ellas x^2 h = 75, los valores que puede tomar la variable x son todos los reales positivos, es decir que Dom C = (0 , +∞).

Busquemos el mínimo de C,

$$C' = 1400x - \frac{89600}{x^2}$$

$$1400x - \frac{89600}{x^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1400x^3 - 89600 = 0 \quad \rightarrow \quad 1400x^3 = 89600 \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{89600}{1400} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad x^3 = 64 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Estudiemos el signo de C´ a la izquierda y derecha de 4 para determinar si es un mínimo,

x	C´
1	$1400\ .\ 1 - \dfrac{89600}{1^2} = -88200 < 0$
5	$1400\ .\ 5 - \dfrac{89600}{5^2} = 3416 > 0$

Luego en x = 4 hay un mínimo relativo y, además, como en (0 , 4) la función C es decreciente y en (4 , +∞) es creciente el mínimo es absoluto.

El valor de x que minimiza el coste es 4, es decir, hay que construir una bodega cuya base tenga una anchura de 4 m.

b) El coste mínimo.

$$C(4) = 700 \cdot 4^2 + \frac{89600}{4} = 33600$$

El coste mínimo de la bodega es de 33600€

Problema 4.2. Un proveedor vende un producto a un comerciante al precio de 300 euros la unidad. El comerciante incrementa la cantidad de 300 euros e un 40% para obtener el precio de venta al público. El comerciante sabe que a ese precio venderá 50 unidades cada mes y que durante el mes de rebajas por cada 3 euros de reducción en el precio de venta de la unidad conseguirá un incremento de ventas de 5 unidades. Se pide determinar, razonadamente, el número de unidades que debe pedir al proveedor para venderlas en el mes de rebajas y el precio de venta de cada unidad, para maximizar sus beneficios durante ese periodo. *(2 puntos por obtener el número de unidades y 1,3 puntos por el precio de venta).*

Solución:

Precio de compra: 300€/unidad
Precio de venta: 300 + 40% . 300 = 420 €/unidad

A 20 €/unidad vende 50 unidades/mes
Por cada 3€ de rebaja incrementa las ventas en 5 unidades. Llamando x = nº de veces que aplica la rebaja de 3€, x es un número natural.
Entonces, del enunciado del ejercicio deducimos, a (420 – 3 x) €/unidad vende (50 + 5 x) unidades/mes.
Quiere maximizar los beneficios, B.
B = beneficio_unitario x unidades_vendidas
sindo beneficio_unitario = precio_venta – precio_compra, luego

$B = [(420 - 3x) - 300] (50 + 5x) = (120 - 3x) (50 + 5x) = 6000 + 600x - 150x - 15x^2 =$
$= -15x^2 + 450x + 6000$

Veamos el dominio de esta función, B. Las expresiones iniciales en que intervienen x son precio_venta = 420 – 3 x y unidades_a_vender = 50 + 5 x
Evidentemente, para obtener beneficios, el precio de venta debe ser superior al precio de compra. Por lo tanto,

$$420 - 3x > 300; \quad 420 - 300 > 3x; \quad 120 > 3x; \quad 40 > x; \quad x < 40$$

El apartado de número de unidades a vender, 50 + 5 x, no aporta ninguna restricción.
Luego el dominio de la función B son los números naturales menores que 40, es decir, Dom B = { 0, 1, …, 39 }

Busquemos el máximo de B.

$B' = -30x + 450$
$-30x + 450 = 0$
$-30x = -450$
$x = (-450)/(-30) = 15$

Estudiemos el signo B´ a la izquierda y derecha de 15, teniendo en cuenta el dominio de B

x	B'
10	$-30 \cdot 10 + 450 = -300 + 450 = 150 > 0$
20	$-30 \cdot 20 + 450 = -600 + 450 = -150 < 0$

A la izquierda de 15 B es creciente y a la derecha decreciente, en x = 15 hay un mínimo relativo y como el dominio de B es { 0, 1, …, 39 }, el mínimo es absoluto.

Finalmente, las respuestas a las cuestiones planteadas son:

Número de unidades que debe pedir,
50 + 5 . 15 = 125, ***debe pedir 125 unidades***.

Precio de venta de cada unidad,
420 – 3 . 15 = 355, ***debe vender cada unidad a 375€.***

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sea $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b\,x + c$. Hallar a, b, c sabiendo que f alcanza un máximo es $x = -4$ y un mínimo en $x = 0$ y que $f(1) = 1$.

Solución:

Máximo en $x = -4$, $f'(-4) = 0$

Mínimo en $x = 0$, $f'(0) = 0$

Calculemos $f'(x) = 3\,x^2 + 2\,a\,x + b$

Obtenemos las ecuaciones correspondientes a las tres condiciones que conocemos de la función f,

$f'(-4) = 0$	$\rightarrow$	$3\,(-4)^2 + 2\,a\,(-4) + b = 0;$	$48 - 8\,a + b = 0$
$f'(0) = 0$	$\rightarrow$	$3\,0^2 + 2\,a\,0 + b = 0;$	$b = 0$
$f(1) = 1$	$\rightarrow$	$1^3 + a\,1^2 + b\,1 + c = 1;$	$1 + a + b + c = 1$

Sustituyendo el valor de b obtenido en la 2ª condición en las otras dos tenemos el sistema,

$$\begin{cases} 48 - 8a = 0 \\ a + c = 0 \end{cases}$$

De la 1ª ecuación obtenemos el valor de a; $48 = 8\,a$, $a = 6$

Sustituyendo en la 2ª ecuación $6 + c = 0$, $c = -6$

Los valores de los parámetros son: $a = 6$, $b = 0$ *y* $c = -6$*; la expresión de f será* $f(x) = x^3 + 6\,x^2 - 6$

EJERCICIO A

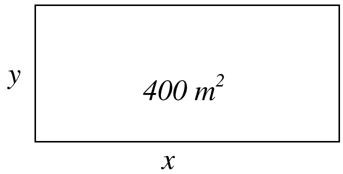
PROBLEMA 2. En una gran pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 euros. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:

a) Obtener razonadamente la función F tal que F(x) sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x *(1,3 puntos).*

b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función f(x) alcanza el valor mínimo *(2 puntos).*

Solución:

a) La zona a vallar es el rectángulo:



La relación entre x e y viene dada por el área del rectángulo, x . y = 400 $\quad y = \dfrac{400}{x}$

Para obtener el coste de la valla calculemos el perímetro de la zona,

$$P = 2x + 2y = 2x + 2\frac{400}{x} = 2x + \frac{800}{x} \quad \to \quad f(x) = 100\left(2x + \frac{800}{x}\right) = 200x + \frac{80000}{x}$$

Como x representa la longitud de un lado y la función anterior no se puede calcular para x = 0, obtenemos:

$$Dom\ f(x) = (0, +\infty)$$

b) Estudiemos la monotonía de f(x)

$$f'(x) = 200 - \frac{80000}{x^2}$$

$$200 - \frac{80000}{x^2} = 0 \quad \to \quad 200x^2 - 80000 = 0 \quad \to \quad 200x^2 = 80000 \quad \to \quad x^2 - 400 \quad \to \quad x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

$$Como \quad Dom\ f(x) = (0, +\infty) \quad \to \quad x = 20$$

Estudiamos el signo de f ´(x) a la izquierda y derecha de 20,

x	$f'(x)$
1	$200 - \dfrac{80000}{1} = 200 - 80000 \quad < 0$
40	$200 - \dfrac{80000}{1600} = 200 - 50 \quad > 0$

Por lo tanto,
en (0, 20) f(x) es decreciente
en (20, +∞) f(x) es creciente

Como en x = 20 f(x) pasa de decreciente a creciente, en x = 20 f(x) tiene un mínimo.

Para x = 20 $\to \quad y = \dfrac{400}{20} = 20$

Solución: f(x) alcanza el valor mínimo para x = 20, es decir, para una zona vallada cuadrada (x = 20 e y = 20).

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Sea f(x) = x^2 + m x (donde m es un parámetro real) y f´(x) la función derivada de f(x). Se pide:
a) Hallar el valor del parámetro m para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 *(1,5 puntos).*
b) Para el valor de m calculado en a), determinar el área de la región comprendida entre la curva y = f(x) y la recta de ecuación y = f´(x) *(1,8 puntos).*

Solución:

Como f(x) es un polinomio de 2º grado en x, es una función continua y derivable en $\Re$.
a) Para que f(x) tenga un mínimo relativo en x = -3/4 debe ser f´(-3/4)=0 y f´´(-3/4)>0
f ´(x) = 2 x + m *f ´´(x) = 2*
2 (-3/4) + m = 0 → -3/2 + m = 0 → m = 3/2
Como f ´´(x) = 2 >0 (siempre), para m = 3/2 la función f(x) tiene un mínimo relativo en x = -3/4

b) Hay que calcular el área de la región comprendida entre las funciones

$$f(x) = x^2 + \frac{3}{2}x \qquad y \qquad f'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Estas dos funciones son continuas y derivables en todo R (son funciones polinómicas) por lo tanto podremos aplicar la regla de Barrow para calcular el área comprendida entre ellas.
Buscamos los puntos de corte entre las dos funciones, para ello resolvemos la ecuación:

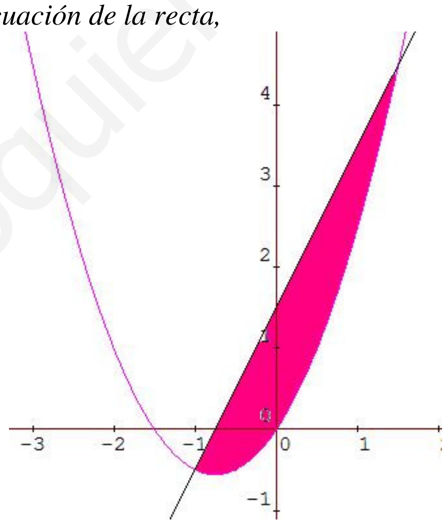
$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3 \quad \Rightarrow \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\,.\,2\,.\,(-3)}}{2\,.\,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = \frac{-4}{4} = -1 \end{array} \right.$$

Calculamos las ordenadas de los dos puntos de corte para realizar una representación aproximada de las dos funciones y del área que queremos calcular.
Calculamos las ordenadas a partir de la ecuación de la recta,

$$Para\ x = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad y = 2\frac{3}{2} + \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$$

$$Para\ x = -1 \quad \rightarrow \quad y = 2(-1) + \frac{3}{2} = \frac{-1}{2}$$



$$A = \int_{-1}^{3/2} \left(2x + \frac{3}{2} - (x^2 + \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left(-x^2 + \frac{x}{2} + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} =$$

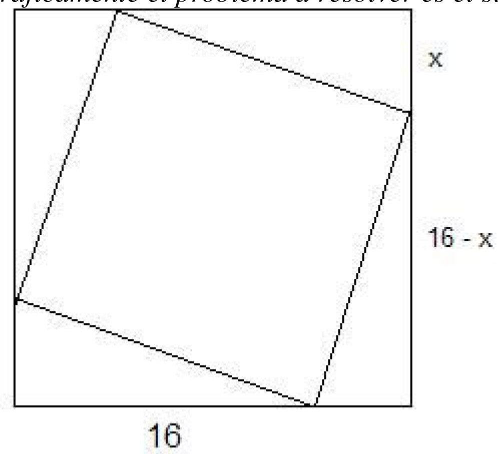
$$= \left[-\frac{(3/2)^3}{3} + \frac{(3/2)^2}{4} + \frac{3}{2}\frac{3}{2} \right] - \left[-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \frac{\frac{-27}{8}}{3} + \frac{\frac{9}{4}}{4} + \frac{9}{4} - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) =$$

$$= \frac{-9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = \frac{-54 + 27 + 108 - 16 - 12 + 72}{48} = \frac{207 - 82}{48} = \frac{125}{48}u^2$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. Determinar razonadamente la longitud del lado del cuadrado de área mínima cuyos vértices están situados sobre los lados de otro cuadrado de lado 16 cm (3,3 puntos).

Solución:
Gráficamente el problema a resolver es el siguiente,



Para el cálculo de las áreas de los cuadrados podemos considerar que la del cuadrado inscrito es la del grande menos las áreas de cuatro triángulos rectángulos cuyos catetos miden x *y* $16 - x$.
Llamando A_g *al área del cuadrado de lado 16 y* A_p *a la del inscrito se cumple,*
$A_g = 16^2 = 256$
$A_p = 256 - 4x(16 - x)/2 = 256 - 32x + 2x^2$, $x \in [0,16]$

Buscaremos el valor de x *para el que* A_p *es mínima.*

Consideramos la función $A_p(x) = 256 - 32x + 2x^2$, $x \in [0,16]$
$A_p(x)$ *está definida como un polinomio de 2º grado y este polinomio es continuo y derivable en* $\Re$, *luego* $A_p(x)$ *será continua y derivable en el intervalo* $[0,16]$.
Para encontrar los valores de x en que $A_p(x)$ *alcanza un mínimo relativo resolvemos la ecuación* $A_p'(x) = 0$ *y buscamos las soluciones que hagan* $A_p''(x) > 0$
$A_p'(x) = -32 + 4x$
$-32 + 4x = 0 \rightarrow 4x = 32 \rightarrow x = 8$ ($8 \in [0,16]$)
$A_p''(x) = 4$
$A_p''(8) = 4 > 0$
Para $x = 8$ $A_p(x)$ *tiene un mínimo relativo, como* $A_p(x)$ *es un polinomio de 2º grado el mínimo relativo coincide con el mínimo absoluto, por lo tanto, para* $x = 8$ *el cuadrado inscrito es de área mínima.*
Busquemos ahora el valor del lado de este cuadrado,
para $x = 8$ $A_p(8) = 256 - 32 \cdot 8 + 2 \cdot 8^2 = 256 - 256 + 128 = 128$ *que es el área del cuadrado, luego el lado de este cuadrado será* l *de forma que* $l^2 = 128$, *es decir,* $l = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$

Conclusión: el lado del cuadrado pedido mide $8\sqrt{2}$ *cm.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. a) El perímetro de un sector circular de radio R es 4 m. ¿Cuántos radianes α debe medir su ángulo central para que su área sea máxima? *(1,8 puntos).* (Nota: Perímetro = 2 R + R α ; Área=½ α R^2)
b) El área de otro sector circular es 1 m^2. ¿Para qué radio es mínimo su perímetro? *(1,5 puntos).*

Solución:

a) Como α *es el ángulo central de un sector circular, tomara valores entre 0 y* 2π.
Conocemos $P = 2R + R\alpha$
$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$
P = 4 y buscamos α *para que el área sea máxima*

$4 = 2R + R\alpha \;\rightarrow\; 4 = R(2+\alpha) \;\rightarrow\; R = \dfrac{4}{2+\alpha}$

sustituyendo en la fórmula del área,

$$A = \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{4}{2+\alpha}\right)^2 = 8\frac{\alpha}{(2+\alpha)^2}$$

derivamos $A' = 8\dfrac{(2+\alpha)^2 - \alpha\, 2(2+\alpha)}{(2+\alpha)^4} =$ *simplificando por* $(2+\alpha) = 8\dfrac{(2+\alpha)-2\alpha}{(2+\alpha)^3} =$

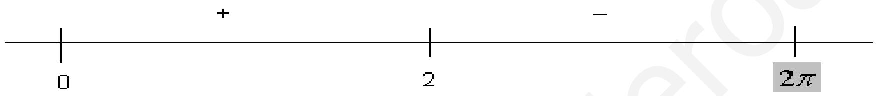
$$= 8\frac{2-\alpha}{(2+\alpha)^3} = \frac{16-8\alpha}{(2+\alpha)^3}$$

Para no calcular la segunda derivada de A, obtendremos el máximo de A mediante el estudio de la monotonía de A,

$16 - 8\alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = 2$

$(2+\alpha)^3 = 0 \;\rightarrow\; 2+\alpha = 0 \;\rightarrow\; \alpha = -2$

Como α *toma valores entre 0 y* 2π*, el estudio del signo de A' lo hacemos en este intervalo,*



Por lo tanto para α *= 2 hay un máximo. El área será máxima cuando* α *= 2 rds.*

b) Como R es el radio de un sector circular R debe ser un número positivo.
Conocemos $P = 2R + R\alpha$
$A = \frac{1}{2}\alpha R^2$
A = 1 y buscamos R para que el perímetro sea mínimo

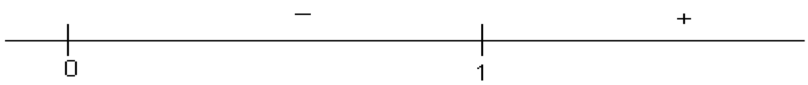
$\frac{1}{2}\alpha R^2 = 1 \;\rightarrow\; \alpha R^2 = 2 \;\rightarrow\; \alpha = \dfrac{2}{R^2}$

$P = 2R + R\dfrac{2}{R^2} = 2R + \dfrac{2}{R}$

$P' = 2 - \dfrac{2}{R^2}$

$2 - \dfrac{2}{R^2} = 0 \;\rightarrow\; 2R^2 - 2 = 0 \;\rightarrow\; 2R^2 = 2 \;\rightarrow\; R^2 = 1 \;\rightarrow\; R = \pm 1$

Como el radio no puede ser negativo, solución R = 1
Estudiamos el signo de P',

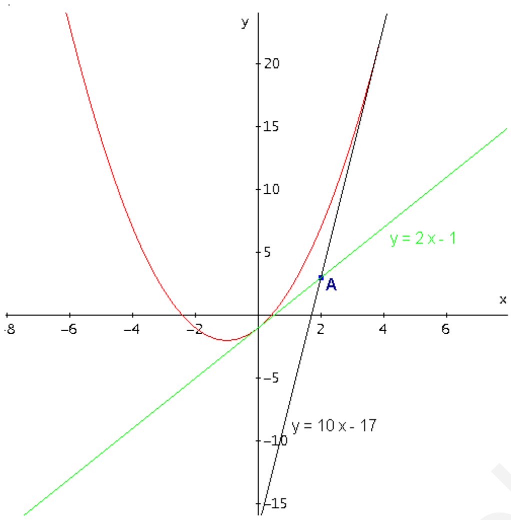


Para R = 1 el perímetro es mínimo.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. En el plano se tiene la curva $y = x^2 + 2x - 1$. Encontrar razonadamente las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (2, 3) y son tangentes a dicha curva (*3,3 puntos*).

Solución:
La solución gráfica del problema es:



Las rectas que pasan por el punto (2, 3) tienen por ecuación: $y = m(x-2) + 3$*, siendo "m" la pendiente de la recta.*
Para que estas rectas sean tangentes a la curva $y = x^2 + 2x - 1$ *deben tocarla en un único punto.*
Estudiemos el corte entre la curva y la recta,

$x^2 + 2x - 1 = m(x-2) + 3$

$x^2 + 2x - 1 = mx - 2m + 3$

$x^2 + 2x - mx - 1 + 2m - 3 = 0$

$x^2 + (2-m)x + (2m-4) = 0$

Para que esta ecuación de 2º grado tenga una única solución, su discriminante debe ser cero, es decir:

$(2-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m-4) = 0$

$4 - 4m + m^2 - 8m + 16 = 0$

$m^2 - 12m + 20 = 0$

$$m = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.20}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{12+8}{2} = 10 \\ \dfrac{12-8}{2} = 2 \end{array} \right.$$

Hay dos rectas tangentes:

para $m = 10$, $y = 10(x-2) + 3$; $y = 10x - 17$

para $m = 2$, $y = 2(x-2) + 3$; $y = 2x - 1$

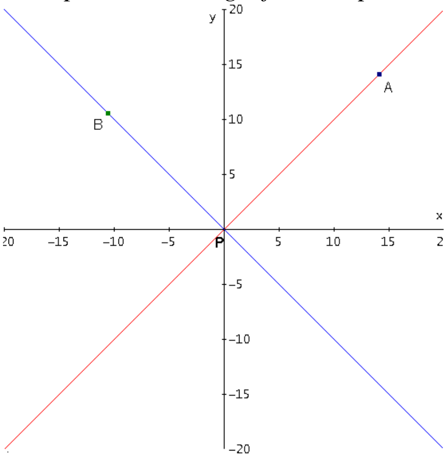
EJERCICIO B

PROBLEMA 4.1. El trazado de dos canales navegables en un mapa discurre según las rectas *y=x* e *y=-x*. Dos lanchas motoras, A y B, salen al mismo tiempo de puntos situados sobre cada uno de los canales a distancias de 20 y 15 km, respectivamente, del punto P de confluencia de ambos. La lancha A se dirige a P con una velocidad de 30 km/h y la lancha B se dirige a ese mismo punto con velocidad 60 km/h. Se considera despreciable la anchura de los canales y la longitud de las lanchas y se pide calcular:

a) La distancia entre las lanchas en función del tiempo desde que inician su recorrido (*2,3 puntos*).

b) La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas (*1 punto*).

Solución:
La representación gráfica del problema es:



El punto A puede estar en el primer o tercer cuadrante; el B en el segundo o cuarto. Como los canales son perpendiculares, independientemente del cuadrante en que estén la solución se obtiene a partir de los mismos cálculos.

Como las rectas $y = x$ *e* $y = -x$ *son perpendiculares los segmentos PA y PB son perpendiculares, por lo tanto* $d(A,B) = \sqrt{\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2}$.

Como la lancha A se dirige al punto P a 30 km/h PA(t) = 20 – 30 t
Como la lancha B se dirige al punto P a 60 km/h PB(t) = 15 – 60 t

a)

$$d(A,B)(t) = \sqrt{(20-30t)^2 + (15-60t)^2} = \sqrt{400 - 1200t + 900\,t^2 + 225 - 1800t + 3600\,t^2} =$$
$$= \sqrt{4500\,t^2 - 3000\,t + 625}$$

Por construcción el dominio de esta función debe ser $\Re^+$. *Vamos a comprobarlo,*

$$4500\,t^2 - 3000\,t + 625 \geq 0$$

Re*solvemos,*

$$4500\,t^2 - 3000\,t + 625 = 0$$

$$x = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 4.4500.625}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{9000000 - 11250000}}{9000} = \frac{3000 \pm \sqrt{-2250000}}{9000}$$

La ecuación no tiene soluciones reales, como el coeficiente de t^2 *es positivo el polinomio de 2º grado siempre es positivo.*

b) Busquemos el mínimo de la función anterior,

$$d'(A,B)(t) = \frac{9000t - 3000}{2\sqrt{4500t^2 - 3000t + 625}}$$

Estudiemos el signo de la derivada. Ya sabemos que el denominador es positivo, sólo necesitamos estudiar el signo del denominador,

$$9000t - 3000 = 0 \rightarrow 9000t = 3000 \rightarrow t = \frac{3000}{9000} = \frac{1}{3}$$

Para t < 1/3 d´ < 0; para t > 1/3 d´ >0. En t = 1/3 hay un mínimo relativo.
Como la función pasa de decreciente (d´<0) a creciente (d´>0), el mínimo relativo es el absoluto.

$$d(A,B)\left(\frac{1}{3}\right)=\sqrt{4500\left(\frac{1}{3}\right)^2-3000\frac{1}{3}+625}=\sqrt{500-1000+625}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}\approx 11'180$$

La distancia mínima a la que pueden estar las lanchas es de $5\sqrt{5}$ *Km. que aproximadamente son 11´180 Km.*

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Dadas las funciones $f(x) = x^3 - 3x + 8$ y $g(x) = -3x$, se pide:
a) Calcular el máximo absoluto de la función $f(x)$ en el intervalo $[-3, 0]$ **(1 punto).**
b) Calcular el punto de corte de la curva $y = f(x)$ y la recta $y = g(x)$ **(1 punto).**
c) Obtener el área del recinto limitado por la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = g(x)$, $x = -3$ y $x = 0$ **(1,3 puntos).**

Solución:
a) Máximo absoluto de f(x) en el intervalo $[-3, 0]$
Como f(x) es una función polinómica, es una función continua. El máximo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado se alcanza e un extremo local de la función o en los extremos del intervalo.

Calculemos los extremos locales de la función,
$f'(x) = 3x^2 - 3$
$3x^2 - 3 = 0; \quad 3x^2 = 3; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1$
$f''(x) = 6x$
$f''(-1) = -6 < 0$ *luego en* $x = -1$ *hay un máximo local.*
$f''(1) = 6 > 0$ *luego en* $x = 1$ *hay un mínimo local.*

Como -1 *pertenece al intervalo* $[-3, 0]$ *f(x) alcanza un máximo local en este intervalo.*

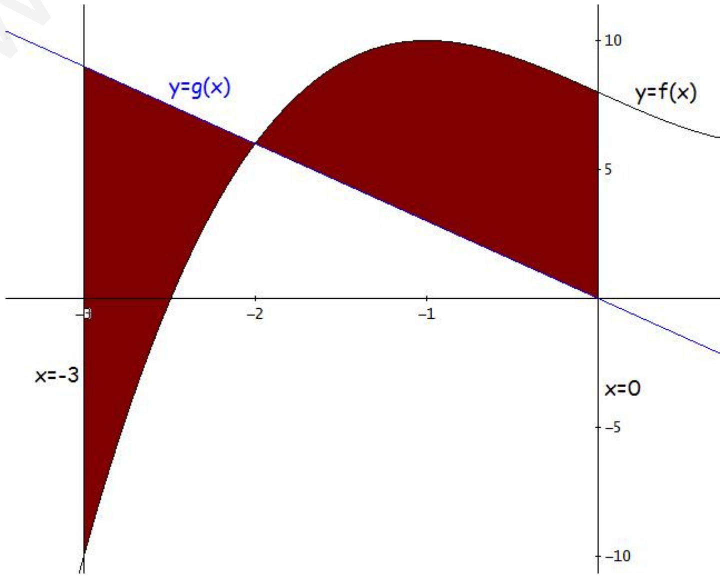
$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 8 = -1 + 3 + 8 = 12$

$f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 8 = -27 + 9 + 8 = -10$
$f(0) = 0^3 - 3 \cdot 0 + 8 = 8$

Luego f(x) alcanza su máximo absoluto en el intervalo $[-3, 0]$ *en el punto* $(-1, 12)$

b) Corte entre f(x) y g(x)
$x^3 - 3x + 8 = -3x$
$x^3 + 8 = 0$
$x^3 = -8$
$x = \sqrt[3]{-8} = -2$
Para $x = -2$, $g(-2) = -3(-2) = 6$
El punto de corte entre f(x) y g(x) es $(-2, 6)$.

c) Área limitada por $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = -3$, $x = 0$
De los cálculos de los apartados anteriores podemos realizar una representación gráfica de las funciones que limitan el área a calcular,



Calculamos este área de la siguiente forma,

$$A=\int_{-3}^{-2}\left[(-3x)-(x^3-3x+8)\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[(x^3-3x+8)-(-3x)\right]dx=\int_{-3}^{-2}\left[-3x-x^3+3x-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3-3x+8+3x\right]dx=$$

$$=\int_{-3}^{-2}\left[-x^3-8\right]dx+\int_{-2}^{0}\left[x^3+8\right]dx=\left[\frac{-x^4}{4}-8x\right]_{-3}^{-2}+\left[\frac{x^4}{4}+8x\right]_{-2}^{0}=$$

$$=\left(\frac{-(-2)^4}{4}-8(-2)\right)-\left(\frac{-(-3)^4}{4}-8(-3)\right)+\left(\frac{0^4}{4}+8\,.\,0\right)-\left(\frac{(-2)^4}{4}+8(-2)\right)=$$

$$=\left(\frac{-16}{4}+16\right)-\left(\frac{-81}{4}+24\right)+0-\left(\frac{16}{4}-16\right)=\frac{-16+64}{4}-\frac{-81+96}{4}-\frac{16-64}{4}=\frac{48}{4}-\frac{15}{4}-\frac{-48}{4}=$$

$$=\frac{48-15+48}{4}=\frac{81}{4}=20´25$$

El área pedida mide 20´25 u. a.

EJERCICIO B

PROBLEMA 3.
a) Obtener la derivada de la función $f(x) = ax + b + sen\ x$ **(0,5 puntos)**. **Calcular** a y b si $O = (0, 0)$ es un punto de la curva $y = ax + b + sen\ x$, cuya recta tangente en $O = (0, 0)$ es el eje OX **(1,8 puntos).**

b) Justificar que la función $g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ se anula en dos puntos del intervalo $[0,\pi]$ **(0,5 puntos).**

c) Calcular esos dos puntos **(0,5 puntos).**

Solución:
a) $f'(x) = a + \cos x$

Calculo de a y b con las condiciones dadas
(0 , 0) es punto de la curva $\rightarrow$ $0 = a \cdot 0 + b + sen\ 0$ $\rightarrow$ $0 = b + 0$ $\rightarrow$ $b = 0$
la recta tangente a la curva en (0 , 0) es el eje OX $\rightarrow$ $f'(0) = 0$ $\rightarrow$ $a + \cos 0 = 0$ $\rightarrow$ $a + 1 = 0$ $\rightarrow$ $a = -1$
Por lo tanto, $a = -1$ *y* $b = 0$

b)

$g(x) = -\frac{2}{\pi}x + sen\ x$ *Intentaremos aplicar el Teorema de Bolzano. Debemos buscar intervalos en que la función g(x) tome valores de distinto signo en los extremos.*

$$g(0) = -\frac{2}{\pi}0 + sen\ 0 = 0$$

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{\pi}\frac{\pi}{2} + sen\ \frac{\pi}{2} = -1 + 1 = 0$$

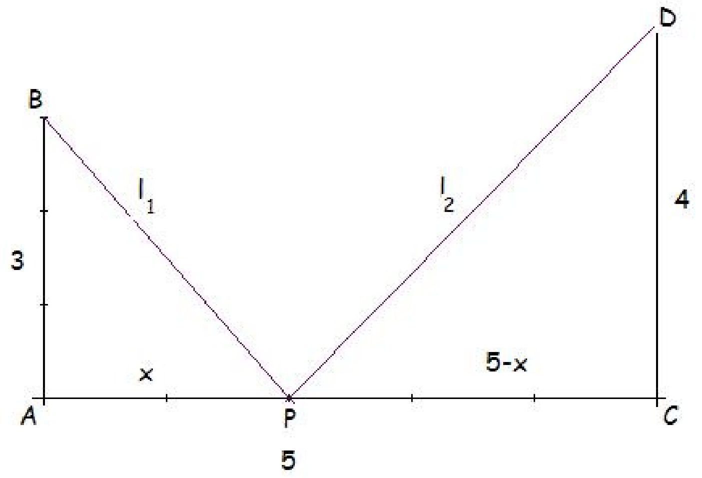
Ya hemos encontrado dos puntos del intervalo [0 , π] en los que se anula g(x).

c) Los puntos del intervalo [0, π] en los que se anula g(x) son $(0, 0)$ *y* $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4.
Dos postes de 3*m* y 4 *m* se hallan clavados verticalmente en el suelo. Sus bases distan 5 *m* y, en el segmento que las une, hay un punto *P* que dista *x* metros de la base del poste más bajo. El extremo superior de cada poste se une con *P* mediante un segmento rectilíneo de cable. Se pide:
a) Obtener la expresión *f(x)* de la longitud total de cable utilizado en ambos segmentos **(1,8 puntos).**
b) Demostrar que esa longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados (**1 punto**). **Calcular** esa longitud mínima **(0,5 puntos).**

Solución:
Gráficamente el problema es,



a) f(x) = longitud el cable.

En el triángulo rectángulo PAB, $l_1 = \sqrt{3^2 + x^2} = \sqrt{9 + x^2}$

En el triángulo rectángulo PCD, $l_2 = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} = \sqrt{16 + (5-x)^2}$

La longitud del cable será: $f(x) = \sqrt{9 + x^2} + \sqrt{16 + (5-x)^2}$

b) Llamamos m_1 a la pendiente del cable l_1 y m_2 a la pendiente del cable l_2

$$|m_1| = \left|\frac{3}{-x}\right| = \frac{3}{x} \quad \textit{ya que } x > 0$$

$$|m_2| = \left|\frac{4}{5-x}\right| = \frac{4}{5-x} \quad \textit{ya que } 5 - x > 0$$

Veamos cuando son iguales estos valores absolutos de las pendientes,

$$\frac{3}{x} = \frac{4}{5-x}$$

$$15 - 3x = 4x$$

$$15 = 4x + 3x$$

$$15 = 7x$$

$$x = \frac{15}{7}$$

Calculemos el mínimo de f(x)

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{9+x^2}} + \frac{-2(5-x)}{2\sqrt{16+(5-x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{9+x^2}} - \frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

$$f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}=0$$

$$(*) \quad \frac{x}{\sqrt{9+x^2}}=\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

elevando al cuadrado,

$$\frac{x^2}{9+x^2}=\frac{(5-x)^2}{16+(5-x)^2}$$

$$x^2\left[16+(5-x)^2\right]=\left(9+x^2\right)(5-x)^2$$

$$16x^2+x^2(5-x)^2=9(5-x)^2+x^2(5-x)^2$$

$$16x^2=9(5-x)^2$$

$$16x^2=9\left(25-10x+x^2\right)$$

$$16x^2=225-90x+9x^2$$

$$7x^2+90x-225=0$$

$$x=\frac{-90\pm\sqrt{90^2-4\,.\,7\,.\,(-225)}}{2\,.\,7}=\frac{-90\pm\sqrt{14400}}{14}=\frac{-90\pm 120}{14}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-90+120}{14}=\dfrac{30}{14}=\dfrac{15}{7}\\[2ex]\dfrac{-90-120}{14}=\dfrac{-210}{14}=-15\end{array}\right.$$

debemos comprobar si son soluciones de la ecuación inicial (*)

$$x=-15$$

$$\frac{-15}{\sqrt{9+(-15)^2}}=\frac{5-(-15)}{\sqrt{16+(5-(-15))^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}}=\frac{20}{\sqrt{16+20^2}}$$

$$\frac{-15}{\sqrt{234}}=\frac{20}{\sqrt{416}}$$

evidentemente un número negativo no puede ser igual a uno positivo, luego x = – 15 no es solución

$$x=\frac{15}{7}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\left(\frac{15}{7}\right)^2}}=\frac{5-\frac{15}{7}}{\sqrt{16+\left(5-\frac{15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{35-15}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{35-15}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\left(\frac{20}{7}\right)^2}}$$

$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{9+\frac{225}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{16+\frac{400}{49}}}$$

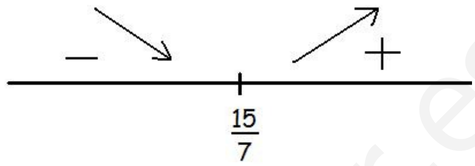
$$\frac{\frac{15}{7}}{\sqrt{\frac{666}{49}}}=\frac{\frac{20}{7}}{\sqrt{\frac{1184}{49}}} \rightarrow \frac{\frac{15}{7}}{\frac{\sqrt{666}}{7}}=\frac{\frac{20}{7}}{\frac{\sqrt{1184}}{7}} \rightarrow \frac{15}{\sqrt{666}}=\frac{20}{\sqrt{1184}} \rightarrow \frac{15}{3\sqrt{74}}=\frac{20}{4\sqrt{74}} \rightarrow \frac{5}{\sqrt{74}}=\frac{5}{\sqrt{74}}$$

luego $x=\frac{15}{7}$ *es solución*

Para determinar si $x=\frac{15}{7}$ *es mínimo o máximo relativo, estudiamos el signo de f´(x) alrededor de él*

$$f\,'(x)=\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}-\frac{(5-x)}{\sqrt{16+(5-x)^2}}$$

x	$f\,'(x)$
0	$\frac{0}{\sqrt{9+0^2}}-\frac{(5-0)}{\sqrt{16+(5-0)^2}}=-\frac{5}{\sqrt{16+25}}<0$
5	$\frac{5}{\sqrt{9+5^2}}-\frac{(5-5)}{\sqrt{16+(5-5)^2}}=\frac{5}{\sqrt{9+25}}>0$



Por lo tanto en $x=\frac{15}{7}$ *hay un mínimo relativo.*

Hemos demostrado que longitud total de cable es mínima cuando son iguales los valores absolutos de las pendientes de los dos segmentos considerados

PROBLEMA A.3. Dadas las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = 2x^2 - x$, se pide:

a) Obtener razonadamente los puntos de intersección A y B de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$. *(3 puntos)*

b) Demostrar que $f(x) \geq g(x)$ cuando $x \geq 0$. *(3 puntos)*

c) Calcular razonadamente el área de la superficie limitada por las dos curvas entre los puntos A y B. *(4 puntos)*

Solución:

a) Puntos de intersección entre $y = f(x)$ *e* $y = g(x)$

Debemos resolver la siguiente ecuación:

$x^3 = 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x = 0$

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \;\rightarrow\; (x-1)^2 = 0 \;\rightarrow\; x - 1 = 0 \;\rightarrow\; x = 1 \end{cases}$$

Para $x = 0$, $f(0) = 0^3 = 0 \rightarrow (0, 0)$

Para $x = 1$, $f(1) = 1^3 = 1 \rightarrow (1, 1)$

Los puntos de intersección buscados son: $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$

b) $f(x) \geq g(x)$

Veamos cuando se cumple esta desigualdad.

$x^3 \geq 2x^2 - x$

$x^3 - 2x^2 + x \geq 0$

Según hemos obtenido en el apartado anterior: $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$

Como $(x-1)^2$ *es siempre positivo, por estar elevado al cuadrado, el signo del primer miembro de la desigualdad depende del de* x.

Luego para $x \geq 0$ *se cumple que* $x^3 - 2x^2 + x \geq 0$ *y por lo tanto* $f(x) \geq g(x)$. *c.q.d.*

c) Representemos gráficamente las dos curvas.

Por lo resuelto en el apartado a) conocemos los puntos de corte entre ambas, $A = (0, 0)$ *y* $B = (1, 1)$.

$y = 2x^2 - x$

Es una parábola. Buscamos sus puntos de corte con los ejes coordenados y su vértice.

$x = 0 \rightarrow y = 2\,0^2 - 0 = 0 \rightarrow (0, 0)$

$$y = 0 \;\rightarrow\; 2x^2 - x = 0 \;\rightarrow\; x(2x-1) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 & (0,0) \\ 2x - 1 = 0 \;\rightarrow\; 2x = 1 \;\rightarrow\; x = \dfrac{1}{2} & \left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \end{cases}$$

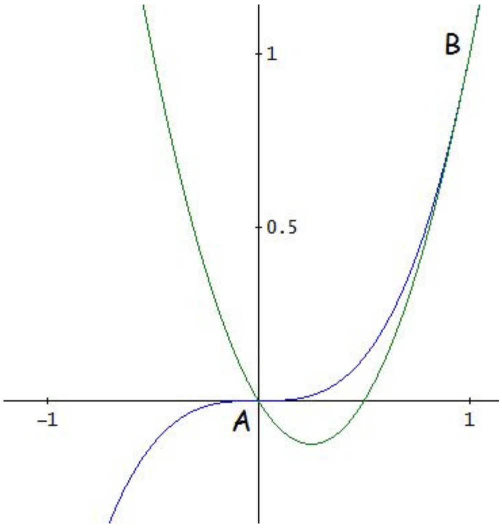
$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-1)}{2.2} = \frac{1}{4} \;\rightarrow\; y = 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2\frac{1}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} = \frac{-1}{8} \qquad \left(\frac{1}{4}, \frac{-1}{8}\right)$$

$y = x^3$

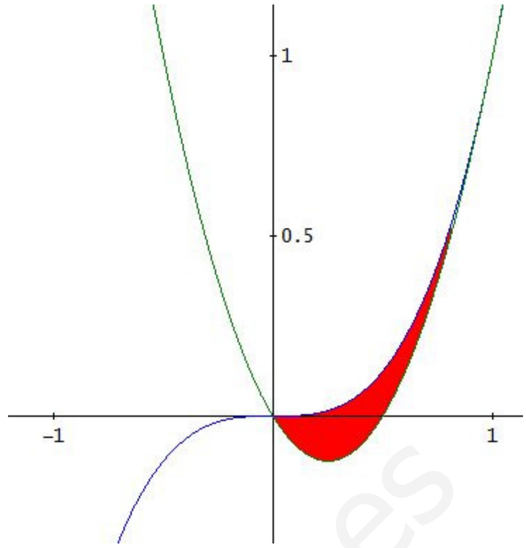
La representamos a partir de una tabla de valores,

x	$y = x^3$
-1	-1
0	0
1	1

La representación gráfica será:



El área a calcular es:



El cálculo del área pedida será mediante la siguiente integral definida:

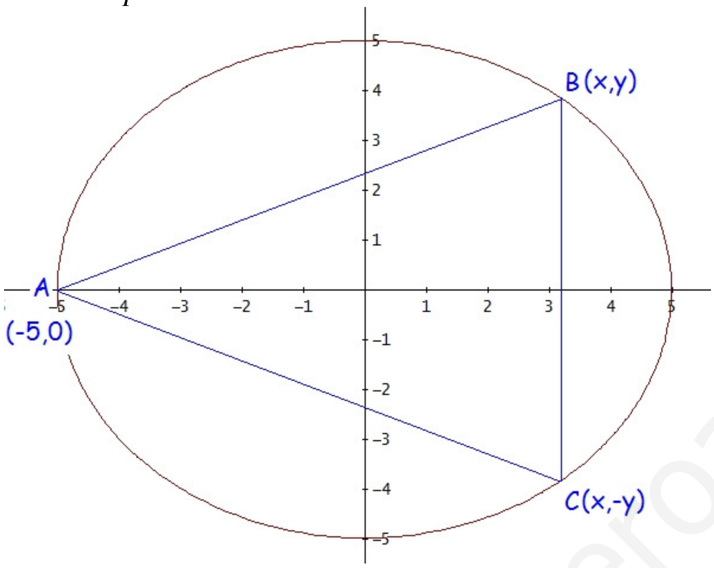
$$\int_0^1 \left(x^3 - \left(2x^2 - x\right)\right)dx = \int_0^1 \left(x^3 - 2x^2 + x\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 0 = \frac{3-8+6}{12} = \frac{1}{12}$$

El área de la superficie limitada por las dos curvas mide $\frac{1}{12}$ *u.a.*

PROBLEMA B.3. Dos elementos de un escudo son una circunferencia y un triángulo. La circunferencia tiene centro (0,0) y radio 5. Uno de los vértices del triángulo es el punto A=(– 5,0). Los otros dos vértices del triángulo son los puntos de la circunferencia B=(x,y) y C=(x,– y). Se pide obtener razonadamente:

a) El área del triángulo en función de x. *(3 puntos)*
b) Los vértices B y C para los que es máxima el área del triángulo. *(5 puntos)*
c) El valor máximo del área del triángulo. *(2 puntos)*

Solución:
Gráficamente el problema es:



a) Área del triángulo

Por construcción es un triángulo isósceles, por lo que podemos calcular su área fácilmente.

$$A = \frac{b\,.\,h}{2}$$

siendo $b = 2y$, $h = 5 + x$ *(siendo* $-5 < x < 5$*; si* $x = -5$ *sería un punto y si* $x = 5$ *una recta)*

Debemos encontrar el valor de y en función de x. B y C son puntos de la circunferencia, obtengamos su ecuación.

Es una circunferencia de centro (0 , 0) y radio 5 $\rightarrow$ $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2 \rightarrow x^2 + y^2 = 25$

Despejemos y:

$$y^2 = 25 - x^2$$

$$y = \pm\sqrt{25-x^2}$$

Luego $b = 2y = 2\sqrt{25-x^2}$

El área del triángulo será $A(x) = \dfrac{2\sqrt{25-x^2}\;(5+x)}{2} = (5+x)\sqrt{25-x^2}$

siendo $-5 < x < 5$.

b) Máximo de A(x)

$$A(x) = (5+x)\sqrt{25-x^2} \qquad y \quad Dom\ A = [-5\,,\,5\,]$$

$$A'(x) = \sqrt{25-x^2} + (5+x)\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}} = \sqrt{25-x^2} - \frac{x(5+x)}{\sqrt{25-x^2}}$$

$$A'(x) = 0$$

$$\sqrt{25-x^2}-\frac{x(5+x)}{\sqrt{25-x^2}}=0$$

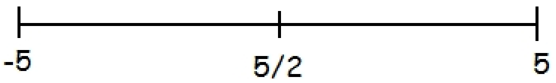
$$25-x^2-5x-x^2=0$$

$$25-2x^2-5x=0$$

$$2x^2+5x-25=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\,.\,2\,.\,(-25)}}{2\,.\,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{25+200}}{4}=$$

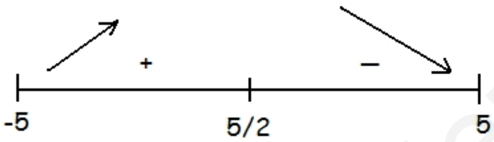
$$=\frac{-5\pm\sqrt{225}}{4}==\frac{-5\pm 15}{4}=\begin{cases}\dfrac{-5+15}{4}=\dfrac{10}{4}=\dfrac{5}{2}\\[2mm] \dfrac{-5-15}{4}=\dfrac{-20}{4}=-5\end{cases}$$

Estudiemos el signo de A´ para determinar máximos y mínimos. Considerando el dominio de A(x) y las soluciones de A´(x) =0, hay que estudiar A´ en los siguientes intervalos,



x	A'
0	$\sqrt{25-0^2}-\dfrac{0(5+0)}{\sqrt{25-0^2}}=5>0$
4	$\sqrt{25-4^2}-\dfrac{4(5+4)}{\sqrt{25-4^2}}=\sqrt{9}-\dfrac{36}{\sqrt{9}}=3-\dfrac{36}{3}=3-12=-9<0$

Es decir que,



Luego la función A(x) alcanza su máximo relativo en x = 5/2, como además A(x) es creciente a la izquierda de 5/2 y decreciente a la derecha, el máximo relativo es absoluto.
Por lo que el área del triángulo es máxima para x = 5/2.
Obtengamos los vértices B y C. Como estos vértices son simétricos respecto del eje OY, sólo obtendremos el valor positivo de y.

$$Para \quad x=\frac{5}{2} \quad \rightarrow \quad y=\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{25-\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{100-25}{4}}=\sqrt{\frac{75}{4}}=\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

Luego el área del triángulo es máxima cuando los vértices B y C son:

$$B=\left(\frac{5}{2},\frac{5\sqrt{3}}{2}\right) \quad y \quad C=\left(\frac{5}{2},\frac{-5\sqrt{3}}{2}\right)$$

c) El valor máximo del área del triángulo, según lo calculado en el apartado anterior, será:

$$A\left(\frac{5}{2}\right)=\left(5+\frac{5}{2}\right)\sqrt{25-\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{15}{2}\,\frac{5\sqrt{3}}{2}=\frac{75\sqrt{3}}{4}\approx 32'48\,u.a.$$

PROBLEMA B.3. Un coche recorre el arco de parábola Γ de ecuación $2y = 36 - x^2$, variando la x de -6 a 6. Se representa por $f(x)$ a la distancia del punto (0 , 9) al punto (x , y) del arco Γ donde está situado el coche. Se pide obtener **razonadamente**:

a) La expresión de $f(x)$. *(2 puntos)*
b) Los puntos del arco Γ donde la distancia $f(x)$ tiene mínimos relativos. *(2 puntos)*
c) Los valores máximo y mínimo de la distancia $f(x)$. *(2 puntos)*
d) El área de la superficie limitada por el arco de parábola Γ y el segmento rectilíneo que une los puntos (– 6 , 0) y (6 , 0). *(4 puntos)*

Solución:
Veamos la representación gráfica del problema.
Representemos la parábola $2y = 36 - x^2$

$$y = \frac{36 - x^2}{2}$$

$$x = 0 \quad \to \quad y = 18$$

$$y = 0 \quad \to \quad \frac{36 - x^2}{2} = 0$$

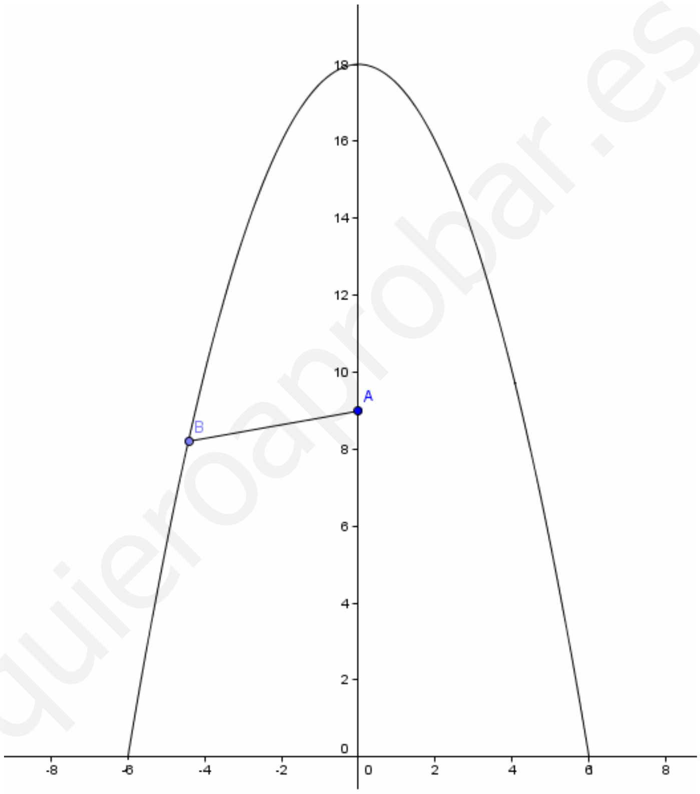
$$36 - x^2 = 0$$

$$36 = x^2$$

$$x = \pm\sqrt{36} = \pm 6$$

Como los puntos de corte con el eje OX son simétricos respecto del (0,0), el vértice de la parábola está en x = 0

El punto A es el (0 , 9) y el B uno cualquiera de la parábola.



a) f(x) = d ((0,9) , (x,y)) siendo (x,y) un punto del arco de parábola Γ, luego $y = \frac{36 - x^2}{2}$

$$f(x) = d((0,9),(x,y)) = d\left((0,9),\left(x, \frac{36-x^2}{2}\right)\right) = \sqrt{(0-x)^2 + \left(9 - \frac{36-x^2}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(\frac{18-36+x^2}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{x^2 + \left(\frac{x^2-18}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 + x^4 - 36x^2 + 324}{4}} = \sqrt{\frac{x^4 - 32x^2 + 324}{4}} = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2}$$

Luego $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 - 32x^2 + 324}}{2} \quad x \in [-6 , 6]$

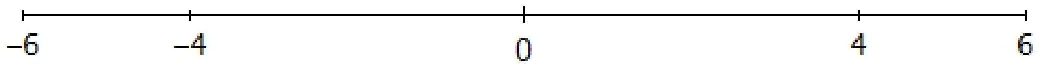
Veamos como es el radicando, $x^4 - 32x^2 + 324 = (x^2)^2 - 2 \cdot 16 \cdot x^2 + 16^2 + 68 = (x^2 - 16)^2 + 68$
Por lo tanto $x^4 - 32x^2 + 324$ *es siempre positivo.*

b) Para buscar los mínimos relativos de f(x) estudiemos la monotonía de f(x). Debemos estudiar el digno de f´(x).

$$f'(x)=\frac{1}{2}\,\frac{4x^3-64x}{2\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{4x^3-64x}{4\sqrt{x^4-32x^2+324}}=\frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}$$

$$f'(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{x^3-16x}{\sqrt{x^4-32x^2+324}}=0 \;\rightarrow\; x^3-16x=0 \;\rightarrow\; x(x^2-16)=0\left\langle\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-16=0;\;\; x^2=16;\;\; x=\pm 4\end{array}\right.$$

Debemos estudiar el signo de f´(x) en los siguientes intervalos,

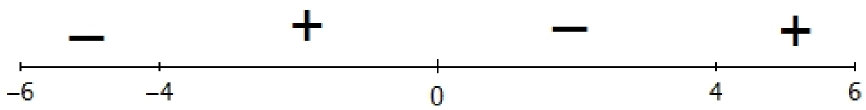


En f´(x) el denominador es la raíz cuadrada de una expresión que siempre es positiva (visto en el apartado anterior), luego no aporta signo a f´(x); por lo tanto el signo de f´(x) sólo depende del numerador, $x^3 - 16x$, polinomio de tercer grado con tres raíces reales (0 , – 4 y 4), esto quiere decir que en los intervalos indicados el signo del polinomio va alternando.

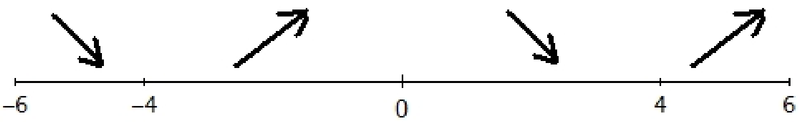
Veamos su signo, por ejemplo, para x = 1

$x = 1 \;\rightarrow\; 1^3 - 16\,.\,1 = 1 - 16 = -15 < 0$

luego:



y la monotonía será:



Es decir que f(x) tiene dos mínimos relativos en x = – 4 y en x = 4.

Y los puntos del arco Γ correspondientes son:

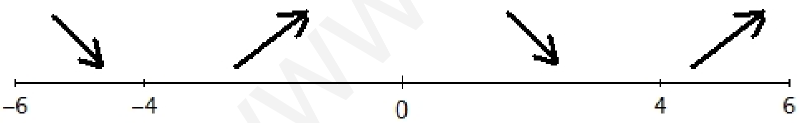
$$x=-4 \;\rightarrow\; y=\frac{36-(-4)^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

$$x=4 \;\rightarrow\; y=\frac{36-4^2}{2}=\frac{36-16}{2}=10$$

Finalmente, los puntos del arco Γ donde la distancia f(x) tiene mínimos relativos son (– 4 , 10) y (4 , 10)

c) Valores máximo y mínimo de f(x).

Según lo estudiado en el apartado anterior f(x) cumple, en relación a su crecimiento y decrecimiento,



Además, f(x) es una función continua definida en un intervalo cerrado. Luego sus extremos absolutos se alcanzarán en los extremos relativos o en los extremos del intervalo. Veámoslo:

Mínimos relativos de f(x):

$$x=-4 \;\rightarrow\; f(-4)=\frac{\sqrt{(-4)^4-32\,.\,(-4)^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{68}}{2}=\frac{2\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}\approx 4'1231$$

$$x=4 \;\rightarrow\; f(4)=\frac{\sqrt{4^4-32\,.\,4^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{68}}{2}=\frac{2\sqrt{17}}{2}=\sqrt{17}\approx 4'1231$$

Máximo relativo de f(x): $x=-0 \;\rightarrow\; f(0)=\dfrac{\sqrt{0^4-32\,.\,0^2+324}}{2}=\dfrac{\sqrt{324}}{2}=\dfrac{18}{2}=9$

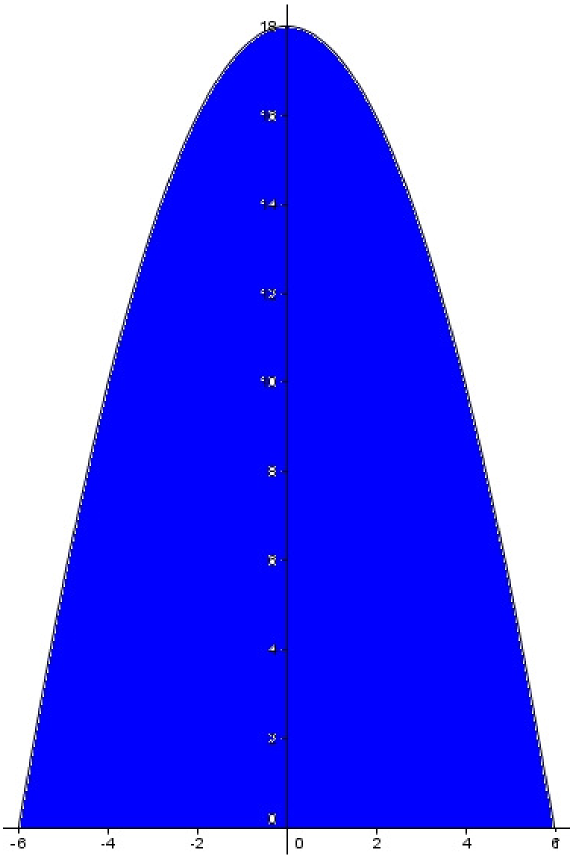
Extremos el intervalo:

$$x=-6 \;\rightarrow\; f(-4)=\frac{\sqrt{(-6)^4-32\,.\,(-6)^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{468}}{2}=\frac{2\sqrt{117}}{2}=\sqrt{117}\approx 10'8167$$

$$x=6 \;\rightarrow\; f(4)=\frac{\sqrt{6^4-32\,.\,6^2+324}}{2}=\frac{\sqrt{468}}{2}=\frac{2\sqrt{117}}{2}=\sqrt{117}\approx 10'8167$$

Y finalmente, el valor máximo de f(x) es $\sqrt{117}$ y el mínimo es $\sqrt{17}$.

d) El área a calcular es:



Este área la calculamos mediante la siguiente integral definida:

$$\int_{-6}^{6}\left(\frac{36-x^2}{2}\right)dx=\frac{1}{2}\int_{-6}^{6}\left(36-x^2\right)dx=\frac{1}{2}\left[36x-\frac{x^3}{3}\right]_{-6}^{6}=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(36\,.\,6-\frac{6^3}{3}\right)-\left(36\,.\,(-6)-\frac{(-6)^3}{3}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[216-\frac{216}{3}+216-\frac{216}{3}\right]=\frac{1}{2}\left[432-\frac{432}{3}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1296-432}{3}=\frac{1}{2}\,\frac{864}{3}=144$$

El área pedida mide 144 u^2.

PROBLEMA A.3. Se definen las funciones f y g por $f(x) = -x^2 + 2x$ y $g(x) = x^2$. Obtener **razonadamente**:

a) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de cada una de esas dos funciones. *(2 puntos).*

b) El máximo relativo de la función $f(x) = -x^2 + 2x$ y el mínimo relativo de $g(x) = x^2$. *(2 puntos).*

c) Los puntos de intersección de las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$. *(2 puntos).*

d) El área encerrada entre las curvas $y = -x^2 + 2x$ e $y = x^2$, donde en ambas curvas la x varía entre 0 y 1. *(4 puntos).*

Solución:

$f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinómicas, por lo que su dominio es $\Re$.

a) $f(x) = -x^2 + 2x$

$f'(x) = -2x + 2$

$-2x + 2 > 0; \quad -2x > -2; \quad x < 1$

Por lo tanto: $f(x)$ es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$

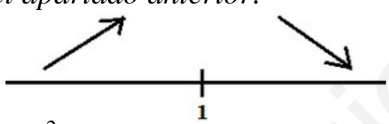
$g(x) = x^2$

$g'(x) = 2x$

$2x > 0; \quad x > 0$

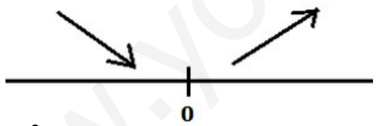
Por lo tanto $g(x)$ es creciente en $(0, +\infty)$ y decreciente en $(-\infty, 0)$

b) De lo obtenido en el apartado anterior:

De $f(x)$ sabemos:  *luego $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 1$*

Para $x = 1$, $f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$

$f(x)$ tiene un máximo relativo en $(1, 1)$

De $g(x)$ sabemos:  *luego $g(x)$ tiene un mínimo relativo en $x = 0$*

Para $x = 0$, $g(0) = 0^2 = 0$

$g(x)$ tiene un mínimo relativo en $(0, 0)$

c) Resolvemos la ecuación: $-x^2 + 2x = x^2; \quad -2x^2 + 2x = 0; \quad 2x(-x + 1) = 0;$

$$\begin{cases} 2x = 0 \quad \rightarrow \quad x = 0 \\ -x + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x = 1 \end{cases}$$

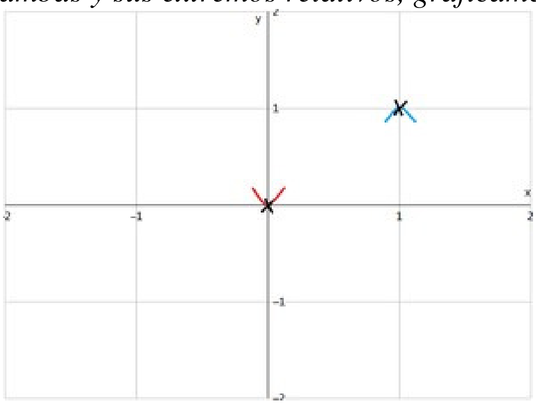
Para $x = 0$, $g(0) = 0^2 = 0$

$x = 1$, $g(1) = 1^2 = 1$

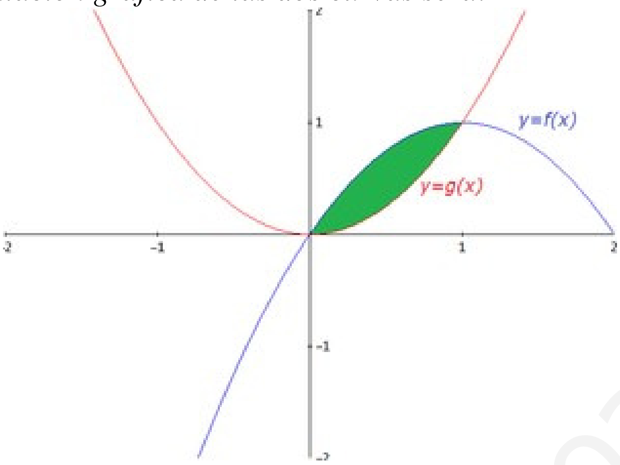
Los puntos de corte entre las dos curvas indicadas son: $(0, 0)$ y $(1, 1)$

d) Para calcular el área pedida representamos las dos curvas indicadas.

De lo estudiado en los apartados anteriores de las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ conocemos: los puntos de corte entre ambas y sus extremos relativos, gráficamente:



La representación gráfica de las dos curvas será:



Del enunciado del problema, de la representación gráfica anterior sólo debemos considerar las funciones para valores de x entre 0 y 1. El área a calcular es la sombreada. Y el cálculo de esta área es:

$$\int_0^1 \left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_0^1\left(-x^2+2x-x^2\right)dx=\int_0^1\left(-2x^2+2x\right)dx=\left[-\frac{2x^3}{3}+x^2\right]_0^1=$$

$$=\left(-\frac{2\,.\,1^3}{3}+1^2\right)-\left(-\frac{2\,.\,0^3}{3}+0^2\right)=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$$

El área pedida mide $\frac{1}{3}$ ***u.a.***

Problema 3.2. Sea la función con dominio los números reales no nulos $f(x)=\frac{4}{x}$.

a) Calcular la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$. *(1.8 puntos)*.

b) Determinar los puntos M y N de la gráfica de $f(x)$ para los que las rectas tangentes a la gráfica en M y N se cortan en el punto (4 , – 8). *(1.5 puntos)*.

Solución:

a) Recta tangente a f(x) en x = 2

$$x=2 \quad \rightarrow \quad f(2)=\frac{4}{2}=2 \quad \rightarrow \quad punto \quad (2,2)$$

$$f'(x)=\frac{-4}{x^2} \quad \rightarrow \quad m=f'(2)=\frac{-4}{2^2}=-1$$

la ecuación de la recta tangente pedida será: $y-2=-1\,(x-2)$

$y-2=-x+2$

$\mathbf{y=-x+4}$

Recta normal a f(x) en x = 2

punto (2,2)

pendiente m´, siendo m´= -1/m; luego m´ = – 1/(– 1) = 1

la ecuación de la recta normal pedida será: $y-2=1\,(x-2)$; $\mathbf{y=x}$

b) Buscamos dos rectas tangentes a f(x) que pasan por el punto (4 , – 8), de ellas conocemos:

punto: (4 , – 8)

pendiente: $m=f'(x)=\frac{-4}{x^2}$

La ecuación de las rectas buscadas será:

$$y+8=\frac{-4}{x^2}(x-4)$$

como las rectas pasan por puntos de la función f(x), pasan por un punto de coordenadas

$$\left(x,\frac{4}{x}\right)$$

luego $\frac{4}{x}+8=\frac{-4}{x^2}(x-4)$

$$\frac{4+8x}{x}=\frac{-4x+16}{x^2}$$

$$4x^2+8x^3=-4x^2+16x$$

$$8x^3+8x^2-16x=0$$

$$8x\left(x^2+x-2\right)=0 \left\langle \begin{array}{l} 8x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \\ x^2+x-2=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\left\langle \begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

la solución x = 0 no es válida ya que el dominio de f(x) son los números reales no nulos.

Por lo que M y N son puntos de la función f(x) con abcisas – 2 y 1, es decir,

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad y=\frac{4}{-2}=-2$$

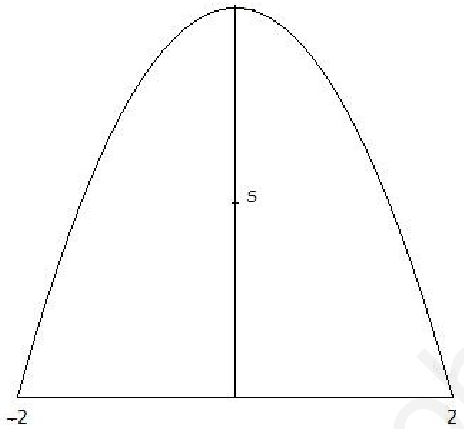
$$x=1 \quad \rightarrow \quad y=\frac{4}{1}=4$$

Los puntos pedidos serán M (– 2 , – 2) y N (1 , 4).

Problema 4.2. El borde de un estanque está formado por el arco de curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2, 0)$ y $(2,0)$ y el segmento rectilíneo que une estos dos puntos. Un surtidor está situado en el punto de coordenadas $(0,2)$. Se pide:
a) Determinar, razonadamente, el punto del segmento rectilíneo del borde del estanque que está más próximo del surtidor. *(0,8 puntos).*
b) Determinar, razonadamente, los puntos del arco de curva del borde del estanque que están más próximos del surtidor. *(1,6 puntos).*
c) ¿Cuáles son los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor? *(0,9 puntos).*

Solución:

La representación gráfica del estanque es:



a)

El punto del segmento rectilíneo más cercano al surtidor, punto S(0,2), es el (0,0) ya que la distancia del surtidor a este punto es 2 y a cualquier otro punto del segmento rectilíneo sería:

$$d(S,(d,0)) = \sqrt{(d-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{d^2+4}\ ,\ d \in [-2,2]\ y\ d \neq 0$$

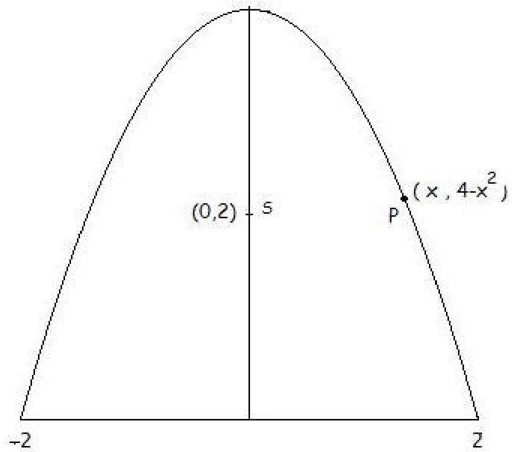
como $d^2 > 0$, entonces $4 + d^2 > 4$
como tanto $4 + d^2$ como 4 son positivos se cumple que

$$\sqrt{4+d^2} > \sqrt{4} \quad \to \quad \sqrt{4+d^2} > 2$$

es decir, d(S,(d,0)) > d(S, (0,0)).

b)

Las coordenadas de cualquier punto del arco de curva son (x , $4 - x^2$)



$$d(S,P) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$$

d(S,P) será mínima cuando $d = x^2 + (2-x^2)^2$ sea mínima, calculemos el mínimo de esta última función.
$d' = 2x + 2(2-x^2)(-2x) = 2x - 8x + 4x3 = 4x^3 - 6x$

$$4x^3 - 6x = 0;\quad 2x(2x^2-3) = 0 \quad \begin{cases} 2x = 0 \quad \to \quad x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \quad \to \quad x^2 = \dfrac{3}{2} \quad \to \quad x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}} \end{cases}$$

Para ver para cuáles de los anteriores valores la función d es mínima calculemos su segunda derivada,
$d'' = 12x^2 - 6$
para $x = 0$, $d'' = 12 \cdot 0^2 - 6 = -6 < 0$, máximo

$$para\ x=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad d''=12\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-6=12\frac{3}{2}-6=18-6=12>0 \quad mínimo$$

$$para\ x=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad d''=12\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2-6=12\frac{3}{2}-6=18-6=12>0 \quad mínimo$$

Tenemos las abcisas de los puntos buscados, calculemos sus ordenadas,

$$x=\sqrt{\frac{3}{2}} \quad y=4-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$x=-\sqrt{\frac{3}{2}} \quad y=4-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$$

Por lo tanto los puntos del arco de curva del borde el estanque que están más próximos al surtidor son:

$$\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right) \quad y \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$$

c)

En los apartados anteriores hemos obtenido los puntos más cercanos al surtidor del borde rectilíneo y del curvo; estos puntos son

$$(0,0)\ ,\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right) \quad y \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$$

El surtidor está en el punto (0,2), calculemos la distancia del surtidor a cada uno de los puntos anteriores.
Según obtuvimos en el apartado a), $d_1 = d(S, (0,0)) = 2$
Según obtuvimos en el apartado b), los puntos del arco de curva distan del surtidor

$$d(S,P)=\sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$$

$$d_2=d\left(S,\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)\right)=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(2-\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}=1'3228757$$

$$d_3=d\left(S,\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\frac{5}{2}\right)\right)=\sqrt{\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+\left(2-\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{7}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}=1'3228757$$

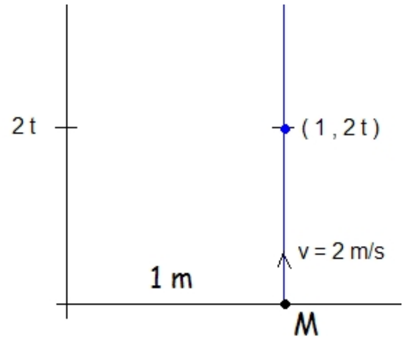
Por lo que los puntos del borde del estanque más próximos al surtidor son: $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right) \quad y \quad \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\ ,\ \frac{5}{2}\right)$

Problema 4.1. Un móvil se mueve con velocidad constante de 2m/s, en el primer cuadrante, sobre la recta x = 1, partiendo del punto M = (1,0) situado a 1 m del origen. Se pide obtener razonadamente:

a) Las coordenadas del punto M(t) donde está situado el móvil después de t segundos. *(1 punto).*
b) La función m(t) igual a la pendiente de la recta que pasa por el punto O = (0,0) y por el punto M(t). *(1,3 puntos).*
c) La derivada de la función m(t). *(1 punto).*

Solución:

a)

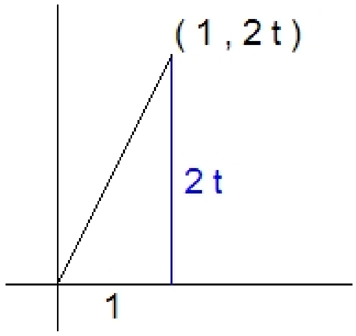


M(t) es el punto en que está situado el móvil al cabo de t segundos. Como el móvil se mueve a una velocidad constante de 2m/s, al cabo de t segundos habrá recorrido 2 t m;

$$e = v\,t$$
$$e = 2\,t$$

Luego M(t) = (1 , 2 t)

b)



La pendiente de la recta que pasa por los puntos (0 , 0) y (1 , 2 t) es

$$m = \frac{2t}{1} = 2t$$

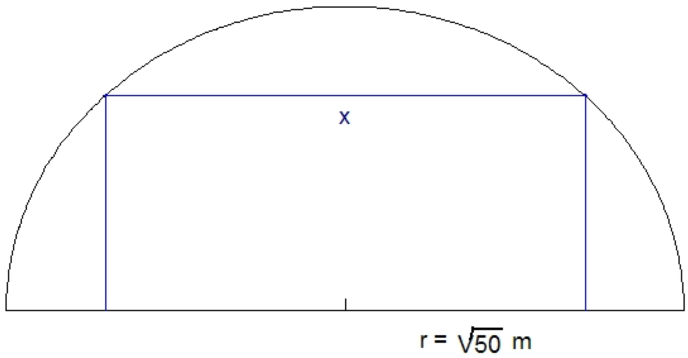
Luego m(t) = 2 t

c) Como m(t) = 2 t entonces m´(t) = 2

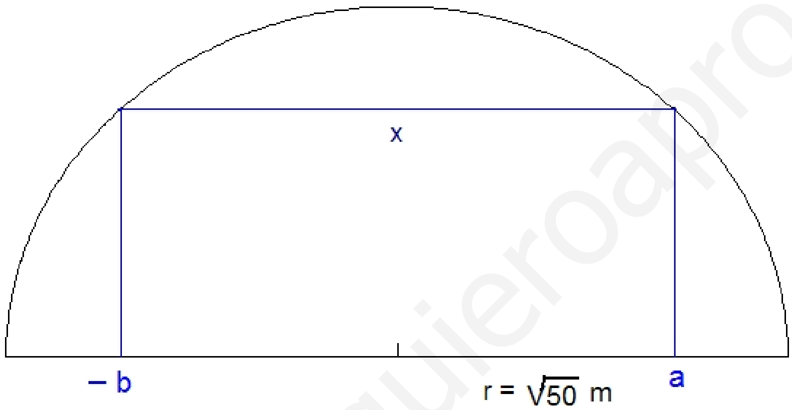
Problema 4.2. En un terreno con forma de semicírculo de radio $\sqrt{50}$ metros, se dibuja un rectángulo que tiene dos vértices sobre la semicircunferencia del perímetro del terreno. Los otros dos vértices del rectángulo están sobre el segmento rectilíneo de dicho perímetro y distan x metros. Obtener razonadamente:

a) El área del rectángulo en función de x. *(1,3 puntos).*
b) El valor de x para el que es máxima el área del rectángulo. *(2 puntos).*

Solución:
a) Del enunciado del problema obtenemos que la representación gráfica de este es:



Situando este gráfico en unos ejes cuyo origen de coordenadas sea el centro desde el que se traza el semicírculo:



Vamos a comprobar que los vértices del rectángulo tienen por abcisa -x/2 y x/2.

Sean a y b dos números positivos y los vértices del rectángulo situados sobre el segmento rectilíneo que tengan de coordenadas (– b , 0) y (a , 0).
Calculemos las coordenadas de los vértices que están sobre la semicircunferencia.
La ecuación de una circunferencia es $\alpha^2 + \beta^2 = r^2$
En este caso particular,

$$\alpha^2 + \beta^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 + \beta^2 = 50$$

Las ordenadas de los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia serán,

Para $\alpha = a$

$$a^2 + \beta^2 = 50$$
$$\beta^2 = 50 - a^2$$
$$\beta = \pm\sqrt{50 - a^2}$$

Ahora bien, como el vértice que estamos calculando está sobre el eje X, β > 0, luego

$$\beta = \sqrt{50 - a^2}$$

Para $\alpha = -b$

$$(-b)^2 + \beta^2 = 50$$
$$b^2 + \beta^2 = 50$$
$$\beta = \sqrt{50 - b^2}$$

Pero los vértices del rectángulo sobre la semicircunferencia deben tener la misma ordenada, por lo que:

$$\sqrt{50-a^2}=\sqrt{50-b^2}$$
$$50-a^2=50-b^2$$
$$-a^2=-b^2$$
$$a^2=b^2 \quad \rightarrow \quad a=\pm b$$

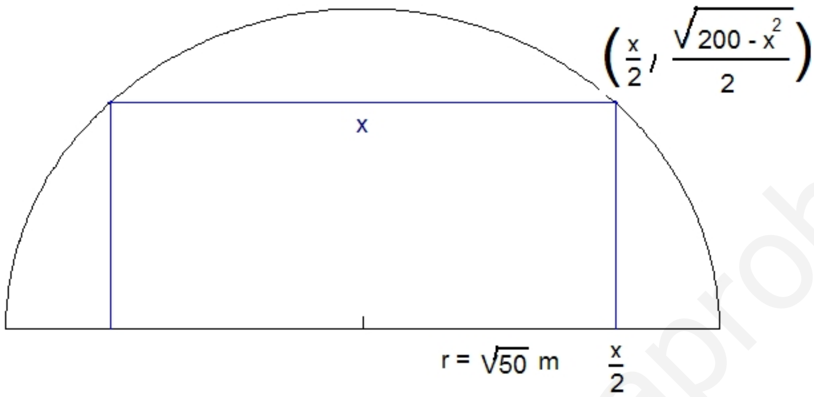
Por la elección que hemos hecho de a y b (ambos positivos), obtenemos que a = b.

Tendiendo en cuenta que $a+b=x \quad \rightarrow \quad a+a=x \quad \rightarrow \quad 2a=x \quad \rightarrow \quad a=\dfrac{x}{2}$

Por lo que la ordenada de los vértices que están sobre la semicircunferencia será:

$$\beta=\sqrt{50-\left(\frac{x}{2}\right)^2}=\sqrt{50-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{\frac{200-x^2}{4}}=\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}$$

La situación final del gráfico es,



El área del rectángulo será

$$A(x)=x\frac{\sqrt{200-x^2}}{2}=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

Veamos los valores que puede tomar x. Por definición x es una distancia entre dos puntos, luego x ≥ 0. Además, puesto que el rectángulo está construido dentro de una semicircunferencia, se cumplirá que

$$\frac{x}{2}\le\sqrt{50} \quad \rightarrow \quad x\le 2\sqrt{50}. \qquad \text{Luego} \quad 0\le x\le 2\sqrt{50} \quad (\approx \quad 0\le x\le 14'14\,)$$

b) ¿x / área es máxima?

$$A(x)=\frac{x\sqrt{200-x^2}}{2}$$

$$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{200-x^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$$

$$A'(x)=0$$

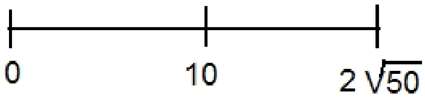
$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)=0$$

$$\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}=0$$

$$200-x^2-x^2=0$$

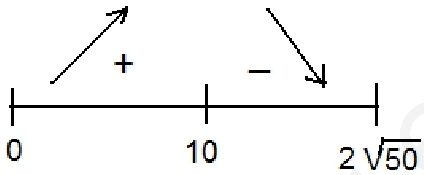
$$200-2x^2=0 \quad \rightarrow \quad 200=2x^2 \quad \rightarrow \quad x^2=\frac{200}{2} \quad \rightarrow \quad x^2=100 \quad \rightarrow \quad x=\pm 10$$

Como los valores de x deben ser mayores o iguales que cero, sólo sirve la solución x = 10.
Veamos ahora si para este valor de x A(x) tiene un máximo, para ello estudiamos el signo de A´ en los siguientes intervalos,



x	$A'(x)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{200-x^2}}\right)$
2	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-2^2}-\frac{2^2}{\sqrt{200-2^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{196}-\frac{4}{\sqrt{196}}\right)=\frac{1}{2}\left(14-\frac{4}{14}\right)=6'85...>0$
12	$\frac{1}{2}\left(\sqrt{200-12^2}-\frac{12^2}{\sqrt{200-12^2}}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{56}-\frac{144}{\sqrt{56}}\right)=-5'87...<0$

Marcando estos resultados en el intervalo anterior,



Luego en x = 10 hay un máximo relativo que es el absoluto de la función A(x) ya que, en su dominio de definición, a la izquierda de 10 A(x) es creciente y a la derecha decreciente.

Finalmente, el área del rectángulo es máxima para x = 10 m.

Problema 3.2. Dada la función real $f(x) = \dfrac{8}{1+x^2}$, se pide calcular razonadamente:

a) Las derivadas primera y segunda de la función f (x). *(0,8 puntos).*
b) Los puntos de inflexión de la curva y = f (x). *(1 punto).*
c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a la curva y = f (x) . *(1,5 puntos).*

Solución:
a) f(x) y f´´(x)

$$f'(x) = \frac{-8\,.\,2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-16\left(1+x^2\right)^2 - (-16x)\,2\,(1+x^2)\,2x}{\left(1+x^2\right)^4} = \left(\begin{matrix}\text{simplificando entre}\\ (1+x^2)\end{matrix}\right) = \frac{-16\left(1+x^2\right) - (-16x)\,2\ \ 2x}{\left(1+x^2\right)^3} =$$

$$= \frac{-16 - 16x^2 + 64x^2}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{48x^2 - 16}{\left(1+x^2\right)^3} = \frac{16\left(3x^2 - 1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

b) Puntos de inflexión de y = f(x).

$$y = \frac{8}{1+x^2}$$

Veamos el dominio de esta función, $1 + x^2 = 0$; $x^2 = -1$; *sin soluciones reales, luego Dom y = R*
Para calcular los puntos de inflexión estudiemos el signo de y´´

Del apartado anterior sabemos que $y'' = \dfrac{16\left(3x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$

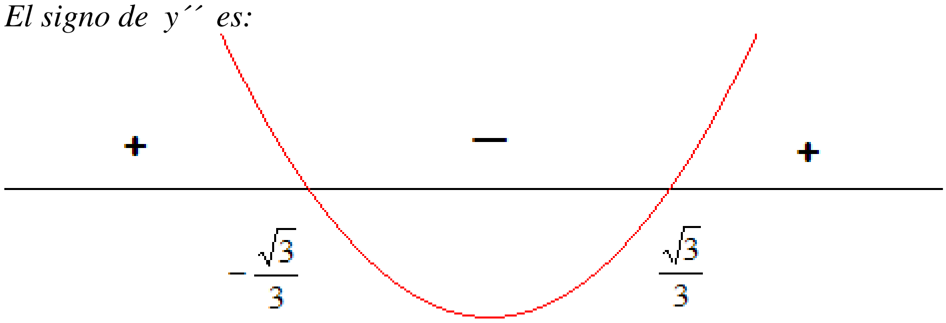
Busquemos las raíces del numerador y denominador,

$16\,(\,3x^2 - 1\,) = 0$; $3x^2 - 1 = 0$; $3x^2 = 1$; $x^2 = 1/3$; $x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{3}} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$(\,1 + x^2\,)^3 = 0$; $1 + x^2 = 0$; *sin soluciones reales (visto anteriormente)*

Representando las soluciones obtenidas en la recta real:

En y´´ el denominador es $(\,1 + x^2\,)^3$ *, pero* $1 + x^2$ *siempre es positivo, luego* $(\,1 + x^2\,)^3$ *también, por lo que el signo de y´´ sólo depende del numerador.*
El numerador es $16\,(\,3x^2 - 1\,)$*, como 16 es positivo sólo debemos estudiar el signo de* $3x^2 - 1$*, que gráficamente es una parábola con coeficiente de* x^2 *positivo.*
El signo de y´´ es:



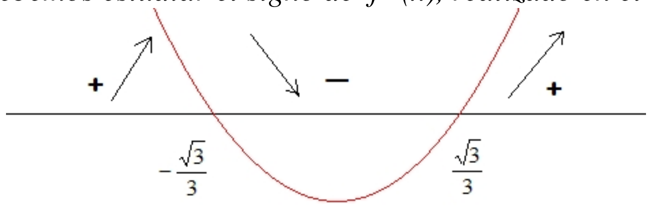
Para los valores de x en que cambia de signo la segunda derivada hay punto de inflexión. Por lo que hay dos puntos de inflexión,

$$Para \quad x=\frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8}{1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{8}{1+\frac{3}{9}}=\frac{8}{\frac{12}{9}}=\frac{72}{12}=6$$

$$Para \quad x=\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad y=\frac{8}{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{8}{1+\frac{3}{9}}=\frac{8}{\frac{12}{9}}=\frac{72}{12}=6$$

$$Los\ puntos\ de\ inflexión\ son \quad \left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 6\right) \quad y \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 6\right)$$

c) La pendiente máxima de las rectas tangentes a y = f(x).
La pendiente de las rectas tangentes a y = f(x)   es   f´(x), buscamos el máximo de f´(x).
Para ello debemos estudiar el signo de f´´(x), realizado en el apartado anterior



El máximo relativo se alcanza en

$$x=\frac{-\sqrt{3}}{3} \quad \rightarrow \quad f'\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-16\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(1+\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(1+\frac{3}{9}\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\left(\frac{12}{9}\right)^2}=\frac{\frac{16\sqrt{3}}{3}}{\frac{144}{81}}=$$

$$=\frac{81 \,.\, 16\sqrt{3}}{144 \,.\, 3}=\frac{4^2\ 3^4\ \sqrt{3}}{4^2\ 3^2\ 3}=3\sqrt{3}$$

Veamos si este máximo relativo es el absoluto. Para ello vamos a representar gráficamente la función

$$g(x)=f'(x)=\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Dom g(x) = R

$(1 + x^2)^2 = 0; \quad 1 + x^2 = 0;$ *sin soluciones reales*

Puntos de corte con los ejes coordenados

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \quad \rightarrow \quad y=0 \\ y=0 \quad \rightarrow \quad \frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=0 \quad \rightarrow \quad -16x=0 \quad \rightarrow \quad x=0 \end{array}\right\} \quad (0,0) \quad único\ punto\ de\ corte$$

Asíntotas

Asíntota vertical, como el domino de la función es R, no hay

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-16x}{x^4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-16}{x^3}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-16x}{\left(1+x^2\right)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16x}{x^4}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16}{x^3}=0$$

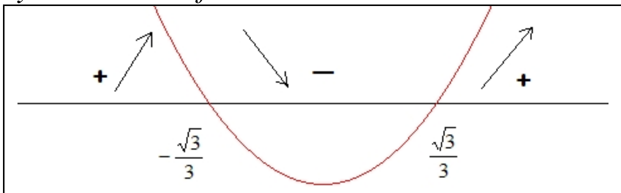
Luego y = 0 es la asíntota horizontal

Asíntota oblicua,

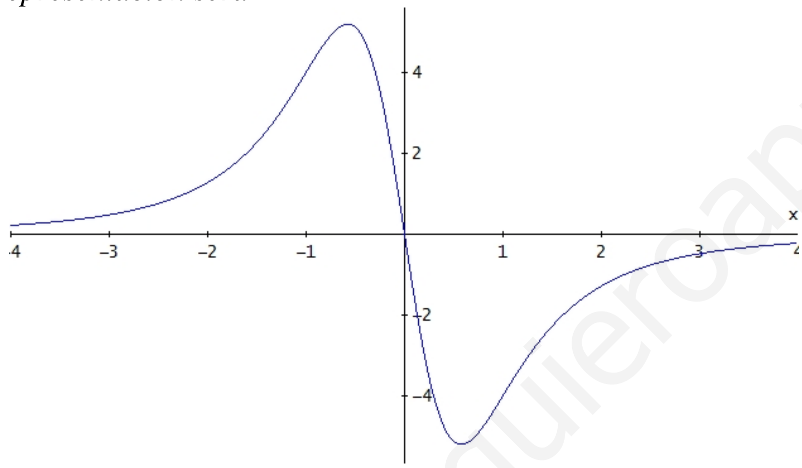
Como g(x) es un cociente de dos polinomios, para que tenga asíntota oblicua debe cumplirse que grd(núm) – grd(deno) = 1, pero lo que ocurre es que 1 – 4 = – 3 ≠ 1
No hay asíntota oblicua

Monotonía

Debemos estudiar el signo de g´(x) = f´´(x). Este estudio ya lo hemos realizado en el apartado anterior y el resultado fue

	*$g(x)$ es creciente en* $\left(-\infty, \frac{-\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ *$g(x)$ es decreciente en* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ *Luego en* $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ *hay un máximo* $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ *y en* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *hay un mínimo* $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -3\sqrt{3}\right)$

La representación será



Por lo que el máximo relativo es el absoluto.

Finalmente, la pendiente máxima es $3\sqrt{3}$.

Problema 4.1. A las 7 de la mañana, una lancha *A* está situada a 150 km al este de otra lancha *B*. La lancha *A* navega hacia el oeste a una velocidad constante de 40 km/h y la lancha *B* se dirige hacia el norte a 30 km/h. Si se mantienen estos rumbos, averiguar razonadamente a qué hora estarán ambas lanchas a distancia mínima. *(3,3 puntos).*

Solución:

Gráficamente, el problema podemos resumirlo en,

Llamamos x = tiempo transcurrido

Situamos el origen de coordenadas en el punto B, de forma que inicialmente –a las 7 de la mañana- la lancha B está en (0,0) y la A en (150,0).

Al cabo de x horas,

la lancha B habrá recorrido 30 x km y estará en el punto (0 , 30 x)

la lancha A habrá recorrido 40 x km y estará en el punto (150 – 40 x , 0)

La distancia entre ellas será:

$$d(A,B) = d((0, 30x), (150-40x, 0)) = \sqrt{[0-(150-40x)]^2+(30x-0)^2} = \sqrt{(40x-150)^2+(30x)^2} =$$

$$= \sqrt{1600x^2-12000x+22500+900x^2} = \sqrt{2500x^2-12000x+22500} = \sqrt{100(25x^2-120x+225)} =$$

$$= 10\sqrt{25x^2-120x+225}$$

$$d' = 10\frac{50x-120}{2\sqrt{25x^2-120x+225}} = 5\frac{50x-120}{\sqrt{25x^2-120x+225}}$$

Buscamos el mínimo de d, estudiemos el signo de d´.

Primero obtengamos el dominio de la función d.

$$25x^2-120x+225=0$$

$$x = \frac{-(-120)\pm\sqrt{(-120)^2-4\,.\,25\,.\,225}}{2\,.\,25} = \frac{120\pm\sqrt{14400-22500}}{50} =$$

$$= \frac{120\pm\sqrt{-8100}}{50}$$ *No tiene soluciones reales*

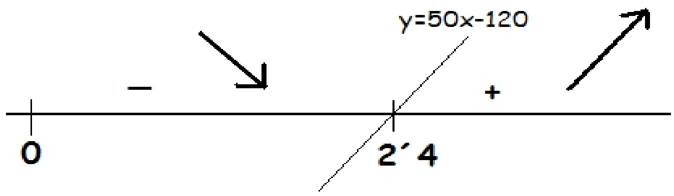
Como el coeficiente de x^2 es 25>0, $25x^2 - 120x + 225 > 0$ para todos los reales.

Y teniendo en cuenta la definición de la función d, mide la distancia entre dos puntos, Dom d = [0 , + ∞)

Veamos, ahora, el signo de d´,

En d´ el denominador, según lo obtenido anteriormente, es siempre positivo, por lo tanto el signo de d´ sólo depende del numerador. Veámoslo

50 x – 120 = 0; 50 x = 120; x = 120/50 = 2´4



Por lo tanto en x = 2´4 hay un mínimo relativo que además es el absoluto puesto que la función a la izquierda de 2´4 es decreciente y a la derecha creciente.

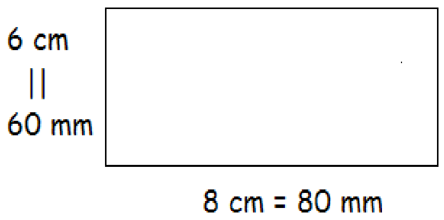
2´4 h = 2 h 24 min

Por tanto: ***ambas lanchas estarán a distancia mínima a las 9h 24min.***

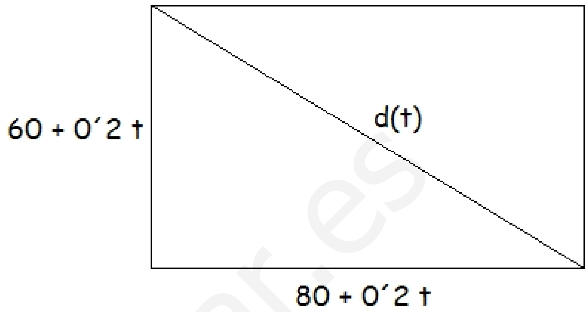
Problema 4.2. Una lámina metálica rectangular se dilata uniformemente por calentamiento, aumentando su base y su altura 0,2 mm por minuto. Averiguar la velocidad de crecimiento de la diagonal de dicha lámina cuando la base y la altura de la lámina miden, respectivamente, 8 y 6 cm. *(3,3 puntos).*

Solución:

Gráficamente, el problema podemos resumirlo en,



Al cabo de t minutos



$$d(t) = \sqrt{(60+0'2t)^2 + (80+0'2t)^2} = \sqrt{3600 + 24t + 0'04t^2 + 6400 + 32t + 0'04t^2} =$$

$$= \sqrt{10000 + 56t + 0'08t^2} \qquad t \geq 0$$

$$d'(t) = \frac{56 + 0'16t}{2\sqrt{10000 + 56t + 0'08t^2}}$$

La velocidad de crecimiento de la diagonal es v(t) = d´(t)

Como la dilatación es uniforme, v no varia con el tiempo; por lo tanto calculamos el valor de v calculando, por ejemplo, v(0) = d´(0). Es decir

$$v = d'(0) = \frac{56 + 0'16\,.\,0}{2\sqrt{10000 + 56\,.\,0 + 0'08\,.\,0^2}} = \frac{56}{2\sqrt{10000}} = \frac{56}{2\,.\,100} = 0'28$$

Finalmente, ***la velocidad de crecimiento de la diagonal es de 0´28 mm/min.***