

EJERCICIO B

PROBLEMA 3. Hallar las constantes reales a y b para que $f(x) = \begin{cases} x \ln x + a & \text{si } x > 0 \\ b & \text{si } x = 0 \\ \frac{\text{sen } \pi x}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

sea una función continua para todo valor real x (3,3 puntos).

Solución:

Para $x < 0$ $f(x)$ está definida como $\frac{\text{sen } \pi x}{x}$ que es continua ya que el denominador no se anula.

Para $x > 0$ $f(x)$ está definida como $x \ln x + a$ que es continua ya que $\ln x$ es continua para $x > 0$.

Veamos si es continua para $x = 0$. Deben cumplirse tres condiciones,

- 1) $\exists f(0)$
- 2) $\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
- 3) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Veamos cada una de ellas,

1) $f(0) = b$, por definición de $f(x)$; luego existe $f(0)$

2) Para calcular este límite como la función tiene definiciones distintas a la izquierda y a la derecha del 0, debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{sen } \pi x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right)^{(m)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\pi \cos \pi x}{1} = \pi$$

(m) como las funciones $\text{sen } \pi x$ y x (numerador y denominador del límite a calcular) son derivables para todo valor real, en particular lo son en intervalos $(x, 0)$, resolvemos la indeterminación aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = (0(-\infty) + a)$$

En primer lugar resolvemos la indeterminación obtenida transformándola en un cociente en el que podamos aplicar la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = (0(-\infty)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)^{(n)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$$

Como las funciones $\ln x$ y $\frac{1}{x}$ son derivables en intervalos $(0, x)$ podemos aplicar L'Hôpital.

$$\text{Por lo que } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + a) = 0 + a = a$$

$$\text{Finalmente } \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ cuando } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \rightarrow a = \pi$$

3) El valor de la función y el del límite deben coincidir, es decir, $b = a = \pi$

Para que $f(x)$ sea continua para todo valor real de x $a = b = \pi$

PROBLEMA A.3. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de m para el cual la función $f(x) = \begin{cases} m(x+1)e^{2x}, & x \leq 0 \\ \frac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x}, & x > 0 \end{cases}$ es continua en $x = 0$. (3 puntos)
- b) Los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función $(x+1)e^{2x}$. (3 puntos)
- c) La integral $\int (x+1)e^{2x} dx$, (2 puntos) y el área limitada por la curva $y = (x+1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$. (2 puntos)

Solución:

a) $m? / f(x)$ es continua en $x = 0$

Condiciones para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$.

1) ¿Existe $f(0)$?

$$f(0) = m(0+1)e^{2 \cdot 0} = m e^0 = m \cdot 1 = m. \quad \text{Existe } f(0) = m$$

2) ¿Existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$?

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, como a la izquierda y derecha de 0 la función $f(x)$ tiene definiciones distintas debemos estudiar los límites laterales,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (m(x+1)e^{2x}) = m(0+1)e^{2 \cdot 0} = m$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x+1)\operatorname{sen} x}{x} = \frac{(0+1)\operatorname{sen} 0}{0} = \left(\frac{0}{0}\right) = \left(\text{resolvemos la indeterminación aplicando la}$$

$$\text{Regla de L'Hopital}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x + (x+1)\cos x}{1} = \operatorname{sen} 0 + (0+1)\cos 0 = 1$$

Para que exista $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ los dos límites laterales deben ser iguales, por lo tanto $m = 1$.

3) Para este valor de m se cumple la tercera condición de continuidad: $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

Luego, $f(x)$ es continua en $x = 0$ para $m = 1$.

b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $y = (x+1)e^{2x}$

En primer lugar, $\operatorname{Dom} y = \mathfrak{R}$

Calculemos y'

$$y' = e^{2x} + (x+1)2e^{2x} = e^{2x} + (2x+2)e^{2x} = (1+2x+2)e^{2x} = (2x+3)e^{2x}$$

Estudiamos el signo de y'

$$(2x+3)e^{2x} = 0 \quad \begin{cases} 2x+3=0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \\ e^{2x}=0 \rightarrow \text{sin solución} \end{cases}$$

$\forall x \in \mathfrak{R} \quad e^{2x} > 0$, luego el signo de y' solo depende de $(2x+3)$ que es un polinomio de primer grado con coeficiente de x positivo y cuya raíz es $\frac{-3}{2}$, por lo tanto el signo de $(2x+3)$ es:

$$\begin{array}{c} - \qquad \qquad \qquad + \\ \hline \qquad \qquad \qquad | \qquad \qquad \qquad \\ \qquad \qquad \qquad \frac{-3}{2} \qquad \qquad \qquad \end{array}$$

Y finalmente, $y = (x+1)e^{2x}$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{-3}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{-3}{2}, +\infty\right)$.

c) La integral la resolvemos por partes,

$$\int (x+1)e^{2x} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+1 \rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \rightarrow v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right\} = (x+1) \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx =$$

$$= \frac{x+1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} + C = \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{4} \right) e^{2x} + C = \frac{2x+2-1}{4} e^{2x} + C = \frac{2x+1}{4} e^{2x} + C$$

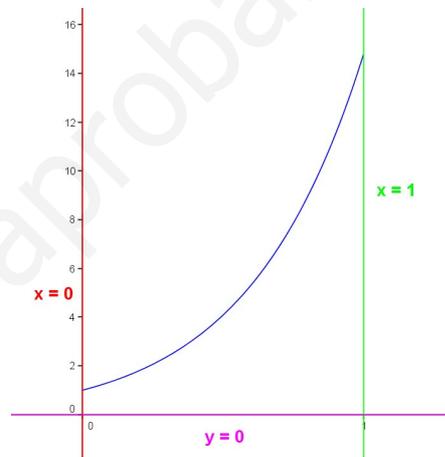
Es decir, $\int (x+1)e^{2x} dx = \frac{2x+1}{4} e^{2x} + C$

Para obtener el área limitada por la curva $y = (x+1)e^{2x}$ y las rectas $x = 0$, $x = 1$ e $y = 0$ es conveniente realizar la representación gráfica.

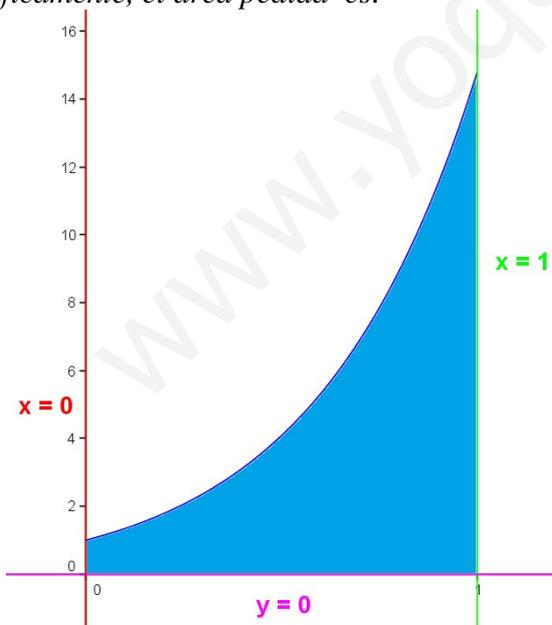
En primer lugar representemos la curva $y = (x+1)e^{2x}$ que según lo estudiado en el apartado b) entre $x = 0$ y $x = 1$ es creciente, podemos representarla usando una tabla de valores:

x	y = (x+1)e ^{2x}
0	1
1	2e ² ≈ 1478

A partir de estos datos la representación gráfica sería,



Gráficamente, el área pedida es:



Este área se calcula a partir de la siguiente integral definida,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx$$

Como la integral indefinida ya está resuelta anteriormente,

$$\int_0^1 (x+1)e^{2x} dx = \left[\frac{2x+1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{4} e^{2 \cdot 1} - \frac{2 \cdot 0 + 1}{4} e^{2 \cdot 0} =$$

$$= \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^0 = \frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} \approx 5'2918 \text{ u.a.}$$

Finalmente, el área pedida mide: $\left(\frac{3}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right) \text{ u.a.} \approx 5'2918 \text{ u.a.}$

Problema 5. Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

- a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)
- b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)
- c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

Solución:

Como k es un parámetro real, si $k = 0$ $f(x) = 0$ y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:

- a) $\text{Dom } f(x) = \mathfrak{R}$, $f(x)$ no tiene asíntotas.
- b) $f(x)$ es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.
- c) $f(x)$ es nula para cualquier valor de x por tanto $f(x)$ se anula en cualquier punto del intervalo $[-1, 1]$.

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

a) $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$

$e^{2x} \neq 0 \quad \forall x \in \mathfrak{R} \quad \rightarrow \quad \text{Dom } f(x) = \mathfrak{R}$.

Asíntotas.

Como $\text{Dom } f(x) = \mathfrak{R} \quad \rightarrow \quad f(x)$ no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \{ \text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx \} = 0$$

La asíntota horizontal es $y = 0$ en $+\infty$.

Asíntota oblicua: ($y = mx + n$)

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{kx}{e^{2x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{2x}} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \frac{k}{0} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego $f(x)$ sólo tiene asíntota horizontal $y = 0$ en $+\infty$.

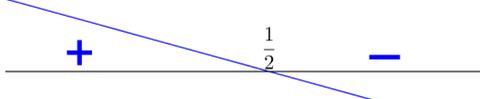
b) *Monotonía y máximos y mínimos de $y = f(x)$*

$$f'(x) = \frac{k e^{2x} - k x e^{2x} \cdot 2}{(e^{2x})^2} = \frac{k e^{2x} (1 - 2x)}{e^{4x}}$$

Estudiamos el signo de $f'(x)$,

$\forall x \in \mathfrak{R} \quad e^{2x}$ y $e^{4x} > 0 \quad \rightarrow \quad$ el signo de $f'(x)$ depende de la expresión $k(1 - 2x)$

$1 - 2x$ es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: $1 - 2x = 0$;

$1 = 2x; \quad x = \frac{1}{2}$. Gráficamente 

En consecuencia:

si $k > 0$ $f(x)$ es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y tiene un máximo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$.

$$x = \frac{1}{2} \rightarrow f(x) = \frac{k \frac{1}{2}}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ $f(x)$ es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y tiene un mínimo en $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$.

c) Justificar que $f(x)$ se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$

Como $\text{Dom } f(x) = \mathcal{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $\mathcal{R} \rightarrow f(x)$ es continua en $[-1, 1]$

$$f(-1) = \frac{k(-1)}{e^{2(-1)}} = \frac{-k}{e^{-2}} = -k e^2$$

$$\rightarrow f(-1) \cdot f(1) = -k e^2 \frac{k}{e^2} = \{e^2 \neq 0\} = -k^2 < 0$$

$$f(1) = \frac{k \cdot 1}{e^{2 \cdot 1}} = \frac{k}{e^2}$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

$f(x)$ es continua en $[-1, 1]$ y $f(-1) \cdot f(1) < 0 \rightarrow \exists c \in (-1, 1) / f(c) = 0$

Problema 4.1. Se tienen dos programas informáticos A y B. Para procesar n datos, el programa A realiza un número de operaciones elementales no superior a $12 + n\sqrt[4]{n^3}$, mientras que el programa B ejecuta $n^2 - 2n + 10$ operaciones elementales. Comprobar que cuando el número n de datos es grande, el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B. (3,3 puntos).

Solución:

Llamando $NP_A(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa A para procesar n datos y $NP_B(n)$ al número de operaciones elementales que realiza el programa B para procesar n datos

De los datos del problema sabemos que: $NP_A(n) \leq 12 + n\sqrt[4]{n^3}$ y $NP_B(n) = n^2 - 2n + 10$

Para comprobar que para n grandes el programa A realiza menos operaciones que el B calculemos el siguiente límite,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} &\leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n\sqrt[4]{n^3}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{7/4}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{7/4}}{n^2 - 2n + 10} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{12 + n^{175}}{n^2 - 2n + 10} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{175}}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^{0.25}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

Considerando que para valores grandes de n , $NP_A(n)$ y $NP_B(n)$ son positivos, podemos afirmar que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{NP_A(n)}{NP_B(n)} = 0$$

Como el valor del límite es 0, esto quiere decir que para valores de n grandes el denominador (número de operaciones del programa B) es mayor que el numerador, es decir, que el programa A procesa los n datos con menos operaciones elementales que el programa B.