Matemáticas II Julio 2013

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1:\begin{cases} x = 1+2\alpha \\ y = \alpha \\ z = 2-\alpha \end{cases}$ y $r_2:\begin{cases} x = -1 \\ y = 1+\beta \\ z = -1-2\beta \end{cases}$,siendo α y β parametros reales. Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Unas ecuaciones implícitas de r_1. *(2 puntos).*

b) La justificación de que las rectas r_1 y r_2 están contenidas en un plano π, *(2 puntos)* y la ecuación de ese plano π, *(2 puntos).*

c) El área del triángulo de vértices P, Q y R, siendo $P = (-1, 0, 1)$, $Q = (0, 1, 2)$ y R el punto de intersección de r_1 y r_2. *(4 puntos).*

Solución:

a) Ecuaciones implícitas de r_1

Conocemos la ecuación vectorial de r_1, a partir de ella obtenemos su ecuación continua,

$r_1: \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1}$. *Una ecuación implícita de r_1 será:* $\begin{cases} \frac{x-1}{2} = y \\ y = \frac{z-2}{-1} \end{cases}$, *efectuando las operaciones,*

$$\begin{cases} x-1 = 2y \\ -y = z-2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$$

Solución: $r_1:\begin{cases} x-2y-1=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$

b) Justificar que r_1 y r_2 están contenidas en un plano.

Las rectas r_1 y r_2 estarán contenidas en un plano si son paralelas o si se cortan.

Estudiemos la posición relativa de las dos rectas. Para ello debemos estudiar el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 1+2\alpha = -1 \\ \alpha = 1+\beta \\ 2-\alpha = -1-2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha = -2 \\ \alpha-\beta = 1 \\ -\alpha+2\beta = -3 \end{cases}$$ *, es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas.*

Su matriz de coeficientes es $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ *y su matriz ampliada* $M' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

Calculemos el rango de M. M es 3x2, su máximo rango será 2.

$$|2| = 2 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow ran(M) = 2$$

Calculemos el rango de M´. M´ es 3x3, su máximo rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 6-4+2-4 = 0 \rightarrow ran(M') = 2$$

Hemos obtenido que ran (M) = ran (M´) = 2 = número de incógnitas, por lo tanto es un sistema compatible determinado. Es decir, las rectas r_1 y r_2 se cortan. Luego, ***las dos rectas están contenidas en un plano****.*

Para obtener la ecuación de este plano, obtengamos el punto, R, de corte entre r_1 y r_2.

Del estudio de rangos realizado anteriormente, el sistema a resolver será: $\begin{cases} 2\alpha = -2 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases}$

De la 1ª ecuación: α = – 1. Con esta solución es suficiente para obtener el punto R.

Sustituyendo el valor de α en la ecuación de r_1: $\begin{cases} x = 1 + 2(-1) = 1 - 2 = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 - (-1) = 2 + 1 = 3 \end{cases} \rightarrow$ ***R (– 1 , – 1 , 3)***

Del plano π que contiene a r_1 y r_2 conocemos: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } R\,(-1, -1, 3) \\ \text{vectores directores} \left\langle \begin{array}{l} \text{de } r_1 \rightarrow \vec{u}(2, 1, -1) \\ \text{de } r_2 \rightarrow \vec{v}(0, 1, -2) \end{array} \right. \end{array} \right.$

Su ecuación se obtiene: $\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\,(-2+1) - (y+1)\,(-4) + (z-3)\,(2) = 0$$

$$-x - 1 + 4y + 4 + 2z - 6 = 0$$

$$-x + 4y + 2z - 3 = 0$$

Solución, π: – x + 4 y + 2 z – 3 = 0

c) Área del triángulo de vértices P (– 1 , 0, 1), Q (0, 1, 2) y R (– 1 , – 1 , 3).
Conociendo los tres vértices del triángulo, su área podemos calcularla mediante la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2}\left| \vec{PR} \; x \; \vec{QR} \right|$$

$$\vec{PR} = (-1,-1,3) - (-1,0,1) = (0,-1,2)$$

$$\vec{QR} = (-1,-1,3) - (0,1,2) = (-1,-2,1)$$

$$\vec{PR} \; x \; \vec{QR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\,(-1+4) - \vec{j}\,(+2) + \vec{k}\,(-1) = (3, -2, -1)$$

$$\left| \vec{PR} \; x \; \vec{QR} \right| = \left|(3, -2, -1)\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

Finalmente, $A_T = \frac{1}{2}\sqrt{14}\; u^2 = 1´8708286...\,u^2 \cong 1´8708\; u^2$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ y $s:\{x-1=y-2=z$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Un punto y un vector director de cada una de las dos rectas. *(3 puntos).*

b) La distancia entre las rectas r y s, *(2 puntos)*, **justificando** que las rectas r y s se cruzan. *(2 puntos).*

c) Obtener unas ecuaciones de la recta t que pasa por el punto $\left(\frac{41}{57}, -\frac{14}{57}, 0\right)$ y es perpendicular a las rectas r y s. *(3 puntos).*

Solución:

a) De la recta $r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ 2x+y+z=1 \end{cases}$ *obtengamos su ecuación paramétrica.*

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2=3\neq 0$, *resolvemos el sistema:* $\begin{cases} x-y=-z \\ 2x+y=1-z \end{cases}$

Sumando ambas ecuaciones: 3 x = 1 – 2 z

$x=\frac{1-2z}{3}$

Sustituyendo en la 1ª ecuación,

$\frac{1-2z}{3}-y=-z;\quad \frac{1-2z}{3}+z=y$

$y=\frac{1-2z+3z}{3}=\frac{1+z}{3}$

La ecuación paramétrica de la recta r será: $\begin{cases} x=\frac{1-2\lambda}{3} \\ y=\frac{1+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

De la ***recta r*** *tenemos:* ***punto*** $P_r=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$ *y* ***vector director*** $\vec{v_r}=\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},1\right)$, *más sencillamente,* $\vec{v_r}=(-2,1,3)$.

De la recta $s:\{x-1=y-2=z$, *tenemos su ecuación continua, por lo tanto se deduce:* ***punto*** $P_s=(1,2,0)$ ***y vector director*** $\vec{v_s}=(1,1,1)$.

b) Veamos si las rectas r y s se cruzan.

Las ecuaciones paramétricas de estas rectas son: $r:\begin{cases} x=\dfrac{1-2\lambda}{3} \\ y=\dfrac{1+\lambda}{3} \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$ *y* $s:\begin{cases} x=1+\mu \\ y=2+\mu \\ z=\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

Estudiemos el sistema:
$$\begin{cases} \dfrac{1-2\lambda}{3}=1+\mu \\ \dfrac{1+\lambda}{3}=2+\mu \\ \lambda=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1-2\lambda=3+3\mu \\ 1+\lambda=6+3\mu \\ \lambda=\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda-3\mu=2 \\ \lambda-3\mu=5 \\ \lambda-\mu=0 \end{cases}$$

La matriz ampliada de este sistema es $A' = \left(\begin{array}{cc|c} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$,

A´ es 3x3 → máximo rango de A´ es 3; A es 3x2 → máximo rango de A es 2.
Calculemos el rango de A´,

$$\left.\begin{array}{l} |-2|=-2\neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=6+3=9\neq 0 \\ \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-2-15+6=-11\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A')=3$$

Los dos primeros menores calculados anteriormente nos indican que ran (A) = 2.

Por lo tanto, ***como ran (A) = 2 y ran (A´)=3*** *deducimos que* ***las rectas r y s se cruzan.***

Para obtener la distancia entre las dos rectas r y s vamos a utilizar el siguiente procedimiento:
Calculamos el plano π que contiene a r y es paralelo a s, por lo tanto de este plano conocemos

$$\begin{cases} \text{punto} \quad P_r\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},0\right) \\ \text{vectores} \begin{cases} \vec{v}_r=(-2\,,1\,,3) \\ \vec{v}_s=(1\,,1\,,1) \end{cases} \end{cases} \quad \text{la ecuación del plano } \pi \text{ se obtiene: } \begin{vmatrix} x-\frac{1}{3} & y-\frac{1}{3} & z-0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\left(y-\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \left(x-\frac{1}{3}\right)(-2)-\left(y-\frac{1}{3}\right)(-5)+z\,(-3)=0 \rightarrow$$

$$-2x+\frac{2}{3}+5y-\frac{5}{3}-3z=0 \rightarrow -2x+5y-3z-1=0 \rightarrow \pi: 2x-5y+3z+1=0$$

Finalmente, $d(r,s)=d(P_s,\pi)=\dfrac{|2\,.\,1-5\,.\,2+3\,.\,0+1|}{\sqrt{2^2+(-5)^2+3^2}}=\dfrac{|2-10+1|}{\sqrt{4+25+9}}=\dfrac{7}{\sqrt{38}}=1'135549...$

$$\boxed{\textbf{Solución:} \quad d(r,s)=\frac{7}{\sqrt{38}}\,u.}$$

$$c)\ recta\ \ t\ /\ \left\langle \begin{array}{l} pase\ por\left(\frac{41}{57},\ \ -\frac{14}{57},\ \ 0\right). \\ t\ \perp\ r\ y\ s \end{array} \right.$$

$$Como\ \ t\ \perp\ r\ y\ s\ \ \rightarrow\ \ \vec{v}_t = \vec{v}_r\ x\ \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\ (1-3) - \vec{j}\ (-2-3) + \vec{k}\ (-2-1) = (-2, 5, -3)$$

$$\boxed{La\ ecuación\ parámetrica\ de\ la\ recta\ \ t\ \ será:\ \begin{cases} x = \frac{41}{57} - 2\lambda \\ y = \frac{-14}{57} + 5\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -3\lambda \end{cases}}$$

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Se dan los puntos A = (1 , 5 , 7) y B = (3 , – 1 , – 1). Se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de los planos π_1 y π_2 que son perpendiculares a la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, sabiendo que el plano π_1 pasa por el punto *A* y el plano π_2 pasa por el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos *A* y *B*. *(4 puntos distribuidos en 2 puntos por cada plano).*

b) La distancia entre los planos π_1 y π_2 . *(2 puntos).*

c) Las ecuaciones de la recta *r* que pasa por los puntos *A* y *B*, (2 *puntos*), y los puntos de la recta *r* que están a distancia 3 del punto $C = (1, 0, 1)$. (2 *puntos*).

Solución:

a) Como los planos pedidos son perpendiculares a la recta r, para hallar las ecuaciones de estos planos necesitamos conocer un vector director de la recta r,

$\vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3,-1,-1)-(1,5,7) = (2,-6,-8) \approx (1,-3,-4)$

Ecuación de π_1, considerando que $\pi_1 \perp r$ y $A \in \pi_1$,

como $\pi_1 \perp r \;\rightarrow\; \pi_1 : x-3y-4z+D=0$

como $A \in \pi_1 \;\rightarrow\; 1-3\,.\,5-4\,.\,7+D=0;\; 1-15-28+D=0;\; -42+D=0;\; D=42$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi_1}$**:** $\boldsymbol{x-3y-4z+42=0}$

Ecuación de π_2, considerando que $\pi_2 \perp r$ y $PM\left(\overline{AB}\right) \in \pi_2$,

como $\pi_2 \perp r \;\rightarrow\; \pi_2 : x-3y-4z+D=0$

calculemos $PM\left(\overline{AB}\right) = \left(\dfrac{1+3}{2}, \dfrac{5-1}{2}, \dfrac{7-1}{2}\right) = (2,2,3)$

como $PM\left(\overline{AB}\right) \in \pi_2 \;\rightarrow\; 2-3\,.\,2-4\,.\,3+D=0;\; 2-6-12+D=0;\; -16+D=0;\; D=16$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi_2}$**:** $\boldsymbol{x-3y-4z+16=0}$

b) Como los planos π_1 y π_2 son perpendiculares a la recta r, son paralelos. Por lo tanto:

$$d(\pi_1,\pi_2) = d(P_{\pi_1},\pi_2) = \{\text{como punto del plano } \pi_1 \text{ tomamos el } A=(1,5,7)\} = \frac{|1-3.5-4.7+16|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-4)^2}} =$$

$$= \frac{|1-15-28+16|}{\sqrt{1+9+16}} = \frac{|-26|}{\sqrt{26}} = \frac{26}{\sqrt{26}} = \frac{26\sqrt{26}}{\sqrt{26}\,\sqrt{26}} = \frac{26\sqrt{26}}{26} = \sqrt{26}$$

Solución, $d(\pi_1,\pi_2) = \sqrt{26}$ *u.l.*

c) Ecuación de la recta r.

Esta recta pasa por los puntos A y B y en el apartado a) obtuvimos su vector director, luego:

$$r:\begin{cases}Punto \quad A=(1,5,7)\\ vector\ director \quad \overrightarrow{v_r}=(1,-3,-4)\end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

E. vectorial $\quad r: (x, y, z) = (1, 5, 7) + \lambda(1, -3, -4) \quad \lambda \in \Re$

E. paramétrica

$$r:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=5-3\lambda\\ z=7-4\lambda\end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

E. continua

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-7}{-4}$$

Buscamos, ahora, los puntos de la recta r / $d(P_r, C) = 3$

$P_r = (1+\lambda, 5-3\lambda, 7-4\lambda)$ y $C = (1, 0, 1)$

$$d(P_r,C)=\sqrt{(1+\lambda-1)^2+(5-3\lambda-0)^2+(7-4\lambda-1)^2}=\sqrt{\lambda^2+(5-3\lambda)^2+(6-4\lambda)^2}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2+25-30\lambda+9\lambda^2+36-48\lambda+16\lambda^2}=\sqrt{26\lambda^2-78\lambda+61}$$

Debemos resolver: $\sqrt{26\lambda^2-78\lambda+61}=3$*, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación,*

$26\lambda^2-78\lambda+61=9;\quad 26\lambda^2-78\lambda+61-9=0;\quad 26\lambda^2-78\lambda+52=0;$ *simplificando entre 26,*

$\lambda^2-3\lambda+2=0$

$$\rightarrow \quad \lambda=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4.1.2}}{2.1}=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}=\begin{cases}\lambda_1=\frac{3+1}{2}=\frac{4}{2}=2\\ \lambda_2=\frac{3-1}{2}=\frac{2}{2}=1\end{cases}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, comprobamos las soluciones.

$\lambda=1 \rightarrow \sqrt{26.1^2-78.1+61}=3$	$\lambda=2 \rightarrow \sqrt{26.2^2-78.2+61}=3$
$\sqrt{26-78+61}=3$	$\sqrt{104-156+61}=3$
$\sqrt{87-78}=3$	$\sqrt{165-156}=3$
$\sqrt{9}=3$ *Sí*	$\sqrt{9}=3$ *Sí*

Para $\lambda=1$, $P_r=(1+1, 5-3.1, 7-4.1)=(2, 2, 3)$

Para $\lambda=2$, $P_r=(1+2, 5-3.2, 7-4.2)=(3, -1, -1)$

Finalmente, los puntos de r que distan 3 unidades de C son: (2 , 2 , 3) y (3 , – 1 , – 1).

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$.

<u>Obtener razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>:

a) Un vector director de cada recta (2 *puntos*) y la posición relativa de las rectas *r* y *s*. (2 *puntos*).

b) La ecuación del plano que contiene a la recta *s* y es paralelo a la recta *r*. (3 *puntos*).

c) La distancia entre las rectas *r* y *s*. (3 *puntos*).

Solución:

a) ***Vector director de la recta r.***

Podemos obtener el vector director de la recta calculando sus ecuaciones paramétricas:

$$r:\begin{cases} x-y=0 \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=y \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,0)$$

Otra forma de obtenerlo, a partir de los vectores perpendiculares de los planos que definen la recta r,

$$r:\begin{cases} x-y=0 & \rightarrow & \overrightarrow{n_1}=(1,-1,0) \\ z=10 & \rightarrow & \overrightarrow{n_2}=(0,0,1) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j} \rightarrow \overrightarrow{v_r}=(-1,-1,0)\approx(1,1,0)$$

Vector director de la recta $s:\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$

Del plano $x+y=8 \rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,1,0)$

Del plano $x+y+z=13 \rightarrow \overrightarrow{n_2}=(1,1,1)$

Luego, $\overrightarrow{v_s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}-\vec{j}=(1\,,-1\,,0)$

Otra forma de obtenerlo,

$\begin{cases} x+y=8 \\ x+y+z=13 \end{cases}$ *Sustituyendo el valor de* $x+y$ *en la segunda ecuación:* $8+z=13;\quad z=5.$

De la 1ª ecuación: $x=8-y$*. Las ecuaciones paramétricas de la recta s serán:* $\begin{cases} x=8-\lambda \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases} \rightarrow$

$\overrightarrow{v_s}=(-1,1,0)\approx(1,-1,0)$

Determinemos la posición relativa de las rectas r y s.

Como anteriormente hemos calculado las ecuaciones paramétricas de las dos rectas, de ellas conocemos un punto y su vector director:

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=10 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r=(0\,,0\,,10) \\ \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,0) \end{cases} \qquad s:\begin{cases} x=8-\lambda \\ y=\lambda \\ z=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_s=(8\,,0\,,5) \\ \overrightarrow{v_s}=(1\,,-1\,,0) \end{cases}$$

Para determinar la posición relativas de las rectas r y s estudiamos rangos en la siguiente matriz ampliada: $\left[\overrightarrow{v_r}\ \ \overrightarrow{v_s}\ \ \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, $\overrightarrow{P_rP_s} = (8,0,-5)$. *La matriz a estudiar es:*

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Estudiemos el ran(M), M es 3x2 luego su máximo rango es 2,

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1=-2\neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(M)=2 \quad \Rightarrow \quad \text{Las rectas no son paralelas.}$$

Estudiemos el ran(M´), M´ es 3x3 luego su máximo rango es 3; el estudio del rango de M nos indica que ran(M´) ≥ 2,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 5+5=10\neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M')=3 \quad \Rightarrow \quad \textbf{Las rectas r y s se cruzan.}$$

b) Hay que obtener el plano $\pi \,/\, s \subset \pi$ *y* $\pi \,//\, r$.

De las condiciones que debe cumplir el plano π *deducimos que* $P_s \in \pi$ *y los vectores directores de* π *son* $\overrightarrow{v_s}$ *y* $\overrightarrow{v_r}$. *Luego:*

Las ecuaciones paramétricas son: $\pi: \begin{cases} x = 8+\lambda-\mu \\ y = \quad \lambda+\mu \\ z = 5 \end{cases} \quad \lambda,\mu \in \Re$ *y la ecuación general* $z = 5$.

c) ¿d(r , s)?

Considerando las condiciones del plano π *obtenido en el apartado anterior, deducimos que* $d(r, s) = d(r, \pi) = (\text{como } \pi \,//\, r) = d(P_r, \pi)$.

$P_r = (0,0,10)$ *y* $\pi: z = 5 \quad \rightarrow \quad \pi: z-5=0$

$$d(P_r, \pi) = \frac{|10-5|}{\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{5}{1} = 5$$

Por tanto, $\mathbf{d(r, s) = 5}$

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$, $s: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 0 \end{cases}$ y el punto P (0 , 3, − 2).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones de la recta que pasa por el punto P y es paralela a la recta r. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s. *(4 puntos)*
c) La distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿recta r_1 que pasa por P y es paralela a r?

De r_1 conocemos: $\begin{cases} P(0,3,-2) \\ r_1 // r \rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}} // \vec{v_r} \rightarrow \overrightarrow{v_{r_1}}(3,-1,2) \end{cases}$

Las ecuaciones de la recta r_1 serán:

E. vectorial: $r_1: \begin{cases} x = 0+3\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \lambda \in \Re \rightarrow r_1: \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -2+2\lambda \end{cases} \lambda \in \Re$

E. continua: $r_1: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+2}{2}$

b) ¿plano π / $r \subset \pi$ y $\pi // s$?

$\pi // s \rightarrow \vec{v_s}$ *será director de* π

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ y $\vec{v_r}$ *será director de* π

De las ecuaciones de r y s obtenemos, directamente, los elementos necesarios del plano π.

Punto: P_r (− 1 , 1 , 0) y vectores directores: $\vec{v_r}(3,-1,2)$ y $\vec{v_s}(1,-1,0)$. *La ecuación de π será:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3z + 2(y-1) + z + 2(x+1) = 0$$
$$-3z + 2y - 2 + z + 2x + 2 = 0$$
$$2x + 2y - 2z = 0$$
$$x + y - z = 0$$

***Solución:* π: $x + y - z = 0$**

c) ¿d (r ,s)?

Veamos la posición relativa de las rectas r y s.

$r: \begin{cases} P_r(-1,1,0) \\ \vec{v_r}(3,-1,2) \end{cases}$ $s: \begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \vec{v_s}(1,-1,0) \end{cases}$

Construimos la matriz $M' \left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \quad \overrightarrow{P_rP_s} \right]$. $\overrightarrow{P_rP_s} = (2,-1,0)$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Rango de M,

$$\left.\begin{array}{l} |3| = 3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3+1 = -2 \neq 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad ran(M) = 2 \quad \rightarrow \quad r \ y \ s \left\langle \begin{array}{l} se\ cortan \\ o \\ se\ cruzan \end{array}\right.$$

Rango de M´,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2+4 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M´) = 3$$

ran(M´) = 3 ≠ 2 = ran(M)   →   las rectas r y s   se cruzan.

$$Por\ tanto,\ d(r,s) = \frac{\left|\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right|}$$

$$\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (calculado\ antes) = 2$$

$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{k} + 2\vec{j} + \vec{k} + 2\vec{i} = 2\vec{i} + 2\vec{j}2 - 2\vec{k} = (2, 2, -2)$$

$$\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$Por\ tanto \quad d(r,s) = \frac{|2|}{2\sqrt{3}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ u.l.$$

Solución: $d(r,s) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ **u.l.**

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases}$ y $s:\begin{cases}x=1-2\alpha\\y=2+\alpha\\z=3-\alpha\end{cases}$ y el plano

π: $2x + mz + 1 = 0$, siendo m un parámetro real. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de las rectas r y s y el punto (o puntos) comunes a r y s. *(4 puntos)*

b) El valor del parámetro m para que la recta s sea paralela al plano π. *(3 puntos)*

c) La ecuación del plano que contiene a la recta s y al punto $P(1, 2, 4)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases}$ *como* {*menor de y z*} $\begin{vmatrix}-1 & 0\\0 & -1\end{vmatrix}=1\neq 0$, *despejamos z e y en función de x.*

$$r:\begin{cases}2x-y+5=0\\6x-z+8=0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}-y=-5-2x\\-z=-8-6x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}y=5+2x\\z=8+6x\end{cases}\rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=5+2\lambda\\z=8+6\lambda\end{cases}\quad\lambda\in\Re$$

Por tanto: $r:\begin{cases}P_r(0,5,8)\\\vec{v}_r(1,2,6)\end{cases}$

$$s:\begin{cases}x=1-2\alpha\\y=2+\alpha\\z=3-\alpha\end{cases}\rightarrow s:\begin{cases}P_s(1,2,3)\\\vec{v}_s(-2,1,-1)\end{cases}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\begin{bmatrix}\vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_rP_s}\end{bmatrix}$, *es decir:* $M'=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\\6 & -1 & -5\end{pmatrix}$

Rango de M, {M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$\left.\begin{array}{l}|1|=1\neq 0\ \rightarrow\ ran(M)\geq 1\\ \begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 1\end{vmatrix}=1+4=5\neq 0\end{array}\right\}\rightarrow ran(M)=2\rightarrow r\ y\ s\left\langle\begin{array}{l}se\ cortan\\o\\se\ cruzan\end{array}\right.$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Por el cálculo del rango de M, sabemos que ran (M´) ≥ 2

$$\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\2 & 1 & -3\\6 & -1 & -5\end{vmatrix}=-5-2+36-6-3-20=0\ \rightarrow\ ran(M')=2$$

Como ran (M) = ran(M´) = 2, ***las rectas r y s se cortan.***

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} \lambda = 1 - 2\alpha \\ 5 + 2\lambda = 2 + \alpha \\ 8 + 6\lambda = 3 - \alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \\ 6\lambda + \alpha = -5 \end{cases}$$

De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = nº de incógnitas (λ y α).

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 2\lambda - \alpha = -3 \end{cases} \rightarrow \quad 2x2^{a} \quad \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 1 \\ 4\lambda - 2\alpha = -6 \end{cases}$$

$$5\lambda \quad = -5 \rightarrow \lambda = -1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $2(-1) - \alpha = -3; \quad -2 - \alpha = -3; \quad -\alpha = -3 + 2; \quad -\alpha = -1; \quad \alpha = 1$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$\text{En} \quad r: \begin{cases} x = -1 \\ y = 5 + 2(-1) = 3 \\ z = 8 + 6(-1) = 2 \end{cases} \qquad \text{En} \quad s: \begin{cases} x = 1 - 2.1 = -1 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases}$$

Por tanto, ***el punto de corte entre las rectas r y s es (– 1 , 3 , 2)***

b) ¿m / recta s // plano π?

$$\text{Como} \quad s // \pi \rightarrow \vec{v}_s \perp \vec{n}_\pi \qquad \left[\vec{n}_\pi \text{ vector perpendicular al plano } \pi\right] \rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

$$\vec{v}_s(-2, 1, -1) \quad y \quad \vec{n}_\pi(2, 0, m), \qquad \vec{v}_s \cdot \vec{n}_\pi = (-2, 1, -1)(2, 0, m) = -4 - m$$

Por lo que, $-4 - m = 0; \quad m = -4$

En conclusión, ***para que la recta s sea paralela al plano π debe ser m = – 4.***

c) ¿plano τ? / recta s ⊂ τ y P (1 , 2 , 4) ∈ τ

Para obtener la ecuación del plano τ necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

$$\text{Como} \quad s \subset \tau \rightarrow \begin{cases} P_s(1, 2, 3) \in \tau \\ \vec{v}_s(-2, 1, -1) \text{ es director de } \tau \end{cases}$$

Además, $P(1, 2, 4) \in \tau$

$$\text{Por tanto, del plano } \tau \text{ conocemos} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } (1, 2, 3) \\ \vec{u} = \vec{v}_s(-2, 1, -1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PP_s}(0, 0, -1) \end{cases}$$

Como los vectores $\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos* $\left(\frac{-2}{0} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{-1}{1}\right)$ *sirven como vectores directores de τ.*

La ecuación del plano τ será: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$*, efectuando operaciones:*

$-x + 1 - 2y + 4 = 0; \quad -x - 2y + 5 = 0; \quad x + 2y - 5 = 0$

Solución: $\boldsymbol{\tau: \ x + 2y - 5 = 0}$

PROBLEMA A.2. Se dan los puntos $A = (0,0,1)$, $B = (1,0,-1)$, $C = (0,1,-2)$ y $D = (1,2,0)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos *A, B y C*. *(3 puntos)*
b) La justificación de que los cuatro puntos *A, B, C y D,* no son coplanarios. *(2 puntos)*
c) La distancia del punto *D* al plano π, *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *A, B, C y D*. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que contiene los puntos A, B y C?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad A(0,0,1) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB}(1,0,-2) \\ \overrightarrow{AC}(0,1,-3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad z-1+2x+3y=0 \quad \rightarrow \quad 2x+3y+z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$**: $2x + 3y + z - 1 = 0$**

b) Justificar que los puntos A, B, C y D no son coplanarios.

Veamos que el punto D no pertenece al plano π.

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 = 0$

$2 + 6 - 1 = 0$

$7 = 0$ *Falso*

El punto D no pertenece al plano π, al que pertenecen los puntos A, B y C.
Por lo que ***los puntos A, B, C y D no son coplanarios.***

c) ¿d (D, π)?

$$d(D,\pi) = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{14}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}\ u.l. \cong 1'8708\ u.l.$$

El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D podemos obtenerlo de dos formas:

i) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{CD}\right] \right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AD} = (1,2,-1) \\ \overrightarrow{BD} = (0,2,1) \\ \overrightarrow{CD} = (1,1,2) \end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{AD}\ \overrightarrow{BD}\ \overrightarrow{CD}\right] \right| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|4+2+2-1| = \frac{1}{6}7 = \frac{7}{6}u^3$$

ii) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π, y la altura del tetraedro es d (D, π).

El área del triángulo de vértices A, B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$Área_T = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \vec{k} + 2\vec{i} + 3\vec{j} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} = (2,3,1)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$Área_T = \frac{1}{2}\sqrt{14} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} Área_T \,.\, h = \frac{1}{3} Área_T \cdot d(D,\pi) = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{14}}{2}\frac{\sqrt{14}}{2} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}\, u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es 7/6 u^3.

PROBLEMA B.2. Se dan los planos π: $x + y + z = 1$ y σ: $a\,x + b\,y + z = 0$, donde a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de a y b para los que el plano σ pasa por el punto (1,2,3) y, además dicho plano σ es perpendicular al plano π. *(3 puntos)*

b) Los valores de a y b para los cuales sucede que el plano σ pasa por el punto (0,1,1) y la distancia del punto (1,0,1) al plano σ es 1. *(3 puntos)*

c) Los valores de a y b para los que la intersección de los planos π y σ es la recta r para la que el vector (3,2,-5) es un vector director de dicha recta r, *(3 puntos)*
Y obtener las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r. *(1 punto)*

Solución:

a) $¿a, b? / (1, 2, 3) \in \sigma$ y $\sigma \perp \pi$.

$(1, 2, 3) \in \sigma \;\rightarrow\; a \cdot 1 + b \cdot 2 + 3 = 0 \;\rightarrow\; a + 2b + 3 = 0$

$\sigma \perp \pi \;\rightarrow\; \vec{n}_\sigma \perp \vec{n}_\pi \;\rightarrow\; (a, b, 1) \perp (1, 1, 1) \;\rightarrow\; (a, b, 1)\cdot(1, 1, 1) = 0 \;\rightarrow\; a + b + 1 = 0$

Resolvamos el sistema: $\begin{cases} a + 2b + 3 = 0 \\ a + b + 1 = 0 \end{cases}$

Restando $1^a - 2^a$, $b + 2 = 0$; $b = -2$

Sustituyendo el valor de b *en, por ejemplo, la* 2^a *ecuación:* $a + (-2) + 1 = 0$; $a - 1 = 0$; $a = 1$

Solución: $\boldsymbol{a = 1}$ ***y*** $\boldsymbol{b = -2}$

b) $¿a, b? / (0, 1, 1) \in \sigma$ y $d((1, 0, 1), \sigma) = 1$

$(0, 1, 1) \in \sigma \;\rightarrow\; a \cdot 0 + b \cdot 1 + 1 = 0 \;\rightarrow\; b + 1 = 0 \;\rightarrow\; b = -1$

$$d((1,0,1),\sigma) = 1 \;\rightarrow\; \frac{|a \cdot 1 + b \cdot 0 + 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1^2}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+b^2+1}} = 1$$

como $b = -1$
$$\rightarrow\; \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+(-1)^2+1}} = 1 \;\rightarrow\; \frac{|a+1|}{\sqrt{a^2+2}} = 1 \;\rightarrow\; |a+1| = \sqrt{a^2+2} \quad \begin{cases} a+1 = \sqrt{a^2+2} \\ a+1 = -\sqrt{a^2+2} \end{cases}$$

1^a *ecuación,*

$$a + 1 = \sqrt{a^2+2} \;\rightarrow\; (a+1)^2 = \left(\sqrt{a^2+2}\right)^2 \;\rightarrow\; a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \;\rightarrow\; 2a = 1 \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

Comprobación, $\frac{1}{2} + 1 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$; $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$; $\frac{3}{2} = \sqrt{\frac{9}{4}}$ *Sí*

2^a *ecuación,*

$$a + 1 = -\sqrt{a^2+2} \;\rightarrow\; (a+1)^2 = \left(-\sqrt{a^2+2}\right)^2 \;\rightarrow\; a^2 + 2a + 1 = a^2 + 2 \;\rightarrow\; 2a = 1 \;\rightarrow\; a = \frac{1}{2}$$

Comprobación, $\frac{1}{2} + 1 = -\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2}$; $\frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{1}{4} + 2}$; $\frac{3}{2} = -\sqrt{\frac{9}{4}}$ *No*

Solución: $\boldsymbol{a = \frac{1}{2}}$ ***y*** $\boldsymbol{b = -1}$

c) $¿a, b? / \pi \cap \sigma = r$ *de forma que* $\vec{v}_r = (3, 2, -5)$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+z=0 \end{cases}$

Luego,

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ b & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = (1-b)\,\vec{i} - (1-a)\,\vec{j} + (b-a)\,\vec{k} = (1-b)\,\vec{i} + (a-1)\,\vec{j} + (b-a)\,\vec{k} =$$

$$= (1-b\,,\,a-1\,,\,b-a)$$

Como los vectores (3 , 2 , – 5) y (1 – b , a – 1, b – a) deben ser directores de la recta r, serán proporcionales. Es decir:

$$\frac{1-b}{3} = \frac{a-1}{2} = \frac{b-a}{-5} = k \neq 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1-b=3k \\ a-1=2k \\ b-a=-5k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \\ b-a=-5k \end{cases}$$

La tercera ecuación se obtiene de las dos primeras:

$b - a = (1 - 3k) - (1 + 2k) = 1 - 3k - 1 - 2k = -5k$

El sistema queda reducido a: $\begin{cases} b=1-3k \\ a=1+2k \end{cases} \quad k \neq 0$

Una solución la obtendremos, por ejemplo, para k = 1: $\begin{cases} b=1-3\cdot 1=-2 \\ a=1+2\cdot 1=3 \end{cases}$

Un punto de la recta r lo obtendremos a partir del sistema: $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x-2y+z=0 \end{cases}$

Para, por ejemplo, x = 0 $\rightarrow \begin{cases} y+z=1 \\ -2y+z=0 \end{cases} \rightarrow E_1 - E_2 \rightarrow 3y=1 \rightarrow y=\frac{1}{3}$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación:

$$\frac{1}{3}+z=1 \quad \rightarrow \quad z=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

Solución: a = 3 y b = – 2 y $P_r = \left(0\,,\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3}\right)$.

Nota: este apartado no queda determinado, tiene infinitas soluciones; depende del valor que le demos a k. La recta r no está determinada ya que sólo conocemos su vector director.

PROBLEMA A.2. Se dan la recta $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \end{cases}$ y el plano π: $2x+y+mz=n$.

Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π se cortan en un punto. *(3 puntos)*

b) Los valores de m y n para los que la recta r y el plano π no se cortan. *(3´5 puntos)*

c) Los valores de m y n para los que la recta r está contenida en el plano π. *(3´5 puntos)*

Solución:

a) ¿m y n? / $r\cap\pi$ = punto

Para que r y π se corten en un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única (el punto de corte entre r y π), es decir, el sistema debe ser compatible y determinado.

Para que el sistema $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+3y-z=1 \\ 2x+y+mz=n \end{cases}$ *sea compatible y determinado ran (A) = ran (A´) = 3*

Por tanto, para que ran (A) = 3 debe ser $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix} \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & m \end{vmatrix}=3m-2+4+12+1+2m=5m+15$$

$$5m+15=0 \;\rightarrow\; 5m=-15 \;\rightarrow\; m=\frac{-15}{5}=-3$$

Para $m\neq-3$, ran (A) = 3 y como A´ es 3x4 también ran(A´) = 3

Luego, ***para que la recta r y el plano π se corten en un punto debe ser $m\neq-3$ y n cualquier valor***.

Otra forma de resolverlo,

Obtengamos las ecuaciones paramétricas de la recta r,

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=3+2=5\neq0$, *el sistema a resolver es:* $\begin{cases} x-2y=1+2z \\ x+3y=1+z \end{cases}$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+2z & -2 \\ 1+z & 3 \end{vmatrix}}{5}=\frac{3+6z+2+2z}{5}=\frac{5+8z}{5}=1+\frac{8}{5}z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{5}=\frac{1+z-1-2z}{5}=\frac{-z}{5}$$

Por tanto, $r:\begin{cases} x=1+\frac{8}{5}\lambda \\ y=\frac{-1}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación de la recta en el plano,

$$2 \cdot \left(1 + \frac{8}{5}\lambda\right) - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$2 + \frac{16}{5}\lambda - \frac{1}{5}\lambda + m\,\lambda = n$$

$$\left(\frac{16}{5} - \frac{1}{5} + m\right)\lambda = n - 2$$

$$(3 + m)\,\lambda = n - 2$$

$$\lambda = \frac{n-2}{3+m}$$

Para que haya punto de corte λ *debe tener solución, por tanto* $3 + m \neq 0$ *y* $n - 2$ *cualquier valor, es decir,* $m \neq -3$ *y* n *cualquier valor.*

Luego, ***habrá punto de corte entre la recta r y el plano*** π ***cuando*** $m \neq -3$ ***y n cualquier valor***.

b) ¿m y n? / r y π *no se cortan.*

De lo estudiado en el apartado anterior, al resolver el corte entre recta y plano llegamos a la ecuación:

$(3 + m)\,\lambda = n - 2$

Para que no se corten, la ecuación no debe tener solución y para que esto ocurra debe ser:

$3 + m = 0$ *y* $n - 2 \neq 0$ *(para que quede una ecuación de la forma* $0 =$ *núm* $\neq 0$*)*

Por lo que, $m = -3$ *y* $n \neq 2$

Por tanto, ***r y*** π ***no se cortan para*** $m = -3$ ***y*** $n \neq 2$.

c) ¿m y n? / r $\subset \pi$

Para que la recta r esté contenida en el plano π *la ecuación que obtuvimos en el apartado a),* $(3 + m)\,\lambda = n - 2$*, debe tener infinitas soluciones y para que esto ocurra debe ser:*

$3 + m = 0$ *y* $n - 2 = 0$ *(para que quede una ecuación de la forma* $0 = 0$*)*

Por lo que, $m = -3$ *y* $n = 2$

Por tanto, ***r está contenida en*** π ***para*** $m = -3$ ***y*** $n = 2$.

PROBLEMA B.2. Se dan la recta $r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{a} = \frac{z-1}{-1}$ y el plano $\pi: 2x - y + bz = 0$, siendo a y b son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El punto de intersección de la recta r y el plano π cuando $a = -b = 1$. *(2´5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $a = b = 4$. *(2´5 puntos)*

c) La posición relativa de la recta r y del plano π en función de los valores de los parámetros a y b. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿$r \cap \pi$ para $a = -b = 1$?

Para $a = 1 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$, *para* $b = -1 \rightarrow \pi: 2x - y - z = 0$

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - \lambda - (1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - \lambda - 1 + \lambda = 0; \quad 8\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{8}$

Por tanto, $\begin{cases} x = 1 + 4\,\frac{-1}{8} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{8} \\ z = 1 - \frac{-1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} \end{cases}$

Solución:** **el punto de corte entre r y π es $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{8}, \frac{9}{8}\right)$.

b) ¿$d(r, \pi)$ para $a = b = 4$?

Para $a = 4 \rightarrow r: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{-1}$, *para* $b = 4 \rightarrow \pi: 2x - y + 4z = 0$

Obtengamos la posición relativa entre r y π.

La ecuación paramétrica de r: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - 4\lambda + 4(1 - \lambda) = 0; \quad 2 + 8\lambda - 4\lambda + 4 - 4\lambda = 0; \quad 6 = 0, \#,$

por tanto la recta r y el plano π son paralelos.

Entonces $d(r, \pi) = d(P_r, \pi)$, *siendo* P_r *un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo* $P_r(1, 0, 1)$.

$$d(P_r, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 4 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 4^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{21}} = \frac{6}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}$$

Solución: $d(r, \pi) = \frac{2\sqrt{21}}{7}$ ***u.l.***

c) ¿Posición relativa entre r y π en función de a y b?

$$r:\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = a\,\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \qquad y \qquad \pi : 2x - y + b\,z = 0$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano:

$2(1 + 4\lambda) - a\lambda + b(1 - \lambda) = 0$

$2 + 8\lambda - a\lambda + b - b\lambda = 0$

$2 + b + (8 - a - b)\lambda = 0$

$(8 - a - b)\lambda = -2 - b$

Estudiemos esta ecuación,

Si $8 - a - b = 0$ *y* $-2 - b = 0$ *entonces* $r \subset \pi$

Resolviendo el sistema: $\begin{cases} 8 - a - b = 0 \\ -2 - b = 0 \end{cases}$

De la 2ª ecuación: $\boldsymbol{b = -2}$

Sustituyendo en la 1ª, $8 - a + 2 = 0$; $\boldsymbol{a = 10}$

Si $8 - a - b = 0$ *y* $-2 - b \neq 0$ *entonces* $r \parallel \pi$

La 2ª condición, $\boldsymbol{b \neq -2}$

De la 1ª condición, $8 - a = b \rightarrow \boldsymbol{a + b = 8}$

Si $8 - a - b \neq 0$ *y* $(-2 - b)$ *cualquier valor entonces* r *y* π *se cortan*

De la condición, $\boldsymbol{a + b \neq 8}$

Resumiendo lo anterior:

Si $\boldsymbol{a = 10}$ ***y*** $\boldsymbol{b = -2}$ ***la recta r está contenida en el plano π.***

Si $\boldsymbol{b \neq -2}$ ***y*** $\boldsymbol{a + b = 8}$ ***la recta r es paralela al plano π.***

Si $\boldsymbol{a + b \neq 8}$ ***la recta r y el plano π se cortan.***

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano π: $x - y + z - 3 = 0$, la recta $s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y el punto $A = (1, 1, 1)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta que pasa por A, corta a la recta s y es paralela al plano π. *(4 puntos)*

b) El plano que pasa por A, es perpendicular al plano π y paralelo a la recta s. *(3 puntos)*

c) Discute si el punto (3,2,1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1). *(3 puntos)*

Solución:

a) *¿Recta* r*? /* $A \in r,\ \ r \cap s \neq \varnothing\ \ y\ \ r // \pi$

Como $r // \pi \ \rightarrow\ \vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$ $\quad \left(\vec{v_r} \equiv \text{vector director de } r.\ \ \vec{n_\pi} \equiv \text{vector perpendicular al plano } \pi\right)$

$\vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$

Como r *corta a* s*, obtengamos un punto cualquiera de la recta* s*:*

$$s:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \rightarrow P_s\left(2\lambda, \lambda, 0\right)$$

$A \in r\ \ y\ \ P_s \in r \ \rightarrow\ \overrightarrow{AP_s}\ \ es\ \ \vec{v_r}$

$\overrightarrow{AP_s} = (2\lambda-1, \lambda-1, -1) = \vec{v_r}$

como $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \ \rightarrow\ \vec{v_r}\cdot\vec{n_\pi} = 0 \ \rightarrow\ (2\lambda-1, \lambda-1, -1)\cdot(1, -1, 1) = 0$

$2\lambda - 1 - \lambda + 1 - 1 = 0$

$\lambda - 1 = 0$

$\lambda = 1$

Para $\lambda = 1$, $P_s\,(2, 1, 0)$ *y* $\vec{v_r} = (1, 0, -1)$. *Por tanto,* ***la ecuación de la recta pedida será:***

Ecuación continua: $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{0} = \dfrac{z-1}{-1}$

Ecuación paramétrica: $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

b) *¿Plano* σ*? /* $A \in \sigma,\ \ \sigma \perp \pi\ \ y\ \ \sigma // s$

Para obtener la ecuación del plano σ *necesitamos un punto y dos vectores directores de* σ*.*

como $A \in \sigma \ \rightarrow\ P_\sigma = A = (1, 1, 1)$

$\sigma \perp \pi \ \rightarrow\ \vec{u_\sigma} = \vec{n_\pi} = (1, -1, 1)$

$\sigma // s \ \rightarrow\ \vec{v_\sigma} = \vec{v_s} = (2, 1, 0)^*$

(a partir de la ecuación paramétrica de la recta* s *obtenida en el apartado (a))*

Ecuación del plano σ*,*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{(desarrollando por la } 1^a \text{ fila)}$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,(-1) - (y-1)\,(-2) + (z-1)\,(1+2) = 0$$

$-x + 1 + 2y - 2 + 3z - 3 = 0$
$-x + 2y + 3z - 4 = 0 \rightarrow x - 2y - 3z + 4 = 0$

Solución: plano σ: $x - 2y - 3z + 4 = 0$

c) ¿recta t? / (5, 3, 1) $\in$ t y t // s.

$$\text{recta} \quad t: \begin{cases} \text{punto} \quad (5,3,1) \\ \vec{v_t} \left(\text{como } t \,//\, s \rightarrow \vec{v_t} = \vec{v_s}\right) \rightarrow \vec{v_t} = (2,1,0) \end{cases}$$

$$\text{Por tanto,} \quad t: \begin{cases} x = 5 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$$

Veamos si el punto (3, 2, 1) $\in$ t

$$\begin{cases} 3 = 5 + 2\lambda \\ 2 = 3 + \lambda \\ 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2 = 2\lambda \\ -1 = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \qquad \text{Solución} \quad \lambda = -1$$

Por tanto (3, 2, 1) está en la recta paralela a s que pasa por (5,3,1).

PROBLEMA B.2. Dada la recta $r:\begin{cases} x+y=3 \\ x+4y-z=8 \end{cases}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) Las ecuaciones paramétricas de la recta r *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano π que es paralelo a r y pasa por los puntos (5,0,1) y (4,1,0) *(4 puntos)*

c) La distancia entre la recta r y el plano π obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*

Solución:

a) Ecuaciones paramétricas de la recta r.

Debemos resolver el sistema que determina a r.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$como \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4-1=3\neq 0, \quad \text{el sistema a resolver es} \begin{cases} x+y=3 \\ x+4y=8+z \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 8+z & 4 \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{12-8-z}{3}=\dfrac{4-z}{3} \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8+z \end{vmatrix}}{3}=\dfrac{8+z-3}{3}=\dfrac{5+z}{3} \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas "complicadas"}$$

Escogemos otro menor no nulo,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 8 \end{array}\right)$$

$$como \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1\neq 0, \quad \text{el sistema a resolver es} \begin{cases} y=3-x \\ 4y-z=8-x \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y del la 1ª ecuación en la 2ª,

4 (3 – x) – z = 8 – x, hay que despejar z, 12 – 4 x – z = 8 – x; z = 4 – 3 x

Por tanto, las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x=\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-3\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

b) ¿Plano π? / $\pi // r$ y los puntos (5,0,1) y (4,1,0) $\in \pi$

Para el plano π necesitamos un punto y dos vectores directores,

Punto de π (5,0,1)

Como $\pi // r \;\rightarrow\; \vec{v_1}=\vec{v_r}=(1,-1,-3)$, de las ecuaciones paramétricas de r obtenidas en (a).

Con los dos puntos del plano π, $\vec{v_2}=(5,0,1)-(4,1,0)=(1,-1,1)$

Ecuación del plano π,

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-0 & z-1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \quad \text{(desarrollando por la 1ª fila)}$$

$$(x-5)\begin{vmatrix}-1 & -3\\ -1 & 1\end{vmatrix} - y\begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} = 0$$

$$(x-5)\,(-1-3) - y\,(1+3) + (z-1)\,(-1+1) = 0$$

$$-4(x-5) - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad -4x + 20 - 4y = 0 \quad \rightarrow \quad x + y - 5 = 0$$

Solución: $\boldsymbol{\pi: x + y - 5 = 0}$

c) ¿$d(r,\pi)$?

Como $r \parallel \pi$ *(según el apartado (b)),* $d(r,\pi) = d(P_r,\pi)$

Pr (0,3,4) (según las ecuaciones paramétricas del la recta r obtenidas en (a))

$$d(P_r,\pi) = \frac{|0+3-5|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Solución: $\boldsymbol{d(r,\pi) = \sqrt{2}}$ ***u.l.***

PROBLEMA A.2. Se tienen el plano π: $2x + y + 2z = 8$ y el punto $P = (10, 0, 10)$.
Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al plano π. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas. *(4 puntos)*

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C. *(3 puntos)*

Solución:

a) $\pi: 2x + y + 2z = 8$; $\pi: 2x + y + 2z - 8 = 0$ y $P(10, 0, 10)$

$$d(P,\pi) = \frac{|2\cdot 10 + 0 + 2\cdot 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|32|}{3} = \frac{32}{3} \cong 10'6667$$

La distancia del punto P al plano π es de $\frac{32}{3}$ u.l. (aproximadamente $10'6667$ u.l.).

b) Calculemos los puntos A, B y C.

$A = \pi \cap$ Eje OX

$$\text{Eje } OX: \left\langle \begin{matrix} \text{punto} & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(1,0,0) & \end{matrix} \right. \rightarrow \text{Eje } OX: \begin{cases} x = 0 + 1\lambda \\ y = 0 + 0\lambda & \lambda \in \Re \\ z = 0 + 0\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Eje } OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 & \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2\lambda + 0 + 2 . 0 = 8$; $2\lambda = 8$; $\lambda = 4$

Por tanto, **A (4 , 0 , 0)**

$B = \pi \cap$ Eje OY

$$\text{Eje } OY: \left\langle \begin{matrix} \text{punto} & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(0,1,0) & \end{matrix} \right. \rightarrow \text{Eje } OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda & \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 . 0 + \lambda + 2 . 0 = 8$; $\lambda = 8$

Por tanto, **B (0 , 8 , 0)**

$C = \pi \cap$ Eje OZ

$$\text{Eje } OZ: \left\langle \begin{matrix} \text{punto} & (0,0,0) \\ \vec{v}\,(0,0,1) & \end{matrix} \right. \rightarrow \text{Eje } Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 & \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z del eje en la ecuación del plano, $2 . 0 + 0 + 2\lambda = 8$; $2\lambda = 8$; $\lambda = 4$

Por tanto, **C (0 , 0 , 4)**

El área del triángulo de vértices A, B, C la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$

$$\vec{AB} = (-4,8,0), \quad \vec{AC} = (-4,0,4), \quad \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 8 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 32\,\vec{i} + 16\,\vec{j} + 32\,\vec{k} = (32,16,32)$$

$$\left|\vec{AB}\times\vec{AC}\right| = \sqrt{32^2+16^2+32^2} = 48; \qquad A_T = \frac{1}{2}48 = 24\ u.a.$$

El área del triángulo pedida es 24 u.a.

c) Volumen del tetraedro.

Calculamos los vectores $\vec{AP} = (6,0,10)$, $\vec{BP} = (10,8,10)$ *y* $\vec{CP} = (10,0,6)$

$$V_{tetra} = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & 8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|288-800| = \frac{512}{6} = \frac{256}{3} \cong 85'3333$$

El volumen del tetraedro pedido es $\frac{256}{3}$ *u.v.* ***(aproximadamente 85´3333 u.v.).***

PROBLEMA B.2. Se dan en el espacio la recta $r: \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta}$ y el plano π: $x + 2y + 3z = 6$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β. *(5 puntos)*

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha = 6$ y $\beta = 3$. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que pasa por $(0, 0, 0)$ y que no corta al plano π. *(2 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de α y β.

Podemos resolverlo de dos formas:

1. *Escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r,* $r: \begin{cases} x = \alpha - \lambda \\ y = -4\lambda \quad\quad \lambda \in \Re \\ z = \beta\lambda \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación del plano π:

$(\alpha - \lambda) + 2 \cdot (-4\lambda) + 3\beta\lambda = 6$, *(la incógnita es λ)*

$\alpha - \lambda - 8\lambda + 3\beta\lambda = 6$

$\alpha - 9\lambda + 3\beta\lambda = 6$

$\alpha + (3\beta - 9)\lambda = 6$

$$(3\beta - 9)\lambda = 6 - \alpha \rightarrow \begin{cases} 3\beta - 9 = 0 \rightarrow 3\beta = 9 \rightarrow \beta = 3 \\ 6 - \alpha = 0 \rightarrow \alpha = 6 \end{cases}$$

Si $\beta \neq 3$**, $3\beta - 9 \neq 0$ y por tanto la ecuación tiene como solución $\lambda = \dfrac{6-\alpha}{3\beta - 9}$, luego **r y π se cortan en un punto.

***Si $\beta = 3$**, la ecuación queda $0 \cdot \lambda = 6 - \alpha \rightarrow 0 = 6 - \alpha$*

***si $\alpha \neq 6$** $\rightarrow$ $0 = (6 - \alpha) \neq 0$, la ecuación no tiene solución, **r y π son paralelos**.*

***si $\alpha = 6$** $\rightarrow$ $0 = 0$, la ecuación tiene infinitas soluciones, **r está contenida en π**.*

2. *Escribimos la recta r como intersección de dos planos,*

$$r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} \rightarrow \dfrac{x-\alpha}{1} = \dfrac{y}{4} \rightarrow 4x - 4\alpha = y \rightarrow 4x - y = 4\alpha \\ \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta} \rightarrow \beta y = -4z \rightarrow \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} 4x - y = 4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 4x - y = 4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & \beta & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Estudiamos la posición relativa de r y π estudiando el sistema formado por sus ecuaciones,

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \end{vmatrix} = -4 + 12\beta - 32 = 12\beta - 36$$

$$12\beta - 36 = 0 \rightarrow 12\beta = 36 \rightarrow \beta = 3$$

Si $\beta \neq 3$, ran(A) = 3 = ran(A´) = nº de incógnitas $\rightarrow$ sistema compatible determinado

$\rightarrow$ r y π se cortan en un punto.

Si $\beta = 3$,

La matriz ampliada del sistema será: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right)$ *y sabemos que* $|A| = 0$.

Calculemos el rango de A, como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1-8 = -9 \neq 0 \rightarrow ran(A) = 2$

Rango de A´,

Falta estudiar el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & -1 & 4\alpha \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 4\alpha \end{vmatrix} = -3\,(4\alpha - 24)$

$$-3\,(4\alpha - 24) = 0 \rightarrow 4\alpha - 24 = 0 \rightarrow 4\alpha = 24 \rightarrow \alpha = 6$$

si $\alpha \neq 6$ $\rightarrow$ ran(A´) = 3 $\neq$ 2 = ran(A), sistema incompatible, r y π son paralelos.

si $\alpha = 6$ $\rightarrow$ ran(A´) = ran(A) = 2 < nº incógnitas, sistema compatible indeterminado, r está contenida en π.

De ambas formas el resultado obtenido es:

Si $\beta \neq 3$, r y π se cortan en un punto.

Si $\beta = 3$ y $\alpha \neq 6$ r y π son paralelos.

Si $\beta = 3$ y $\alpha = 6$ r está contenida en π.

b) Según lo estudiado anteriormente para $\alpha = 6$ y $\beta = 3$, la recta r está contenida en el plano π, luego ***d(r , π) = 0.***

c) ¿Plano σ? / (0,0,0) $\in \sigma$ y $\pi \cap \sigma = \varnothing$.

El plano σ que no corta al plano π debe ser paralelo a él, por tanto la ecuación de σ será: x + 2 y + 3 z = D

Como el punto (0,0,0) $\in \sigma$ $\rightarrow$ 0 + 2 . 0 + 3 . 0 = D $\rightarrow$ D = 0

Y, ***la ecuación del plano pedido es: x + 2 y + 3 z = 0.***

PROBLEMA 2. Sea la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y los puntos P = (1, 0, 0) y Q = (2, 1, α)

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a *r*. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando α = 1. *(3 puntos)*
c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando α = 1. *(3 puntos)*

Solución:

a) $¿\alpha? \ / \ r_{PQ} // r \quad \{ r_{PQ}$ *es la recta que pasa por P y Q}*

El vector director de r_{PQ} *es* $\overrightarrow{PQ} = (1,1,\alpha)$

El vector director de r es (1, 1,– 1)

Para que $r_{PQ} // r \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{v_r} \quad \rightarrow \quad \dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{\alpha}{-1} \quad \rightarrow \quad 1 = \dfrac{\alpha}{-1} \quad \rightarrow \quad \alpha = -1$

Solución: $\boldsymbol{\alpha = -1}$

b) $¿\text{Plano } \pi? \ / \ \begin{matrix} P, Q \in \pi \text{ para } \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad P(1,0,0) \text{ y } Q(2,1,1) \\ \pi // r \end{matrix}$

Para obtener la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores de él.
Punto, por ejemplo, P(1,0,0)

Vectores directores, $\left\langle \begin{matrix} P,Q \in \pi \rightarrow \overrightarrow{PQ}\ (1,1,1) \\ \pi // r \rightarrow \overrightarrow{v_r}\ (1,1,-1) \end{matrix} \right.$

La ecuación del plano π *la obtenemos calculando:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)(-2) - y(-2) + z \cdot 0 = 0$$

$$-2x + 2 + 2y = 0 \quad \rightarrow \quad -x + y + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x - y - 1 = 0$$

Solución: $\boldsymbol{\pi: x - y - 1 = 0}$

c) $¿d(Q,\pi)? \ / \ \begin{matrix} \alpha = 1 \quad \rightarrow \quad P(1,0,0) \text{ y } Q(2,1,1) \\ \pi / \begin{cases} P \in \pi \\ r \perp \pi \rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_\pi}; \quad \overrightarrow{v_r} = (1,1,-1) \rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = (1,1,-1) \end{cases} \end{matrix}$

Por tanto π*:* $x + y - z + D = 0$
Como $P \in \pi \ \rightarrow \ 1 + 0 - 0 + D = 0 \ \rightarrow \ D = -1$
Por lo que π*:* $x + y - z - 1 = 0$

Finalmente, $d(Q,\pi) = \dfrac{|2+1-1-1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Solución: $d(Q,\pi) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMA 5. Se da el plano π: 2 x + y – z – 5 = 0 y los puntos A(1, 2, – 1), B(2, 1, 0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π. *(4 puntos)*
b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r. *(1+2 puntos)*
c) La distancia entre el punto B y la recta r. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano σ? / A y B ∈ σ y σ ⊥ π.

$\sigma \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ *es vector director de* σ, $\vec{n}_\pi(2,1,-1)$

$$A \text{ y } B \in \sigma \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \text{ es vector director de } \sigma, \quad \overrightarrow{AB}\,(1,-1,1) \\ \text{Tomamos } B \text{ como punto de } \sigma \end{array} \right.$$

La ecuación del plano σ,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\cdot 0 - (y-1)\cdot 3 + z\cdot(-3) = 0 \quad \rightarrow \quad -3y+3-3z=0 \quad \rightarrow \quad y+z-1=0$$

Por lo tanto, ***la ecuación del plano σ es: y + z – 1 = 0.***

b) ¿Recta r? / A ∈ r y r ⊥ π.

$$\text{De la recta r conocemos: } \left\langle \begin{array}{l} \text{punto} \quad A(1,2,-1) \\ \text{v. director, } r \perp \pi \rightarrow \vec{v}_r = \vec{n}_\pi(2,1,-1) \end{array} \right.$$

Las ecuaciones paramétricas de r,

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Encontremos dos planos cuya intersección sea la recta r.
Escribimos la ecuación continua de r,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \\ \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{z+1}{-1} \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-1 = 2y-4 \\ -x+1 = 2z+2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x-2y+3=0 \\ -x-2z-1=0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x+2z+1=0 \end{cases}$$

Dos planos cuya intersección es la recta r son: τ: x – 2 y + 3 = 0 y α: x + 2 z + 1 = 0.

c) ¿d(B,r)?

Como $A \in r \;\to\; d(B,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$

Del apartado a): $\overrightarrow{AB}\,(1,-1,1)$; del apartado b): $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-1)$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 0 - \vec{j}\cdot(-3) + \vec{k}\cdot 3 = (0,3,3)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Luego $d(B,r) = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$ *u.l.*

PROBLEMA 2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{2}$ y el plano π: $x + m\,y + z = 2$ que depende del parámetro real m. Se pide:

a) La posición relativa de las rectas r y s. *(4 puntos)*

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π. *(3 puntos)*

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando $m = 2$, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y $P\,(2, 2, 2)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x+y=1 \\ 2x-z=1 \end{cases}$ *como* $\{menor\ de\ y\ z\}$ $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$, *despejamos z e y en función de x.*

$$\begin{cases} y=1-x \\ -z=1-2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1+2x \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re \qquad \text{Por tanto: } r:\begin{cases} P_r(0,1,-1) \\ \vec{v}_r(1,-1,2) \end{cases}$$

$$s:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2} \rightarrow s:\begin{cases} P_s(1,0,0) \\ \vec{v}_s(1,-1,2) \end{cases}$$

Como ambos vectores directores son iguales, las rectas son paralelas. Falta determinar si son o no coincidentes.

Estudiamos la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \;\vdots\; \overrightarrow{P_rP_s}\right]$, *es decir:* $M'=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$

Como las rectas son paralelas, ran(M) = 1

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Como las dos primeras columnas son iguales sabemos que ran (M´) es, como máximo, 2

El menor: $\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0 \rightarrow ran(M')=2$

Como ran (M) ≠ ran(M´) = 2, ***las rectas r y s son paralelas no coincidentes.***

b) ¿m / recta r ⊂ plano π?

Si r ⊂ π, al sustituir los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano, esta debe cumplirse para cualquier valor de λ.

$\lambda + m(1-\lambda) + (-1+2\lambda) = 2$ *(en esta ecuación la incógnita es λ)*

$\lambda + m - m\lambda - 1 + 2\lambda = 2$

$\lambda - m\lambda + 2\lambda = 2 + 1 - m$

$3\lambda - m\lambda = 3 - m$

$(3-m)\lambda = 3 - m$

Esta ecuación se cumplirá para cualquier valor de λ cuando 3 – m = 0, es decir m = 3

Otra forma de resolverlo es:

Si r ⊂ π, el vector director de la recta y el normal del plano serán perpendiculares.

$\vec{v}_r(1\,,-1\,,2)$ y $\vec{n}_\pi(1\,,m\,,1)$. $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \;\rightarrow\; \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0$

$(1\,,-1\,,2)\cdot(1\,,m\,,1) = 1-m+2 = 3-m$

$3-m=0$; $m=3$.

Y ahora comprobemos que para este valor de m la recta está contenida en el plano.

¿ $\lambda + 3\,(1-\lambda) + (-1+2\lambda) = 2$?; $\lambda + 3 - 3\lambda - 1 + 2\lambda = 2$; $2 = 2$ *Sí*

En conclusión, ***para que la recta r esté contenida en el plano π debe ser m = 3.***

c) Para m = 2, el plano $\pi: x + 2y + z = 2$

Corte del plano con los ejes coordenados:

***A** = Eje OX* $\cap\, \pi$

Ecuación del eje OX: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (1,0,0) \end{array} \right. \rightarrow\; OX : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$\lambda + 2 \,.\, 0 + 0 = 2$; $\lambda = 2 \;\rightarrow\;$ $\mathbf{A\,(\,2\,,0\,,0\,)}$

***B** = Eje OY* $\cap\, \pi$

Ecuación del eje OY: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (0,1,0) \end{array} \right. \rightarrow\; OX : \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$0 + 2 \,.\, \lambda + 0 = 2$; $2\lambda = 2$; $\lambda = 1 \;\rightarrow\;$ $\mathbf{B\,(\,0\,,1\,,0\,)}$

***C** = Eje OZ* $\cap\, \pi$

Ecuación del eje OZ: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } (0,0,0) \\ \vec{v}\ (0,0,1) \end{array} \right. \rightarrow\; OX : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π,

$0 + 2 \,.\, 0 + \lambda = 2$; $\lambda = 2 \;\rightarrow\;$ $\mathbf{C\,(\,0\,,0\,,2\,)}$

Volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P (2, 2, 2)

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AP}(0\,,2\,,2) \\ \overrightarrow{BP}(2\,,1\,,2) \\ \overrightarrow{CP}(2\,,2\,,0) \end{array}\right\} \rightarrow\; V = \frac{1}{6}\left\| \begin{matrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6}\left|8+8-4\right| = 2\,u^3$$

Solución: ***A (2 , 0 , 0), B (0 , 1 , 0), C (0 , 0 , 2) y el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, y P es 2*** $\boldsymbol{u^3}$.

PROBLEMA 5. Dados los puntos $P(1, 1, 0)$, $Q(2, -1, 1)$ y $R(\alpha, 3, -1)$ se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a *P, Q y R* cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas. *(3 puntos)*

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. *(4 puntos)*

c) Los valores de α para los cuales *P, Q y R* están alineados y la ecuación de la recta que los contiene. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que contiene los puntos P, Q y R para $\alpha = 1$?

P(1, 1, 0), Q(2, – 1, 1) y R(1, 3, – 1)

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad P(1,1,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \\ \overrightarrow{PR}(0,2,-1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; y-1+2z=0 \;\rightarrow\; y+2z-1=0$$

Por tanto, la ecuación del plano $\boldsymbol{\pi}$**: $\boldsymbol{y+2z-1=0}$**

¿Distancia del plano π al origen de coordenadas O(0,0,0)?

$$d(O,\pi) = \frac{|0+2\,.\,0-1|}{\sqrt{0^2+1^2+2^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ u.l.} \cong 0´4472 \text{ u.l.}$$

b) ¿recta r / $R \subset r$ y $r // s$ {P y Q $\in$ s}?

$$\vec{v}_s = \overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \;\rightarrow\; \text{como } r // s \;\rightarrow\; \vec{v}_r = \vec{v}_s \;\rightarrow\; \vec{v}_r(1,-2,1)$$

$$\text{De la recta } r: \begin{cases} \text{Punto } R(1,3,.1) \\ \vec{v}_r(1,-2,1) \end{cases}$$

Por tanto, **r:** $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-3}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

¿d(r,s)?

$$\text{Como } r // s \;\rightarrow\; d(r,s) = d(P_r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}$$

$$\left.\begin{matrix} P_r = R(1,3,-1) \\ P_s = (1,1,0) \end{matrix}\right\} \quad \overrightarrow{P_rP_s} = (0,-2,1)$$

$$\vec{v}_s = (1,-2,1) \;\rightarrow\; \left|\vec{v}_s\right| = \sqrt{1^2+(-2)^2+1^2} = \sqrt{6}$$

$$\overrightarrow{P_rP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{j} + 2\vec{k} = (0,1,2)$$

$\left|\overrightarrow{P_rP_s} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Finalmente, **d(r,s) =** $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} \cong 0'9129$ *u.l.*

c) ¿ α */ P, Q y R estén alineados?*

P, Q y R están alineados cuando $\overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR}$

P(1, 1, 0), Q(2, – 1, 1) y R(α*, 3, – 1)*

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PQ}(1,-2,1) \\ \overrightarrow{PR}(\alpha-1,2,-1)\end{array}\right\} \quad \overrightarrow{PQ} // \overrightarrow{PR} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-2}{2} = \frac{1}{-1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha-1} = -1; \quad 1 = -\alpha+1; \quad \alpha = 0$$

Para este valor de α*, la ecuación de la recta que contiene a P, Q y R es:*

{escogiendo como punto P y como vector director $\overrightarrow{PQ}$ *}*

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}.$$

Solución: P, Q y R estén alineados cuando $\alpha = 0$ ***y***

la ecuación de la recta que los contiene es $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{1}$.

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, y la recta

$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B. *(2 puntos)*
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. *(4 puntos)*
c) Calcular la distancia del punto A a la recta s. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿r? / r es la recta que pasa por A y B.

De la recta r conocemos $\begin{cases} \text{punto} \quad A(2,0,0) \\ \text{vector director } \vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,1,0) \end{cases} \rightarrow r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

La ecuación de la recta r como intersección de dos planos:

$$\begin{cases} \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} \\ \frac{x-2}{-2} = \frac{z}{0} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2 = -2y \\ 0 = -2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Solución: $r: \begin{cases} x+2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

b) ¿Plano π*? /* $s \subset \pi$ *y* $\pi // r$

$s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

Para obtener la ecuación del plano necesitamos un punto y dos vectores directores de él.

Punto, como $s \subset \pi \rightarrow P_s \in \pi \rightarrow P_s(1,1,0)$

Vectores directores, $\begin{cases} s \subset \pi \rightarrow \vec{u} = \vec{v_s} = (2,3,1) \\ \pi // r \rightarrow \vec{v} = \vec{v_r}\ (-2,1,0) \end{cases}$

La ecuación del plano π *la obtenemos calculando:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)2 + z8 = 0$$

$$-x+1-2y+2+8z = 0 \rightarrow -x-2y+8z+3 = 0 \rightarrow x+2y-8z-3 = 0$$

Solución: la ecuación del plano π ***es*** $x + 2y - 8z - 3 = 0$.

c) ¿d(A,s)?

$$A(2,0,0) \quad y \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z \quad \rightarrow \quad \begin{cases} P_s(1,1,0) \\ \vec{v}_s(2,3,1) \end{cases}$$

$$d(A,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_s\right|}$$

$$\overrightarrow{AP_s} = (-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot 1 - \vec{j} \cdot (-1) + \vec{k} \cdot (-3-2) = \vec{i} + \vec{j} - 5\vec{k} = (1,1,-5)$$

$$\left|\overrightarrow{AP_s} \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{27}$$

$$\left|\vec{v}_s\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

$$Finalmente,\ d(A,s) = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{14}} \cong 1'38873...$$

Problema 4. Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B. *(5 puntos)*

b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C. *(5 puntos)*

Solución:

a) Llamando r a la recta perpendicular a π que pasa por B. Obtengamos la ecuación de r.

De la recta r conocemos $\begin{cases} punto \quad B(3,2,3) \\ vector\ director, \quad r \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi = (2,2,1) \end{cases} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano π,

$2(3 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) + 3 + \lambda = 3; \quad 6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda = 3; \quad 9\lambda + 13 = 3; \quad 9\lambda = -10;$

$\lambda = \frac{-10}{9}$

El punto C lo obtendremos sustituyendo este valor de λ en la ecuación de r:

$$\begin{cases} x = 3 + 2\frac{-10}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 2 + 2\frac{-10}{9} = \frac{-2}{9} \\ z = 3 + \frac{-10}{9} = \frac{17}{9} \end{cases} \rightarrow \quad C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9} \frac{17}{9}\right)$$

Solución: $C = \left(\frac{7}{9}, \frac{-2}{9} \frac{17}{9}\right)$.

b) Área del triángulo de vértices A, B y C.

El área de este triángulo la calculamos mediante la fórmula $A_T = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right|$

$$\vec{AB} = (1,1,5), \quad \vec{BC} = \left(\frac{7}{9} - 3, \frac{-2}{9} - 2, \frac{17}{9} - 3\right) = \left(\frac{-20}{9}, \frac{-20}{9}, \frac{-10}{9}, \right),$$

$$\vec{AB} \times \vec{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ \frac{-20}{9} & \frac{-20}{9} & \frac{-10}{9} \end{vmatrix} = \frac{-10}{9}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-10}{9}\left(\vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= \frac{-10}{9}\left(-9\vec{i} + 9\vec{j}\right) = 10\vec{i} - 10\vec{j} = (10, -10, 0)$$

$$\left|\vec{AB} \times \vec{BC}\right| = \sqrt{10^2 + (-10)^2 + 0^2} = 10\sqrt{2}; \qquad A_T = \frac{1}{2} 10\sqrt{2} = 5\sqrt{2}\ u.a. \approx 7'0711\ u.a.$$

El área del triángulo pedida es $5\sqrt{2}$ ***u.a.***

Problema 3. Dados los puntos $A = (2,-1,0)$, $B = (1,2,3)$ y $C = (-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B. *(3 puntos)*

b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C. *(4 puntos)*

c) Calcular la distancia del punto A al plano π. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿recta r? / r contiene a los puntos A y B.

De la recta r conocemos $\begin{cases} \text{punto} \quad B(1,2,3) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (-1,3,3) \end{cases}$

La ecuación continua de r: $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = \dfrac{z-3}{3}$

A partir de ella obtenemos su ecuación implícita:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-2}{3} \\ \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{z-3}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x-3=-y+2 \\ 3x-3=-z+3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-6=0 \end{cases}$$

Solución: la ecuación implícita de la recta r es $\begin{cases} 3x+y-5=0 \\ 3x+z-6=0 \end{cases}$.

b) ¿Plano π*? /* $\pi \perp r$ *y* $C \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ *el vector perpendicular al plano* π.

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1,3,3)$

La ecuación del plano π *será:* $-x + 3y + 3z + D = 0$

Como el punto $C(-1,0,0) \in \pi \rightarrow -(-1) + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + D = 0;\ 1 + D = 0;\ D = -1$

Luego $\pi: -x + 3y + 3z - 1 = 0$ *o bien* $x - 3y + 3z + 1 = 0$

Solución: la ecuación del plano pedido es $\mathbf{x - 3y + 3z + 1 = 0}$.

c) ¿d(A,π)? $A = (2,-1,0)$ *y* $\pi: x - 3y + 3z + 1 = 0$.

$$d(A,\pi) = \frac{|2 - 3\cdot(-1) - 3\cdot 0 + 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 3^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{19}} = \frac{6}{\sqrt{19}} \cong 1'3765$$

Solución: $d(A,\pi) = \dfrac{6}{\sqrt{19}}\ u.l. \cong 1'3765\ u.l.$

Problema 4. Dada la recta $r: (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda\,(-1,-1,2)$, y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. *(6 puntos)*

b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. *(4 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa de r y π en función de m.

A partir de la ecuación vectorial de la recta r escribimos la paramétrica $\begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases}$

Sustituyendo el valor de x, y, z de r en la ecuación del plano π:

$5(1-\lambda)+m(1-\lambda)+2\lambda=0$, *en esta ecuación la incógnita es λ y m es un parámetro.*

$$5-5\lambda+m-m\lambda+2\lambda=0$$
$$5-3\lambda+m-m\lambda=2$$
$$-3\lambda-m\lambda=2-5-m$$
$$(-3-m)\lambda=-3-m$$

Estudiemos la ecuación final, $-3-m=0 \rightarrow m=-3$

Si $m=-3$, la ecuación anterior queda $0\lambda=0 \rightarrow 0=0$ que es una identidad; por tanto la ecuación tendría infinitas soluciones y esto quiere decir que la recta está contenida en el plano.

Si $m \neq -3 \rightarrow -3-m \neq 0 \rightarrow$ la solución de la ecuación sería $\lambda=\dfrac{-3-m}{-3-m}=1$; por tanto la ecuación tiene una única solución y esto quiere decir que la recta y el plano se cortan en un punto.

Solución: **si $m=-3$, $r \subset \pi$**
si $m \neq -3$, r y π se cortan en un punto.

b) Para $m=1$, ¿plano π'? / $r \subset \pi'$ y $\pi' \perp \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π, $\vec{n}_\pi(5,1,1)$.

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ es director de π'

Como $r \subset \pi \rightarrow \begin{cases} \text{el punto de } r \quad (1,1,0) \in \pi' \\ \vec{v}_\pi(-1,-1,2) \quad \text{es director de } \pi' \end{cases}$

Entonces del plano π' tenemos un punto y dos vectores directores, la ecuación del plano π' la obtenemos calculando:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow$$

$$(x-1)\cdot 3-(y-1)\cdot 11+z\cdot(-4)=0$$

$$3x-3-11y+11-4z=0 \rightarrow 3x-11y-4z+8=0$$

Solución: la ecuación del plano π' es $3x-11y-4z+8=0$.

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. *(5 puntos)*

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s. *(5 puntos)*

Solución:

a) Comprobar que r y s se cortan

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \vec{v}_r(1,1,2) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(3,3,-1) \\ \vec{v}_s(-2,-1,2) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s estudiamos el rango de la matriz $\left[\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right]$*, es decir:* $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de M, {M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(M)=2 \rightarrow r \text{ y } s \left\langle \begin{array}{l} \text{se cortan} \\ \text{o} \\ \text{se cruzan} \end{array}\right.$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M es 3}.

Por el cálculo del rango de M, sabemos que ran (M´) ≥ 2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2-4+4-4+2+4=0 \rightarrow ran(M')=2$$

Como ran (M) = ran(M´) = 2, ***las rectas r y s se cortan.***

El punto de corte entre r y s lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} 1+\lambda=3-2\alpha \\ 2+\lambda=3-\alpha \\ 1+2\lambda=-1+2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ \lambda+\alpha=1 \\ 2\lambda-2\alpha=-2 \end{cases}$$

De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada = 2 = nº de incógnitas (λ *y* α*).*

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ \lambda+\alpha=1 \end{cases} \rightarrow \quad (-1)x2^a \quad \begin{cases} \lambda+2\alpha=2 \\ -\lambda-\alpha=-1 \end{cases}$$
$$\overline{\alpha=1}$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación: $\lambda+1=1; \quad \lambda=0$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de r y s para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$En \quad r:\begin{cases} x=1+0=1 \\ y=2+0=2 \\ z=1+0=1 \end{cases} \qquad\qquad En \quad s:\begin{cases} x=3-2\alpha=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-\alpha=3-1=2 \\ z=-1+2\alpha=-1+2\cdot 1=1 \end{cases}$$

Por tanto, ***el punto de corte entre las rectas r y s es P (1 , 2 , 1)***

b) ¿recta t / $P \in t$ y $t \perp r$ y s ?

$$Como \quad t \perp r \ y \ s \quad \rightarrow \quad \vec{v_t} = \vec{v_r} \otimes \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

Por tanto $\vec{v_t}(4, -6, 1)$. *Como P (1 , 2 , 1) $\in$ t, la ecuación de la recta t será:*

Ecuación paramétrica $t:\begin{cases} x=1+4\beta \\ y=2-6\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \quad \beta \in \Re$, ***ecuación continua*** $t: \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-1}{1}$.

Problema 4. Sea el plano π: $6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. *(2 puntos)*

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. *(3 puntos)*

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿d? / d (π , (0,0,0)) = 1.

$$d(\pi, O) = \frac{|6\cdot 0 + 4\cdot 0 - 3\cdot 0 d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

y debe ser $\frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \;\rightarrow\; |d| = 61 \;\rightarrow\; \begin{cases} d = \sqrt{61} \\ d = -\sqrt{61} \end{cases}$

Solución: $d = \sqrt{61}$ *o* $d = -\sqrt{61}$.

b) Calculemos los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A, corte del plano π con eje X. La ecuación del eje X es: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 6x - d = 0 \rightarrow 6x = d \rightarrow x = \frac{d}{6} \rightarrow A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

B, corte del plano π con eje Y. La ecuación del eje Y es: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 4y - d = 0 \rightarrow 4y = d \rightarrow y = \frac{d}{4} \rightarrow B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

C, corte del plano π con eje Z. La ecuación del eje Z es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -3z - d = 0 \rightarrow 3z = -d \rightarrow z = \frac{-d}{3} \rightarrow B\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

Solución: los puntos son $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$, $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$ *y* $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$.

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

Sea $\alpha = \left(\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} \right)$

$$\vec{AB} = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0, 0, \frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{AB}.\vec{AC}\right|}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \frac{\left|\left(\frac{-d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)\cdot\left(\frac{-d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right)\right|}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2}\ \sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}}\ \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}}} =$$

$$= \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{52d^2}{576}}\ \sqrt{\frac{45d^2}{324}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\ \sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{13d^2}}{12}\ \frac{\sqrt{5d^2}}{6}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{\sqrt{65d^4}}{72}} = \frac{\left|\frac{d^2}{36}\right|}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} =$$

$$\left\{ \frac{d^2}{36} > 0 \rightarrow \left|\frac{d^2}{36}\right| = \frac{d^2}{36} \right\} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2\sqrt{65}}{72}} = \frac{72\, d^2}{36\, d^2\sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}}$$

Entonces, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} \quad \rightarrow \quad \alpha = arc\cos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \cong 75'6367^{\circ}$ *o* *1´3201 rds.*

Solución: el ángulo formado por los vectores $\vec{AB}$ ***y*** $\vec{AC}$ ***es 75´6367º o 1´3201 rds.***

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los puntos A=(1,-2,3) y B=(0,2,1), se pide:
a) La ecuación paramétrica de la recta que pasa por ambos puntos. *(1,1 puntos)*
b) La ecuación del plano π que está a igual distancia de A y de B. *(1,1 puntos)*
c) La distancia al origen de la recta intersección del plano 2y-z=0 con el plano π del apartado b). *(1,1 puntos)*

Solución:

a) *Ecuación paramétrica de la recta que pasa por A y B.*

De la recta r sabemos $\begin{cases} \text{punto } A(1,-2,3) \\ \text{vector director } \overrightarrow{AB} = (-1,4,2) \end{cases}$

Por lo tanto la ecuación paramétrica de la recta r es:

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$$

b) *El plano que está a igual distancia de los puntos A y B pasará por el punto medio del segmento AB y será perpendicular al vector* $\overrightarrow{AB}$

$$M \quad \text{punto medio de } \overline{AB} = \left(\frac{1+0}{2}, \frac{-2+2}{0}, \frac{3+1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 0, 2\right)$$

$\overrightarrow{AB}(-1,4,2)$, *este es un vector ortogonal al plano.*

La ecuación del plano buscado será $-x + 4y - 2z + D = 0$ *con la condición de que pase por el punto M, luego*

$$\frac{-1}{2} + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + D = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{2} - 4 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = \frac{1}{2} + 4 = \frac{9}{2}$$

La ecuación del plano será $-x + 4y - 2z + \frac{9}{2} = 0 \qquad -2x + 8y - 4z + 9 = 0$

c)

La ecuación de la recta s, intersección de los dos planos, será $s : \begin{cases} -2x + 8y - 4z + 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$

La distancia del origen (O) a la recta s la calculamos mediante la expresión,

$$d(O,s) = \left| \frac{\left|\overrightarrow{P_s O} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|} \right|$$

Necesitamos encontrar un punto y un vector director de la recta s.
Obtengamos las ecuaciones paramétricas de s.

$$\begin{cases} -2x + 8y - 4z + 9 = 0 \\ 2y - z = 0 \end{cases} \quad \text{como} \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad x,\ y \text{ incógnitas principales.}$$

$$\begin{cases} -2x + 8y = -9 + 4z \\ 2y = z \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = \frac{z}{2}$$

sustituyendo en la 1ª ecuación

$$-2x+8\frac{z}{2}=-9+4z \quad \rightarrow \quad -2x+4z=-9+4z \quad \rightarrow \quad -2x=-9 \quad \rightarrow \quad x=\frac{9}{2}$$

$$luego \quad s:\begin{cases} x=\dfrac{9}{2} \\ y=\dfrac{1}{2}\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} P_s\left(\dfrac{9}{2},0,0\right) \\ \vec{v}_s\left(0,\dfrac{1}{2},1\right) \end{matrix}$$

$$\vec{P_sO}=(0,0,0)-\left(\frac{9}{2},0,0\right)=\left(\frac{-9}{2},0,0\right)$$

$$\vec{P_sO}\times\vec{v}_s=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{-9}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ \dfrac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} \dfrac{-9}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} \dfrac{-9}{2} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} \end{vmatrix}=\left(0,\frac{9}{2},\frac{-9}{4}\right)$$

$$\left|\vec{P_sO}\times\vec{v}_s\right|=\sqrt{0^2+\left(\frac{9}{2}\right)^2+\left(\frac{-9}{4}\right)^2}=\sqrt{\frac{81}{4}+\frac{81}{16}}=\sqrt{\frac{324+81}{16}}=\sqrt{\frac{405}{16}}=\frac{\sqrt{405}}{4}$$

$$\left|\vec{v}_s\right|=\sqrt{0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{5}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$d(O,s)=\frac{\dfrac{\sqrt{405}}{4}}{\dfrac{\sqrt{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{405}}{4\sqrt{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{405}{5}}=\frac{1}{2}\sqrt{81}=\frac{9}{2}\,u.l.$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. a) Hallar la distancia del punto P=(3,-1,4) a la recta r intersección de los planos: (*1,8 puntos*)

$$\pi_1: \quad 2x + y - z + 5 = 0$$
$$\pi_2: \quad 4x + 4y - z + 9 = 0$$

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por la recta r y el punto P. (*1,5 puntos*)

Solución:

a) *Como al sustituir las coordenadas del punto P en el primer plano, 2 . 3 – 1 – 4 + 5 = 6, el punto P no pertenece a la recta r. Calculamos la distancia entre P y r mediante la expresión.*

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rP} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

Para utilizar esta expresión debemos conocer un punto de la recta r y su vector director. Obtengamos las ecuaciones paramétricas de r. Resolvemos el sistema formado por los dos planos

$$\begin{cases} 2x + y - z + 5 = 0 \\ 4x + 4y - z + 9 = 0 \end{cases} \quad \textit{como} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 4 = 4 \neq 0$$

podemos tomar x e y como incógnitas principales, el sistema a resolver sería

$$\begin{cases} 2x + y = -5 + z \\ 4x + 4y = -9 + z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -5+z & 1 \\ -9+z & 4 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-20 + 4z + 9 - z}{4} = \frac{-11}{4} + \frac{3}{4}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5+z \\ 4 & -9+z \end{vmatrix}}{4} = \frac{-18 + 2z + 20 - 4z}{4} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$$

Las ecuaciones paramétricas de r serán

$$r: \begin{cases} x = \dfrac{-11}{4} + \dfrac{3}{4}\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

$$\textit{para } \lambda = 5 \quad \begin{cases} x = \dfrac{-11}{4} + \dfrac{3}{4}5 = \dfrac{-11+15}{4} = 1 \\ y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}5 = \dfrac{1-5}{2} = -2 \\ z = 5 \end{cases} \qquad \textit{luego} \quad P_r(1, -2, 5) \quad y \quad \overrightarrow{v_r}\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{2}, 1\right) = (3, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{PP_r}(3-1, -1+2, 4-5) = (2, 1, -1)$$

$$\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (2, -11, -7)$$

$$\left|\overrightarrow{PP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{174}{29}} = \sqrt{6} \; u.\,l.$$

b) *Al plano que pasa por la recta r y el punto P lo llamamos* δ

De este plano conocemos un punto y dos vectores directores que son,

Punto $P(3,-1,4)$

vector $\vec{u} \equiv \vec{v}_r\,(3,-2,4)$

vector $\vec{w} \equiv \overrightarrow{P\,P_r}\,(2,2,-1)$

La ecuación implícita del plano será $\begin{vmatrix} x-3 & 3 & 2 \\ y+1 & -2 & 1 \\ z-4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$

Desarrollando por la primera columna,

$$(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)\,(2-4) - (y+1)\,(-3-8) + (z-4)\,(3+4) = 0$$

$$-2x + 6 + 11y + 11 + 7z - 28 = 0$$

$$-2x + 11y + 7z - 11 = 0$$

El plano que pasa por la recta r y el punto P es $\delta : -2x + 11y + 7z - 11 = 0$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. Sean r y $r´$ las rectas del espacio $\Re^3$, determinadas del modo siguiente:
r pasa por los puntos A = (3,6,7) y B = (7,8,3) y $r´$ es la recta de intersección de los planos de ecuaciones: x – 4 y – z = - 10 y 3 x – 4 y + z = - 2. Se pide:
a) Calcular de cada una de las rectas r y $r´$ una ecuación paramétrica y determinar la posición relativa de ambas (*1 punto*).
b) Calcular la distancia d entre las rectas r y $r´$ *(1,3 puntos).*
c) Calcular el área del triángulo de vértices A, B y C, siendo C un punto cualquiera de la recta $r´$ *(1 punto).*

Solución:
a) Ecuación paramétrica de r

De la recta r conocemos	$r:\begin{cases} Punto \quad A(3,6,7) \\ \vec{v_r} = \vec{AB} = (4,2,-4) \end{cases}$	*por lo que una ecuación paramétrica será*	$r:\begin{cases} x = 3+4\lambda \\ y = 6+2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 7-4\lambda \end{cases}$

Una ecuación paramétrica de r´ la encontramos resolviendo el sistema de ecuaciones que la define,

$$r´\begin{cases} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+3 = 4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad$ *x y z son incógnitas principales.*

Resolvemos el siguiente sistema,

$$\begin{cases} x-z=-10+4y \\ 3x+z=-2+4y \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -10+4y & -1 \\ -2+4y & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{-10+4y-2+4y}{4} = \frac{-12+8y}{4} = -3+2y$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -10+4y \\ 3 & -2+4y \end{vmatrix}}{4} = \frac{-2+4y+30-12y}{4} = \frac{28-8y}{4} = 7-2y$$

Una ecuación paramétrica de r' es $r':\begin{cases} x=-3+2\mu \\ y=\mu \qquad \mu \in \Re \\ z=7-2\mu \end{cases}$

Determinemos la posición relativa de las dos rectas. Las ecuaciones paramétricas obtenidas nos dan un punto y un vector director de cada una de ellas,

$r:\begin{cases} P_r(3,6,7) \\ \vec{v_r}(4,2,-4) \end{cases}$ $\quad r':\begin{cases} P_{r'}(-3,0,7) \\ \vec{v_{r'}}(2,1,-2) \end{cases}$ *observemos que* $\vec{v_r} = 2\,\vec{v_{r'}} \Rightarrow \vec{v_r} // \vec{v_{r'}}$

La posición relativa de las dos rectas la obtenemos estudiando los rangos de las siguientes matrices,

$$M = \begin{pmatrix} \vec{v_r} & \vec{v_{r'}} \end{pmatrix} \quad y \quad M' = \begin{pmatrix} \vec{v_r} & \vec{v_{r'}} & \vec{P_rP_{r'}} \end{pmatrix}$$

Como $\vec{v_r} // \vec{v_{r'}} \rightarrow rang(M) = 1$

$$M' = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3-3 \\ 2 & 1 & 0-6 \\ -4 & -2 & 7-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

La primera y segunda columna de M´ son proporcionales, luego rang (M´) ≤ 2. Consideramos el siguiente menor de orden 2 de M´

$$\begin{vmatrix} 4 & -6 \\ 2 & -6 \end{vmatrix} = -24+12 = -12 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(M') = 2$$

$$Como \quad rang(M) = 1 \quad y \quad rang(M') = 2 \quad \Rightarrow \quad r \ y \ r' \quad son \ paralelas.$$

b) Como las dos rectas son paralelas, la distancia entre ellas es la distancia de un punto de una a la otra

$$d(r,r') = d(P_{r'}, r) = \frac{\left| \overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \right|}$$

$$\overrightarrow{P_r P_{r'}} = (-6,-6,0)$$

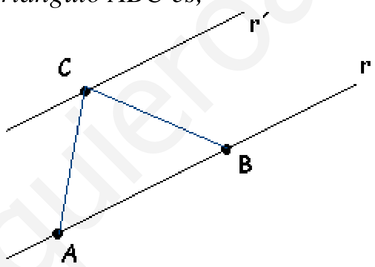
$$\overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -6 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 24\vec{i} - 24\vec{j} + 12\vec{k} = (24,-24,12)$$

$$\left| \overrightarrow{P_r P_{r'}} \times \overrightarrow{v_r} \right| = \sqrt{24^2 + (-24)^2 + 12^2} = 36$$

$$\left| \overrightarrow{v_r} \right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = 6$$

$$d(r,r') = \frac{36}{6} = 6 \ u.l.$$

c) La representación gráfica aproximada del triángulo ABC es,



En el cálculo del área del triángulo interviene la base que será d(A,B) y la altura que será d(C,r).
Como las rectas r y r’ son paralelas d(C,r) = d(r’,r) = 6 (calculada en el apartado b)

$$d(A,B) = \sqrt{(7-3)^2 + (8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6$$

$$A_T = \frac{6 \,.\, 6}{2} = 18 \ u.a.$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean r la recta y π el plano de $\Re^3$, determinados del siguiente modo:
r pasa por los puntos (2,2,4) y (-1,2,1) y el plano π pasa por los puntos (1,0,1), (1,-1,0) y (3,0,0). Se pide:
a) Probar que la recta r no es paralela a π (*1 punto*).
b) Calcular el punto P de intersección de r y π y el ángulo que forman la recta r y el plano π (*1 punto*).
c) Determinar los puntos S y T de la recta r que cumplan que su distancia a π sea 4 (*1,3 puntos*).

Solución:
a) Obtengamos el vector director de la recta r

$$\vec{v_r} = (2,2,4) - (-1,2,1) = (3,0,3)$$

Obtengamos el vector ortogonal al plano π
(1,0,1) – (1,-1,0) = (0,1,1)
(1,0,1) – (3,0,0) = (-2,0,1)

$$\vec{u_\pi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (1,-2,2)$$

Para que $r \,//\, \pi$ *debe ser* $\vec{v_r} \perp \vec{u_\pi}$
(3,0,3) . (1,-2,2) = 3 + 6 = 9 $\neq 0$, *luego la recta no es paralela al plano* π

b) Obtengamos las ecuaciones de la recta y del plano,
De la recta r conocemos uno de sus puntos (2,2,4) y su vector director obtenido en el apartado anterior, luego:

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = 4 + 3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

Del plano π *conocemos su vector ortogonal, obtenido en el apartado anterior, la ecuación general del plano será: x – 2 y + 2 z + D = 0; como el plano contiene al punto, por ejemplo, (3,0,0) sustituyendo en la ecuación anterior obtenemos el valor de D*
3 + D = 0, luego D = – 3

$$\pi : x - 2\,y + 2\,z - 3 = 0$$

Busquemos el corte entre la recta y el plano, sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano,

$$2 + 3\lambda - 2\,.\,2 + 2(4 + 3\lambda) - 3 = 0$$
$$2 + 3\lambda - 4 + 8 + 6\lambda - 3 = 0$$
$$3 + 9\lambda = 0 \;\;\rightarrow\;\; 9\lambda = -3 \;\;\rightarrow\;\; \lambda = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta obtenemos el punto de corte,

$$\begin{cases} x = 2 + 3\dfrac{-1}{3} = 2 - 1 = 1 \\ y = 2 \\ z = 4 + 3\dfrac{-1}{3} = 4 - 1 = 3 \end{cases}$$

El punto de corte es (1,2,3)

Para calcular el ángulo que forman la recta y el plano utilizamos el vector director de la recta y el ortogonal del plano,

$$\left| \cos\left(\vec{v_r}\,,\,\vec{u_\pi}\right) \right| = \frac{|\,(3,0,3)\,.\,(1,-2,2)\,|}{\sqrt{9+9}\,\sqrt{1+4+4}} = \frac{|3+6|}{\sqrt{18}\sqrt{9}} = \frac{9}{9\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego $\left(\vec{v_r}\,,\,\vec{u_\pi}\right) = \dfrac{\pi}{4}$

Por lo tanto el ángulo que forman la recta y el plano es $\dfrac{\pi}{4}$ *rds o* 45º *c) Para calcular la distancia entre un punto y un plano utilizamos la expresión,*

$$d(P,\pi)=\frac{|A\ p_1+B\ p_2+C\ p_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \quad \textit{siendo} \quad \begin{matrix} P(p_1,p_2,p_3) \\ \pi: Ax+By+Cz+D=0 \end{matrix}$$

En nuestro caso,

$$4=\frac{|2+3\lambda-2\ .\ 2+2(4+3\lambda)-3|}{\sqrt{1+4+4}}$$

$$4=\frac{|3+9\lambda|}{3}$$

$$12=|3+9\lambda| \rightarrow \left\langle \begin{matrix} 12=3+9\lambda \rightarrow 9=9\lambda \rightarrow \lambda=1 \\ -12=3+9\lambda \rightarrow -15=9\lambda \rightarrow \lambda=\frac{-15}{9}=\frac{-5}{3} \end{matrix} \right.$$

Los puntos buscados serán,

$$\textit{Para } \lambda=1, \begin{cases} x=2+3\ .1=2+3=5 \\ y=2 \\ z=4+3\ .1=4+3=7 \end{cases} \qquad S(5,2,7)$$

$$\textit{Para } \lambda=\frac{-5}{3}, \begin{cases} x=2+3\frac{-5}{3}=2-5=-3 \\ y=2 \\ z=4+3\frac{-5}{3}=4-5=-1 \end{cases} \qquad T(-3,2,-1)$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Dados los planos π_1 : x + y + z = -5 , π_2 : x – 3 y - z = 3 y la recta $r: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$,

se pide:

a) Determinar razonadamente la posición relativa de la recta r y la recta s intersección de los planos π_1 y π_2 . *(1,7 puntos)*

b) Obtener razonadamente la ecuación del plano que contiene a la recta s anterior y es paralelo a r. *(1,6 puntos)*

Solución:

a)

La recta s es de ecuación $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ x-3y-z=3 \end{cases}$ *, calculemos su forma paramétrica. Considerando el menor formado por las incógnitas x z*

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$ *resolvemos el sistema despejando la incógnita y.*

$$\begin{cases} x+z=-5+y \\ x-z=3+3y \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $2x=-2+2y \rightarrow x=-1+y$

sustituyendo en la 1ª ecuación: $-1+y+z=-5-y$ *; despejando z,* $z=-4-2y$

La ecuación de la recta s será $\begin{cases} x=-1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-4-2\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \Re$ *y de ella conocemos* $P_s(-1,0,-4)$, $\vec{v}_s(1,1,-2)$

la ecuación de la recta r es $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ *y de ella conocemos* $P_r(2,1,0)$, $\vec{v}_r(2,3,2)$

Para estudiar la posición relativa de las rectas r y s hay que estudiar el rango de la matriz

$$M' = (\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad P_r - P_s) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0 \rightarrow rang(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 8-18+2-6+4-12 = 14-36 = -22 \neq 0 \rightarrow rang(M') = 3$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

b) Ecuación del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r. El plano que buscamos lo podemos calcular de dos formas diferentes.

<u>1ª forma.</u>

De la recta s, como calculamos en el apartado anterior, conocemos un punto y un vector director;
el plano buscado, π*, contiene a la recta s luego* P_s *y* $\vec{v}_s$ *serán un punto y un vector director de* π
Como π *debe ser paralelo a la recta r el otro vector director de* π *será el de r.*

Del plano π *conocemos* $P_s(-1,0,-4)$, $\vec{v}_s(1,1,-2)$, $\vec{v}_r(2,3,2)$ *su ecuación será* $\begin{cases} x=-1+\lambda+2\mu \\ y=\lambda+3\mu \\ z=-4-2\lambda+2\mu \end{cases}$ $\lambda,\mu \in \Re$

Calculemos la ecuación general del plano,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 \\ 1 & 3 & y \\ -2 & 2 & z+4 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la última columna,

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + (z+4)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

$$(x+1)\,(2+6) - y\,(2+4) + (z+4)\,(3-2) = 0$$
$$8x + 8 - 6y + z + 4 = 0$$
$$8x - 6y + z + 12 = 0$$

<u>*2ª forma.*</u>

El haz de planos que contienen la recta s *es*

$$(x+y+z+5) + \lambda\,(x-3y-z-3) = 0 \qquad \lambda \in \Re$$

Efectuando operaciones,

$$(1+\lambda)x + (1-3\lambda)y + (1-\lambda)z + 5 - 3\lambda = 0 \qquad \lambda \in \Re$$

El plano π *que buscamos será uno de los anteriores.*

El vector ortogonal al plano anterior es $\vec{v}_n(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda) \quad \lambda \in \Re$

Como el plano π *debe ser paralelo a la recta r, se cumplirá que* $\vec{v}_n \perp \vec{v}_r \rightarrow \vec{v}_n \cdot \vec{v}_r = 0$

$$(1+\lambda, 1-3\lambda, 1-\lambda)\,(2, 3, 2) = 0$$
$$2 + 2\lambda + 3 - 9\lambda + 2 - 2\lambda = 0$$
$$7 - 9\lambda = 0 \qquad \rightarrow \qquad \lambda = \frac{7}{9}$$

La ecuación del plano buscado será:

$$(x+y+z+5) + \frac{7}{9}\,(x-3y-z-3) = 0$$
$$9\,(x+y+z+5) + 7\,(x-3y-z-3) = 0$$
$$9x + 9y + 9z + 45 + 7x - 21y - 7z - 21 = 0$$
$$16x - 12y + 2z + 24 = 0$$
$$8x - 6y + z + 12 = 0$$

Solución $\pi : 8x - 6y + z + 12 = 0$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Se consideran la recta r: (x, y, z) = (t + 1, 2 t, 3 t), el plano π: x – 2 y – z = 0 y el punto P = (1, 1, 1). Se pide

a) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto P y es paralelo al plano π (*0,9 puntos*).
b) Determinar la ecuación del plano π_2 que contiene a la recta r y pasa por el punto P (*1,2 puntos*).
c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta intersección de los planos anteriores, π_1 y π_2 (*1,2 puntos*).

Solución:

a) Como el plano π_1 *debe ser paralelo a* $\pi \Rightarrow \pi_1: \; x - 2y - z + D = 0$

Como $P \in \pi_1 \Rightarrow 1 - 2 \cdot 1 - 1 + D = 0;\ -2 + D = 0;\ D = 2;$ *luego* $\pi_1 : x - 2y - z + 2 = 0$

b) De la recta r conocemos: Punto $P_r(1,0,0)$ *y vector director* $\vec{v}_r(1,2,3)$. *Obtenemos el vector* $\overrightarrow{PP_r}(0,1,1)$ *que será director de* π_2

Del plano π_2 *conocemos: un punto P(1,1,1) y los vectores directores* $\vec{v}_r$ *y* $\overrightarrow{PP_r}$

La ecuación general de este plano será,

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-1 & 2 & 1 \\ z-1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \textit{desarrollando por la primera columna,} \quad (x-1)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(-1) - (y-1)\,1 + (z-1)\,1 = 0$$

$$-x + 1 - y + 1 + z - 1 = 0$$

$$-x - y + z + 1 = 0$$

$$x + y - z - 1 = 0$$

Solución $\pi_2 : x + y - z - 1 = 0$

c) La recta intersección de π_1 *y* π_2 *será* $r_2 \begin{cases} x - 2y - z + 2 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

Para encontrar las ecuaciones paramétricas de esta recta resolvemos el sistema anterior, como el menor $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ *podemos considerar como incógnitas principales x e y. El sistema a resolver es,*

$$\begin{cases} x - 2y = z - 2 \\ x + y = z + 1 \end{cases} \quad x = \frac{\begin{vmatrix} z-2 & -2 \\ z+1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{z - 2 + 2z + 2}{3} = \frac{3z}{3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z-2 \\ 1 & z+1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{z + 1 - z + 2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

Por lo tanto, las ecuaciones paramétricas de esta recta son: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Se considera el plano π : y + z – 12 m = 0 (m parámetro real) y la rectas

$$u:\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases},\quad v:\begin{cases}x=2\\ y=2z\end{cases},\quad w:\begin{cases}x=3\\ y=3z\end{cases}.$$

Sean A, B y C los puntos de intersección de π con u, v y w, respectivamente.

a) Calcular las coordenadas de A, B y C en función de m *(1,8 puntos)*

b) Hallar los valores de m para los que el área del triángulo ABC es 1 u.a. *(1,5 puntos)*

Solución:

a)

$$A:\pi\cap u \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=1\\ y=z\end{cases}\quad\to\quad \begin{matrix}z+z-12m=0\\ 2z=12m\\ z=6m\end{matrix}\quad\to\quad A(1,6m,6m)$$

$$B:\pi\cap v \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=2\\ y=2z\end{cases}\quad\to\quad \begin{matrix}2z+z-12m=0\\ 3z=12m\\ z=4m\end{matrix}\quad\to\quad B(2,8m,4m)$$

$$C:\pi\cap w \quad\to\begin{cases}y+z-12m=0\\ x=3\\ y=3z\end{cases}\quad\to\quad \begin{matrix}3z+z-12m=0\\ 4z=12m\\ z=3m\end{matrix}\quad\to\quad C(3,9m,3m)$$

b) El área del triángulo ABC se obtiene a partir de la fórmula

$$Área=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}=(1,2m,-2m)\qquad \overrightarrow{AC}=(2,3m,-3m)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 1&2m&-2m\\ 2&3m&-3m\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2m&-2m\\ 3m&-3m\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&-2m\\ 2&-3m\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&2m\\ 2&3m\end{vmatrix}=\vec{i}\,0-\vec{j}(-3m+4m)+\vec{k}(3m-4m)=$$

$$=(0,-m,-m)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{0^2+(-m)^2+(-m)^2}=\sqrt{2m^2}$$

$$Área=\frac{1}{2}\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 1=\frac{1}{2}\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 2=\sqrt{2m^2}\quad\to\quad 4=2m^2\quad\to\quad m^2=2\quad\to\quad m=\pm\sqrt{2}$$

Como hemos resuelto una ecuación irracional, $2=\sqrt{2m^2}$ *debemos comprobar las soluciones*

$m=\sqrt{2}\qquad 2=\sqrt{2\left(\sqrt{2}\right)^2}\ \to\ 2=\sqrt{4}$ *Sí. Solución válida*

$m=-\sqrt{2}\qquad 2=\sqrt{2\left(-\sqrt{2}\right)^2}\ \to\ 2=\sqrt{4}$ *Sí. Solución válida*

Solucíones: $m_1=\sqrt{2}\qquad m_2=-\sqrt{2}$

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Hallar las ecuaciones de los planos que pasan por el punto (-7, 2, -3) y tales que las proyecciones perpendiculares del origen sobre dichos planos son puntos de la recta (x,y,z)=(0,4,1)+t(1,0,0) (*3,3 puntos*).

Solución:
Los datos del problema son: recta r: (x,y,z)=(0,4,1) + t (1,0,0) = (t, 4, 1) y el punto Q(-7, 2, -3)
Llamamos π a los planos buscados.

Las proyecciones perpendiculares del origen sobre π son puntos de la recta r, serán de la forma P(t, 4, 1)

Consideramos los vectores: PQ (t + 7, 2, 4) y OP (t, 4, 1)
PQ es un vector contenido en el plano π y OP es perpendicular a π, luego PQ . OP = 0

$(t + 7, 2, 4) . (t, 4, 1) = 0;\quad t^2 + 7t + 8 + 4 = 0;\quad t^2 + 7t + 12 = 0;\quad t = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \dfrac{-7 \pm 1}{2} = \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = -4 \end{cases}$

Para t = – 3 ,	*OP = (-3, 4, 1) y OP es perpendicular a π, la ecuación de π será: - 3 x + 4 y + z = D* *como el punto Q es de π, - 3 (-7) + 4 . 2 – 3 = D; 21 + 8 – 3 = D; D = 26* *La ecuación de π es: - 3 x + 4 y + z = 26 → 3 x – 4 y – z = – 26 →* *3 x – 4 y – z + 26 = 0*
Para t = – 4,	*OP = (-4, 4, 1) y OP es perpendicular a π, la ecuación de π será: - 4 x + 4 y + z = D* *como el punto Q es de π, - 4 (-7) + 4 . 2 – 3 = D; 28 + 8 – 3 = D; D = 33* *La ecuación de π es: - 4 x + 4 y + z = 33 → 4 x – 4 y – z = – 33 →* *4 x – 4 y – z + 33 = 0*

Las ecuaciones de los planos pedidos son: $\pi_1 : 3x - 4y - z + 26 = 0$ *y* $\pi_2 : 4x - 4y - z + 33 = 0$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:
La recta r intersección de dos planos de ecuaciones implícitas: x + y – z = 5 y 2 x + y – 2 z = 2 .
Y la recta s que pasa por los puntos P = (3, 10, 5) y Q = (5, 12, 6). Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta r *(0,6 puntos)* y de la recta s *(0,4 puntos).*

b) Calcular el punto H intersección de r y s *(0,6 puntos)* y el ángulo α que determinan r y s *(0,4 puntos).*

c) Calcular los puntos M y N de la recta r para los que el área de cada uno de los triángulos de vértices PQM y PQN es 3 unidades de área *(1,3 puntos).*

Solución:
Datos del problema:

$$r:\begin{cases} x+y-z=5 \\ 2x+y-2z=2 \end{cases} \qquad s:\begin{cases} P(3,10,5) \\ Q(5,12,6) \end{cases}$$

a) Ecuaciones paramétricas de r y s.
De r, resolver el sistema que la define,

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-2=-1\neq 0$ *x e y incógnitas principales.*

El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} x+y=5+z \\ 2x+y=2+2z \end{cases} \quad \textit{Resolviéndolo por Cramer} \quad x=\frac{\begin{vmatrix} 5+z & 1 \\ 2+2z & 1 \end{vmatrix}}{-1}=\frac{5+z-2-2z}{-1}=\frac{3-z}{-1}=-3+z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5+z \\ 2 & 2+2z \end{vmatrix}}{-1}=\frac{2+2z-10-2z}{-1}=8$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=8 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$$

De s, a partir de los dos puntos conocidos calculamos su vector director,

$$s:\begin{cases} P(3,10,5) \\ \vec{v}=\vec{PQ}=(2,2,1) \end{cases} \qquad \textit{luego} \quad s:\begin{cases} x=3+2\mu \\ y=10+2\mu \\ z=5+\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$$

b)
Corte entre r y s (H)
Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas r y s obtenidas en el apartado anterior,

$$\begin{cases} -3+\lambda=3+2\mu \\ 8=10+2\mu \\ \lambda=5+\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=6 \\ 2\mu=-2 \\ \lambda-\mu=5 \end{cases} \quad \textit{de la 2ª ecuación} \quad \mu=-1$$

sustituyendo el valor de μ en las otras dos ecuaciones,

$$\begin{cases} \lambda-2(-1)=6 \\ \lambda-(-1)=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+2=6 \\ \lambda+1=5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda=4 \\ \lambda=4 \end{cases}$$

Como obtenemos el mismo valor de λ en las dos ecuaciones, el sistema tiene solución. Sustituyendo el valor de λ en la recta r o el valor de μ en la recta s obtendremos el punto H buscado.
Para λ = 4, H (– 3 + 4, 8 , 4) = (1, 8, 4)

El ángulo que forman las rectas r y s es el ángulo que forman sus vectores directores,

$\vec{v}_r(1,0,1)$ *y* $\vec{v}_s(2,2,1)$

$$\cos\left(\hat{r,s}\right)=\frac{\left|\vec{v}_r\,\vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_r\right|\left|\vec{v}_s\right|}=\frac{|(1,0,1)\,(2,2,1)|}{\sqrt{1^2+0^2+1^2}\,\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{|2+1|}{\sqrt{2}\,\sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Luego $\left(\hat{r,s}\right)=45º$. *Por lo que* $\alpha=45º$ *o* $\alpha=\frac{\pi}{4}\,rds$

c)

Como los puntos M y N pertenecen a la recta r sabemos que serán de la forma
$(-3+\lambda,8,\lambda)\quad \lambda\in\Re$
El triángulo PQM está determinado por los puntos P, Q y M; calculamos su área a partir de los vectores que determinan el triángulo, por ejemplo, $\vec{PQ}$ *y* $\vec{PM}$.

$$T:\text{triángulo}\quad PQM\begin{cases}P(3,10,5)\\Q(5,12,6)\\M(-3+\lambda,8,\lambda)\end{cases}\qquad \vec{PQ}(2,2,1)\quad y\quad \vec{PM}(-6+\lambda,-2,\lambda-5)$$

$$A_T=\frac{\left|\vec{PQ}\times\vec{PM}\right|}{2}$$

$$\vec{PQ}\times\vec{PM}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&1\\-6+\lambda&-2&\lambda-5\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}2&1\\-2&\lambda-5\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}2&1\\-6+\lambda&\lambda-5\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}2&2\\-6+\lambda&-2\end{vmatrix}=$$

$$=\left(2\lambda-10+2,-[2\lambda-10-(-\lambda+6)],-4+12-2\lambda\right)=(2\lambda-8,-\lambda+4,-2\lambda+8)$$

$$\left|\vec{PQ}\times\vec{PM}\right|=\sqrt{(2\lambda-8)^2+(-\lambda+4)^2+(-2\lambda+8)^2}=\sqrt{4\lambda^2-32\lambda+64+\lambda^2-8\lambda+16+4\lambda^2-32\lambda+64}=$$

$$=\sqrt{9\lambda^2-72\lambda+144}=\sqrt{9(\lambda^2-8\lambda+16)}=\sqrt{9(\lambda-4)^2}=3|\lambda-4|$$

$$A_T=\frac{3|\lambda-4|}{2}$$

$$A_T=3\ \rightarrow\ \frac{3|\lambda-4|}{2}=3\ \rightarrow\ |\lambda-4|=2\ \begin{cases}\lambda-4=2\ \rightarrow\ \lambda=6\\\lambda-4=-2\ \rightarrow\ \lambda=2\end{cases}$$

Obtenemos dos valores de λ*, a partir de ellos obtendremos los dos puntos pedidos.*
Para $\lambda=6$ *M(3, 8, 6)*
Para $\lambda=2$ *N(-1, 8, 2)*

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los puntos A = (4, -4, 9); B = (2, 0, 5); C = (4, 2, 6); L = (1, 1, 4); M = (0, 2, 3); y N = (3, 0, 5), se pide:

a) Calcular la distancia d del punto C al punto medio del segmento de extremos A, B *(0,5 puntos)* y el área S del triángulo de vértices A, B, C *(1 punto)*.

b) Calcular las ecuaciones implícitas del plano π que pasa por los puntos A, B, C *(0,4 puntos)* y del plano π' que pasa por los puntos L, M, N *(1 punto)*.

c) Calcular la ecuación paramétrica de la recta r intersección de los planos π y π' *(0,6 puntos)* y el ángulo α que determinan los planos π y π' *(0,4 puntos)*

Solución:

a)

$$Sea \quad d = d\left(C, PM_{\overline{AB}}\right)$$

$$C = (4,2,6)$$

$$PM_{\overline{AB}} \begin{cases} A(4,-4,9) \\ B(2,0,5) \end{cases} \quad PM_{\overline{AB}}(3,-2,7)$$

$$d = d\big((4,2,6),(3,-2,7)\big) = \sqrt{(4-3)^2 + (2+2)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\ u.l.$$

Sea A_S el área del triángulo S.

$$A_S = \frac{1}{2}\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$$

$$\vec{AB} = (2,0,5) - (4,-4,9) = (-2,4,-4) \qquad \vec{AC} = (4,2,6) - (4,-4,9) = (0,6,-3)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & -4 \\ 0 & 6 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = (12,6,-12)$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \sqrt{12^2 + 6^2 + (-12)^2} = \sqrt{144+36+144} = \sqrt{324} = 18$$

$$A_S = \frac{1}{2}18 = 9\ u.a.$$

b)

$$Plano\ \pi\ pasa\ por\ A, B\ y\ C; sus\ vectores\ directores\ pueden\ ser \begin{cases} \vec{AB} = (-2,4,-4) \\ \vec{AC} = (0,6,-3) \end{cases}$$

$$los\ vectores\ directores\ de\ \pi \begin{cases} \vec{u}(1,-2,2) \\ \vec{v}(0,2,-1) \end{cases}$$

La ecuación implícita del plano π la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 0 \\ y+4 & -2 & 2 \\ z-9 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z-9)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-4)(-2) - (y-4)(-1) + (z-9)2 = 0$$

$$-2x + 8 + y + 4 + 2z - 18 = 0$$

$$-2x + y + 2z - 6 = 0$$

La ecuación implícita del plano π es $-2x + y + 2z - 6 = 0$

Plano π' *pasa por L, M y N; sus vectores directores pueden ser* $\begin{cases} \overrightarrow{ML} = (1,-1,1) \\ \overrightarrow{MN} = (3,-2,2) \end{cases}$

La ecuación implícita del plano π' la obtenemos,

$$\begin{vmatrix} x-0 & 1 & 3 \\ y-2 & -1 & -2 \\ z-3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(0) - (y-2)(-1) + (z-3)1 = 0$$

$$y - 4 + z - 3 = 0$$

$$y + z - 5 = 0$$

La ecuación implícita del plano π' es $y + z - 5 = 0$

c)

$$r : \pi \cap \pi'$$

$$r : \begin{cases} -2x + y + 2z - 6 = 0 \\ y + z - 5 = 0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

x e y serán las incógnitas principales. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -2x + y = 6 - 2z \\ y = 5 - z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación: $-2x + 5 - z = 6 - 2z$; $-2x = 1 - z$;

$$x = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}z$$

La ecuación paramétrica de la recta r será $\begin{cases} x = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{2}\lambda \\ y = 5 - \lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

Para calcular el ángulo que forman los planos π y π' obtenemos sus vectores normales,

$\vec{n}_{\pi}(-2,1,2) \quad y \quad \vec{n}_{\pi'}(0,1,1)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n}_{\pi},\vec{n}_{\pi'}}\right)=\frac{|(-2,1,2)\,(0,1,1)|}{\sqrt{4+1+4}\,\sqrt{1+1}}=\frac{|1+2|}{\sqrt{9}\sqrt{2}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left(\widehat{\vec{n}_{\pi},\vec{n}_{\pi'}}\right)=45º \quad \Rightarrow \quad \left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=90º-45º=45º$$

Solución $\left(\widehat{\pi,\pi'}\right)=\frac{\pi}{4}\,rds \quad o \quad 45º$

PROBLEMA A.2. Dadas las rectas de ecuaciones

$$r:\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}\qquad y\qquad s:\begin{cases}x-y=-5\\z=4\end{cases}$$

se pide:

a) Justificar que las rectas r y s se cruzan. *(4 puntos)*
b) Calcular razonadamente la distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*
c) Determinar la ecuación del plano π que es paralelo y equidistante a las rectas r y s. *(3 puntos)*

Solución:
a) Para comprobar que las rectas r y s se cruzan calculemos punto y vector director de cada una de ellas.

$$r:\begin{cases}5x+y-z=4\\2x-2y-z=-5\end{cases}$$

$$\text{Punto}\quad x=0\ \rightarrow\ \begin{cases}y-z=4\\-2y-z=-5\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}y-z=4\\2y+z=5\end{cases}\ \rightarrow$$

$$\text{sumando ambas ecuaciones}\ \rightarrow\ 3y=9\ \rightarrow\ y=3$$

$$\text{sustituyendo en 1ª}\ \rightarrow\ 3-z=4\ \rightarrow\ z=-1$$

$$P_r(0,3,-1)$$

$$\text{vector director}\quad \vec{v_r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&-1\\2&-2&-1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&-1\\-2&-1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5&-1\\2&-1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5&1\\2&-2\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}(-1-2)-\vec{j}(-5+2)+\vec{k}(-10-2)=-3\,\vec{i}+3\,\vec{j}-12\,\vec{k}=(-3,3,-12)$$

$$\text{luego}\quad \vec{v_r}\ (-1,1,-4)$$

$$s:\begin{cases}x-y=-5\\z=4\end{cases}$$

$$\text{Punto}\quad x=0\ \rightarrow\ \begin{cases}-y=-5\\z=4\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}y=5\\z=4\end{cases}\ \rightarrow\quad P_s(0,5,4)$$

$$\text{vector director}\quad \vec{v_s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}=-\vec{i}-\vec{j}+0\,\vec{k}=$$

$$=-\vec{i}-\vec{j}=(-1,-1,0)$$

$$\text{luego}\quad \vec{v_s}\ (1,1,0)$$

Procedamos a comprobar que las rectas se cruzan. Vamos a realizar los cálculos de dos formas distintas.
Primera forma.

$$\overrightarrow{v_r}\,(-1,1,4) \quad y \quad \overrightarrow{v_s}\,(1,1,0) \quad \frac{-1}{1} \neq \frac{1}{1} \quad \rightarrow \qquad \textit{no son paralelos}$$

Veamos si las rectas se cortan, para ello resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones que definen las rectas,

$$\begin{cases} 5x + y - z = 4 \\ 2x - 2y - z = -5 \\ x - y = 5 \\ z = 4 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x + y - 4 = 4 \\ 2x - 2y - 4 = -5 \\ x - y = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 5x + y = 8 \\ 2x - 2y = -1 \\ x - y = 5 \end{cases}$$

La segunda y tercera ecuaciones son incompatibles, coeficientes de incógnitas proporcionales pero no los términos independientes, por lo tanto el sistema no tiene solución.

Rectas con vectores directores no paralelos y que no se cortan, las rectas r y s se cruzan.

Segunda forma.

Estudiar y comparar los rangos de las siguientes matrices:

$$M = \left(\overrightarrow{v_r} \quad \overrightarrow{v_s}\right) \quad y \quad M' = \left(\overrightarrow{v_r} \quad \overrightarrow{v_s} \;\vdots\; \overrightarrow{P_r P_s}\right)$$

$$\overrightarrow{P_r P_s} = (0,5,4) - (0,3,-1) = (0,2,5)$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} en\ M \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M) = 2 \\ en\ M' \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5 - 8 - 5 = -18 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(M') = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \textit{se cruzan}$$

b) d(r,s)

Como las rectas r y s se cruzan podemos calcular la distancia entre ellas mediante la expresión:

$$d(r,s) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{v_r}\,,\ \overrightarrow{v_s}\,,\ \overrightarrow{P_r P_s}\right] \right|}{\left| \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} \right|}$$

$$\left| \left[\overrightarrow{v_r}\,,\ \overrightarrow{v_s}\,,\ \overrightarrow{P_r P_s}\right] \right| = \left| \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right| = (\textit{calculado en el apartado anterior}) = |-18| = 18$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4\,\vec{i} - 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k} = (4,-4,-2)$$

$$\left| \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} \right| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

Finalmente $\quad d(r,s) = \dfrac{18}{6} = 3\,u.\,l.$

También podemos calcular la distancia entre dos rectas que se cruzan de esta otra forma.
Vamos a buscar un punto de la recta r y otro punto de la recta s de forma que el vector que forman estos dos puntos sea perpendicular a las dos rectas, de esta forma la distancia entre las dos rectas será la distancia entre esos dos puntos.
Sea P un punto cualquiera de r,

$$r:\begin{cases}P_r(0,3,1)\\ \overrightarrow{v_r}(-1,1,-4)\end{cases} \rightarrow \quad P(-\lambda, 3+\lambda, 1-4\lambda)$$

Sea Q un punto cualquiera de s,

$$s:\begin{cases}P_s(0,5,4)\\ \overrightarrow{v_s}(1,1,0)\end{cases} \rightarrow \quad Q(\mu, 5+\mu, 4)$$

Luego $\overrightarrow{PQ}=(\mu+\lambda, \mu-\lambda+2, 4\lambda+5)$

Buscamos los valores de λ *y* μ *de forma que* $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{v_r}$ *y* $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{v_s}$

$$\begin{cases}(\mu+\lambda, \mu-\lambda+2, 4\lambda+5)\,(-1,1,-4)=0\\(\mu+\lambda, \mu-\lambda+2, 4\lambda+5)\,(1,1,0)=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}-\mu-\lambda+\mu-\lambda+2-16\lambda-20=0\\ \mu+\lambda+\mu-\lambda+2=0\end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{cases}-18\lambda-18=0\\2\mu+2=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\lambda=-1\\ \mu=-1\end{cases}$$

Para $\lambda=-1 \rightarrow P_0(1,2,3)$

Para $\mu=-1 \rightarrow Q_0(-1,4,4)$

Finalmente, $d(r,s)=d(P_0,Q_0)=\sqrt{(-1-1)^2+(4-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{4+4+1}=3$

c) Ecuación del plano π *que es paralelo y equidistante a las rectas r y s.*
La ecuación de este plano vamos a obtenerla de dos formas, análogamente a lo realizado en los apartados anteriores.
Primera forma.

Como $\pi // r \text{ y } s \rightarrow \overrightarrow{n_\pi}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=(4,-4,-2)$ *(del apartado b))*

Luego el plano π *paralelo a r y s tiene por ecuación:* $4x-4y-2z+D=0$ *y debe cumplir que* $d(\pi, r)=d(\pi, s)$

Como $\pi // r \rightarrow d(\pi,r)=d(\pi,P_r)=\dfrac{|4.0-4.3-2.(-1)+D|}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-10+D|}{6}$

$P_r(0,3,-1)$

Como $\pi // s \rightarrow d(\pi,s)=d(\pi,P_s)=\dfrac{|4.0-4.5-2.4+D|}{\sqrt{4^2+(-4)^2+(-2)^2}}=\dfrac{|-28+D|}{6}$

$P_s(0,5,4)$

Igualando las distancias $\dfrac{|-10+D|}{6}=\dfrac{|-28+D|}{6} \rightarrow |-10+D|=|-28+D| \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases}-10+D=-28+D \rightarrow -10=-28 \quad \textit{No tiene solución}\\ -10+D=-(-28+D) \rightarrow -10+D=28-D \rightarrow 2D=38 \rightarrow D=19\end{cases}$$

El plano $\boldsymbol{\pi}$ ***será:*** $\mathbf{4x-4y-2z+19=0}$

Segunda forma.

Considerando el proceso de resolución del apartado b), en la segunda forma, el plano π *pasará por el punto medio del segmento de extremos* P_0 *y* Q_0 *y sus vectores directores serán los de las rectas* r *y* s,

$$P_M = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{3+4}{2}\right) = \left(0, 3, \frac{7}{2}\right)$$

La ecuación del plano π *la obtenemos de la siguiente forma,*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-3 & z-\frac{7}{2} \\ -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$x\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - (y-3)\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \left(z-\frac{7}{2}\right)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$4x - (y-3)\,4 + \left(z-\frac{7}{2}\right)(-2) = 0$$

$$4x - 4y + 12 - 2z + 7 = 0$$

$$4x - 4y - 2z + 19 = 0$$

El plano $\boldsymbol{\pi}$ ***será:*** $\boldsymbol{4x - 4y - 2z + 19 = 0}$

PROBLEMA B.2. Sea r la recta de vector director (2, – 1 , 1) que pasa por el punto P = (0, 3, – 1). Se pide:

a) Hallar razonadamente la distancia del punto A = (0, 1, 0) a la recta r. *(4 puntos)*

b) Calcular razonadamente el ángulo que forma la recta que pasa por los puntos P y A con la recta r en el punto P. *(4 puntos)*

c) Si Q es el punto donde la recta r corta al plano de ecuación z = 0, comprobar que el triángulo de vértices APQ tiene ángulos iguales en los vértices P y Q. *(2 puntos)*

Solución:

De la recta r conocemos un punto y su vector director, es decir:

$$r:\begin{cases} P_r(0,3,-1) \\ \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \end{cases}$$

a) d (A , r) siendo A (0 , 1 , 0)

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

$$\overrightarrow{P_rA}=(0,1,0)-(0,3,-1)=(0,-2,1)$$

$$\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-\vec{i}+2\vec{j}+4\vec{k}=(-1,2,4)$$

$$\left|\overrightarrow{P_rA}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-1)^2+2^2+4^2}=\sqrt{21}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}=\sqrt{6}$$

$$d(A,r)=\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{21}{6}}=\sqrt{\frac{7}{2}}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u.\,l.$$

b)

$$\text{Ángulo entre}\begin{cases} r \;\rightarrow\; \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \\ s\begin{cases} P(0,3,-1) \\ A(0,1,0) \end{cases} \;\rightarrow\; \overrightarrow{v_s}=(0,3,-1)-(0,1,0)=(0,2,-1) \end{cases}$$

$$\text{siendo}\quad \alpha=\left(\widehat{r,s}\right)\;\rightarrow\;\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\left|\overrightarrow{v_s}\right|}=\frac{\left|(2,-1,1)\cdot(0,2,-1)\right|}{\sqrt{6}\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-2-1|}{\sqrt{6}\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{30}}\;\rightarrow\;\begin{cases}\alpha_1=56'7891^{\circ} \\ \alpha_2=303'2109^{\circ}\end{cases}$$

pero como α es el ángulo entre dos rectas (α ≤ 90º) entonces α = 56´7891º

c) Q = r ∩ { z = 0 }

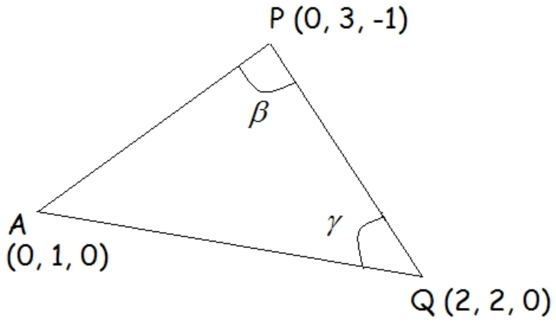
Obtengamos el punto Q,

$$r:\begin{cases} P_r(0,3,-1) \\ \overrightarrow{v_r}(2,-1,1) \end{cases}\;\rightarrow\; r:\begin{cases} x=2\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}\qquad \lambda\in\Re$$

La intersección de esta recta con el plano $z = 0$ la obtenemos resolviendo la ecuación:
$-1 + \lambda = 0 \;\rightarrow\; \lambda = 1$

Por lo tanto el punto de corte será: $\begin{cases} x = 2\,.\,1 = 2 \\ y = 3 - 1 = 2 \\ z = -1 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \quad Q(2, 2, 0)$

El triángulo APQ será,



Los ángulos que tenemos que comprobar que son iguales son:

$\beta = (\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PQ}})$ *y* $\gamma = (\widehat{\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QP}})$

Cálculo de β,

$\overrightarrow{PA} = (0,1,0) - (0,3,-1) = (0,-2,1)$

$\overrightarrow{PQ} = (2,2,0) - (0,3,-1) = (2,-1,1)$

$$\cos\beta = \frac{(0,-2,1)\,(2,-1,1)}{\sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2}\,\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{2+1}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Cálculo de γ,

$\overrightarrow{QA} = (0,1,0) - (2,2,0) = (-2,-1,0)$

$\overrightarrow{QP} = (0,3,-1) - (2,2,0) = (-2,1,-1)$

$$\cos\beta = \frac{(-2,-1,0)\,(-2,1,-1)}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2}\,\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{4-1}{\sqrt{5}\,\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{30}}$$

Como $\cos\beta = \cos\gamma$ y β y γ son ángulos de un triángulo (β y $\gamma < 180º$) entonces $\beta = \gamma$, que es lo que queríamos comprobar.

PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x+z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un punto y un vector director de cada recta. *(3 puntos)*
b) La posición relativa de las rectas r y s. *(4 puntos)*
c) Determinar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s. *(3 puntos)*

Solución:

a) Calculemos las ecuaciones paramétricas de las rectas resolviendo los sistemas que las definen,

$$r:\begin{cases} x \quad\;\; +z=2 \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, *resolvemos usando* x *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} x \quad\;\; =2-z \\ 2x-y=-z \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x *en la 2ª ecuación:*

$2(2-z)-y=-z;\quad 4-2z-y=-z;\quad -y=-4+2z-z;\quad -y=-4+z;\quad y=4-z$

luego $r:\begin{cases} x=2-\lambda \\ y=4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$ $\lambda\in\Re$ *y un punto y un vector director de la recta* r *serán:* $P_r=(2,4,0)$, $\vec{v}_r=(-1,-1,1)$

$$s:\begin{cases} 2x-y=3 \\ x-y-z=2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, *resolvemos usando* z *e* y *como incógnitas principales.*

$$\begin{cases} -y \quad\;\; =3-2x \\ -y-z=2-x \end{cases}$$

De la 1ª ecuación: $y=-3+2x$

Sustituyendo el valor de y *en la 2ª ecuación:*

$-(-3+2x)-z=2-x;\quad 3-2x-z=2-x;\quad -z=2-x-3+2x;\quad -z=-1+x;\quad z=1-x$

luego $r:\begin{cases} x=\mu \\ y=-3+2\mu \\ z=1-\mu \end{cases}$ $\mu\in\Re$ *y un punto y un vector director de la recta* s *serán:* $P_s=(0,-3,1)$, $\vec{v}_s=(1,2,-1)$

b) Estudiamos la posición relativa de las rectas r *y* s *a partir del sistema que se obtiene al igualar sus ecuaciones paramétricas,*

$$\begin{cases} 2-\lambda=\mu \\ 4-\lambda=-3+2\mu \\ \lambda=1-\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -\lambda-\mu=-2 \\ -\lambda-2\mu=-7 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda+\mu=2 \\ \lambda+2\mu=7 \\ \lambda+\mu=1 \end{cases}$$

La 1ª y la 3ª ecuaciones son incompatibles, por lo tanto r *y* s *son paralelas o se cruzan.*

Veamos si los vectores directores de las rectas son paralelos, *Estudiemos el rango de la matriz formada por los vectores directores:* $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A) \geq 1 \\ \\ \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad ran(A) = 2, \text{ los vectores no son paralelos.}$$

Por lo tanto, las rectas r *y* s *se cruzan.*

c) Buscamos un plano π / $r \subset \pi$ *y* $\pi // s$, *por lo tanto del plano* π *conocemos* $\begin{array}{l} P_r \in \pi \\ \vec{v}_r \text{ es director de } \pi \\ \vec{v}_s \text{ es director de } \pi \end{array}$

Por lo tanto, las ecuaciones del plano π *serán:*

Ecuación paramétrica: $\pi: \begin{cases} x = 2 - \lambda + \mu \\ y = 4 - \lambda + 2\mu \quad \lambda, \mu \in \Re \\ z = \quad \lambda - \mu \end{cases}$

Ecuación general: $\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-4)\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\,(-1) - (y-4)\,0 + z\,(-1) = 0$$

$$-x + 2 - z = 0; \quad x + z = 2$$

π: $x + z = 2$

PROBLEMA B.2. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=3 \end{cases} \qquad y \qquad s:\{x-1=y=z-3$$

Obtener **razonadamente**:

a) Un vector director de cada una de las rectas. *(2 puntos)*
b) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que pasa por el punto (0,1,3). *(3 puntos)*
c) El punto de intersección de las rectas r y s *(2 puntos)* y la ecuación del plano π que contiene a estas rectas *r y s (3 puntos).*

Solución:

a) La ecuación de la recta r es la paramétrica, luego $\vec{v_r}=(1,-1,0)$

La ecuación de la recta s es la continua, luego $\vec{v_s}=(1,1,1)$

b) ¿Plano $\pi/\pi\perp r$ *y* $(0,1,3)\in\pi$ *?*

Como $\pi\perp r \;\rightarrow\; \vec{n_\pi}=\vec{v_r}=(1,-1,0)$. *Por lo tanto la ecuación del plano π será:* $x-y+0\,.\,z+D=0$*; operando* $x-y+D=0$

Como $(0,1,3)\in\pi \;\rightarrow\; 0-1+D=0;\; D=1$

Finalmente, la ecuación del plano π es: $x-y+1=0$

c) Cálculo del punto $P=r\cap s$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta s: $\begin{cases} x=1+\mu \\ y=\mu \\ z=3+\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

El punto P lo obtenemos resolviendo el sistema $\begin{cases} \lambda=1+\mu \\ 1-\lambda=\mu \\ 3=3+\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-\mu=1 \\ \lambda+\mu=1, \\ \mu=0 \end{cases}$ *sustituyendo el valor de μ en la* 1^a *y en la* 2^a *ecuaciones:* $\begin{cases} \lambda=1 \\ \lambda=1 \end{cases}$. *Por lo que la solución del sistema es* $\lambda=1$ *y* $\mu=0$.

El punto P lo obtendremos sustituyendo el valor de λ en la ecuación de la recta r o el valor de μ en la ecuación de la recta s.

Sustituyendo el valor de $\lambda=1$ *en la recta r, obtenemos* $P=(1,0,3)$

Cálculo del plano π que contiene a r y s. El plano π contendrá al punto P y dos de sus vectores directores serán los de las rectas r y s. Por lo tanto la ecuación de π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; (x-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; (x-1)\,(-1)-y\,1+(z-3)\,2=0 \;\rightarrow$$

$$-x+1-y+2z-6=0 \;\rightarrow\; -x-y+2z-5=0 \;\rightarrow\; x+y-2z+5=0$$

Es decir, $\pi: x+y-2z+5=0$

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r_1:\begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=\alpha \\ z=2-\alpha \end{cases}$ y $r_2:\begin{cases} x=-1 \\ y=1+\beta \\ z=-1-2\beta \end{cases}$, siendo α y β parámetros reales.

Calcular **razonadamente**:

a) Las coordenadas del punto de corte de r_1 y r_2. *(3 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene esas dos rectas. *(4 puntos)*
c) La distancia del punto (0, 0, 1) a la recta r_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Punto de corte entre las rectas r_1 y r_2:

Hay que resolver el sistema: $\begin{cases} 1+2\alpha=-1 \\ \alpha=1+\beta \\ 2-\alpha=-1-2\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\alpha=-2 \\ \alpha-\beta=1 \\ -\alpha+2\beta=-3 \end{cases}$

De la primera ecuación: $\alpha = \dfrac{-2}{2} = -1$ *, sustituyendo en las otras dos ecuaciones:*

$$\begin{cases} -1-\beta=1 \rightarrow -1-1=\beta \rightarrow \beta=-2 \\ 1+2\beta=-3 \rightarrow 2\beta=-3-1 \rightarrow 2\beta=-4 \rightarrow \beta=-2 \end{cases}$$

Como hemos obtenido el mismo valor de β, el sistema tiene como solución: α = – 1 y β = – 2

Sustituyendo el valor de α en la recta r_1 o el valor de β en la recta r_2 obtendremos el punto de corte entre las dos rectas.

Para α = – 1, $\begin{cases} x=1+2(-1)=-1 \\ y=-1 \\ z=2-(-1)=3 \end{cases}$. ***El punto de corte entre r_1 y r_2 es P (– 1 , – 1 , 3)***

b) El plano que contiene a las dos rectas tiene como punto el obtenido anteriormente, P, y como vectores directores los de las rectas. Es decir,

Elementos del plano pedido: $\begin{cases} \text{Punto} \quad P(-1,-1,3) \\ \vec{v}_{r_1}=(2,1,-1) \\ \vec{v}_{r_2}=(0,1,-2) \end{cases}$ *, la ecuación general del plano la obtenemos mediante el siguiente cálculo:*

$$\begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z-3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-(y+1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x+1)(-2+1)-(y+1)(-4)+(z-3)\,2=0$$

$$(x+1)(-1)+4(y+1)+2(z-3)=0$$

$$-x-1+4y+4+2z-6=0$$

$$-x+4y+2z-3=0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano pedido es: $\boldsymbol{-x+4y+2z-3=0}$

c) Llamando $Q(0,0,1)$, debemos calcular $d(Q, r_2)$

Siendo P el punto de la recta r_2 obtenido en el apartado a) y $\vec{v}$ el vector director de la recta r_2 la distancia pedida podemos calcularla mediante la siguiente fórmula: $d(Q,r_2)=\dfrac{\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|}{\left|\vec{v}\right|}$, efectuemos los cálculos necesarios.

$$\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)-(-1,-1,3)=(1,1,-2)$$

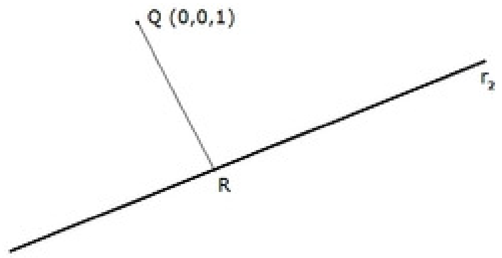
$$\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2\vec{j}+\vec{k}=(0,2,1)$$

$$\left|\overrightarrow{PQ}\times\vec{v}\right|=\left|(0,2,1)\right|=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}$$

$$\left|\vec{v}\right|=\left|(0,1,-2)\right|=\sqrt{0^2+1^2+(-2)^2}=\sqrt{5}$$

Finalmente, $d(Q,r_2)=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula, sería obtener un punto R de la recta r_2 de forma que el vector $\overrightarrow{QR}$ sea perpendicular a r_2, así $d(Q,r_2) = d(Q,R)$.



El punto R de la recta r_2 será $(-1, 1+\beta, -1-2\beta)$

$\overrightarrow{QR} = (-1, 1+\beta, -1-2\beta) - (0, 0, 1) = (-1, 1+\beta, -2-2\beta)$

$\overrightarrow{QR}\perp r_2 \;\rightarrow\; \overrightarrow{QR}\perp \overrightarrow{v_{r_2}}$, por lo que debe cumplirse:

$(-1, 1+\beta, -2-2\beta)\,.\,(0, 1, -2) = 0$

$1+\beta+4+4\beta = 0$

$5+5\beta = 0;\quad \beta = -1$

Por lo tanto $R(-1, 0, 1)$

y $d(Q,R) = \sqrt{(-1)^2+0^2+0^2} = 1$

Luego $d(Q,r_2) = 1$

PROBLEMA B.2. Se da la recta r de ecuación $r:\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases}$ y el plano π de ecuación $\pi: 2x+y+nz=p$, donde n y p son dos parámetros reales.

Obtener **razonadamente**:

a) Todos los valores de n para los que la intersección de la recta r y el plano π es un punto. *(4 puntos).*

b) El valor de n y el valor de p para los que la recta r está contenida en el plano π. *(3 puntos).*

c) El valor de n y todos los valores de p para los que la recta r no corta al plano π. *(3 puntos).*

Solución:

a) ¿n? / $r \cap \pi$ sea un punto.

Para que el corte entre la recta r y el plano π sea un punto, el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano debe tener solución única.

El sistema que debemos considerar es: $\begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \\ 2x+y+nz=p \end{cases}$ *, como es un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas para que tenga solución única debe cumplirse que* $|A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & n \end{vmatrix} = 5n-2+4+20+1+2n = 7n+23$$

$7n+23 \neq 0; \quad 7n \neq -23; \quad n \neq \dfrac{-23}{7}$

Luego, $r \cap \pi$ *es un punto para* $n \neq \dfrac{-23}{7}$

b) ¿n y p? / $r \subset \pi$

Para que esto ocurra, el corte entre r y π debe ser una línea recta (la r) y para ello el sistema anterior debe ser compatible indeterminado con rang(A) = rang(A´) = 2. (Siendo A la matriz de coeficientes del sistema anterior y A´ la matriz ampliada)

De lo estudiado en el apartado anterior, cuando $n = \dfrac{-23}{7} \rightarrow |A| = 0$ *y como el siguiente menor de orden 2 de A,*

$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5+2 = 7 \neq 0$, *podemos afirmar que para ese valor de n el rango de A es 2.*

Para que el rango de A´ sea 2, debe cumplirse que el menor de orden tres obtenido de A´ orlando al menor de orden 2 no nulo anterior la tercera fila y la cuarta columna sea nulo, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} = 0; \quad 5p+1-10+2p=0; \quad 7p-9=0; \quad p=\frac{9}{7}$$

Por lo que la recta r está contenida en el plano π cuando $n = \dfrac{-23}{7}$ *y* $p = \dfrac{9}{7}$.

c) Para que la recta r no corte al plano π, el sistema planteado en el apartado a) debe ser incompatible.

La matriz ampliada de aquel sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & n & p \end{array}\right)$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 5+2 = 7 \neq 0 \rightarrow rang(A) \geq 2$

Por lo tanto, para que el sistema sea incompatible debe ser $rang(A) = 2$ *y* $rang(A') = 3$.

De lo estudiado en el apartado anterior, $rang(A) = 2$ *cuando* $n = \frac{-23}{7}$.

Para que $rang(A') = 3$, *debe ser* $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & p \end{vmatrix} \neq 0$ *y según lo calculado en b) esto se cumple para* $p \neq \frac{9}{7}$.

Es decir, la recta r *no corta al plano* π *cuando* $n = \frac{-23}{7}$ *y* $p \neq \frac{9}{7}$.

OPCIÓN A

PROBLEMA A.2. Sean $O = (0,0,0)$, $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,0)$ y $C = (0,2,3)$. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

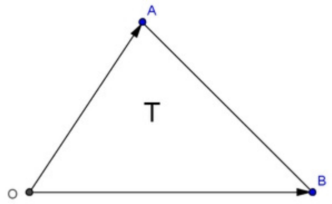
a) El área del triángulo de vértices O, A *y* B, *(3 puntos)* y el volumen del tetraedro de vértices *O, A, B y C* *(2 puntos).*

b) La distancia del vértice C al plano que contiene al triángulo *OAB*. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto C´ al plano que contiene al triángulo *OAB,* siendo C´ el punto medio del segmento de extremos O y C. *(2 puntos)*

Solución:

a) Área del triángulo OAB



El área de este triángulo es,

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right|$$

$$\overrightarrow{OA} = (1,0,1) \quad y \quad \overrightarrow{OB} = (2,1,0)$$

Calculemos el producto vectorial,

$$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} = (-1,2,1)$$

$$\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\right| = \left|(-1,2,1)\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Finalmente, $A_T = \frac{1}{2}\sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}\ u.a. \approx 1{,}2247\ u.a.$

Volumen del tetraedro OABC

Considerando los vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ *y* $\overrightarrow{OC}$, *sabemos que el valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores nos da el volumen del paralelepípedo definido por ellos. Como queremos calcular el volumen del tetraedro correspondiente, el cálculo será:*

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right]\right|$$

multiplicamos por $\frac{1}{3}$ *porque* $V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3}A_{base}\ h$

multiplicamos por $\frac{1}{2}$ *porque* $A_{\substack{base \\ Triángulo}} = \frac{1}{2}A_{\text{paralelogramo}}$

Por lo tanto,

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}\left|3+4\right| = \frac{7}{6}\ u.v.$$

b) Sea π *el plano que contiene al triángulo OAB, hay que calcular* $d(C, \pi)$.

Obtengamos la ecuación del plano π

De este plano conocemos: $\begin{cases} punto \quad (0,0,0) \\ vectores\ directores \begin{cases} \vec{u} = \overrightarrow{OA} = (1,0,1) \\ \vec{v} = \overrightarrow{OB} = (2,1,0) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π *se obtiene:*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x\,(-1) - y\,(-2) + z\,.\,1 = 0$$

$$-x + 2y + z = 0$$

Finalmente, $d(C\,,\pi) = \dfrac{|-0+2\,.\,2+3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \dfrac{7}{\sqrt{6}} = \dfrac{7\sqrt{6}}{6}$ *u.l.*

Otra forma de resolverlo.

Utilizando el resultado del apartado a)

$$V_{TETRAEDRO} = \frac{1}{3} A_b\, h \quad \begin{cases} A_b = \dfrac{\sqrt{6}}{2} & \text{obtenido en a)} \\ h = d(C\,,\pi) \end{cases}$$

Por lo tanto: $\dfrac{7}{6} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt{6}}{2}h \quad \rightarrow \quad \dfrac{7}{6} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}h \quad \rightarrow \quad 7 = \sqrt{6}\,h \quad \rightarrow \quad h = \dfrac{7}{\sqrt{6}} \quad \rightarrow \quad d(C\,,\pi) = \dfrac{7}{\sqrt{6}}$ *u.l.*

c) Hay que calcular $d\,(\,C'\,,\pi\,)$

C´ es el punto medio del segmento OC, por lo que $C' = \left(\dfrac{0+0}{2}, \dfrac{0+2}{2}, \dfrac{0+3}{2}\right) = \left(0,\,1,\,\dfrac{3}{2}\right)$

Como el plano π *ya lo calculamos en el apartado anterior,*

$$d(C'\,,\pi) = \frac{\left|-0+2\,.\,1+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{6}} = \frac{7}{2\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{12} \text{ u.l.}$$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Dados los puntos $A = (1, 0, 1)$, $B = (2, -1, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ y $P = (0, -3, 2)$ se pide calcular **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La distancia del punto P al A. *(2 puntos)*
b) La distancia del punto P a la recta que pasa por los puntos A y B. *(4 puntos)*
c) La distancia del punto P al plano que pasa por los puntos A, B y C. *(4 puntos)*

Solución:

a) $d(P, A) = \sqrt{(0-1)^2 + (-3-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+9+1} = \sqrt{11}$

Respuesta: $d(P, A) = \sqrt{11}$

b) Hay que calcular d(P , r), siendo r la recta que pasa por A y B.

Obtengamos la ecuación de la recta $r \begin{cases} punto \quad A(1,0,1) \\ \vec{v_r} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,0) - (1,0,1) = (1,-1,-1) \end{cases} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Para calcular d(P, r) procedemos de la siguiente forma,

Obtenemos el plano que pasa por el punto P y es perpendicular a r, plano π

Obtenemos el punto de corte entre el plano π *y la recta r, punto Q*

Y finalmente, d(P , r) = d(P , Q)

Plano π

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{v_r} \perp \pi \rightarrow \pi : x - y - z + D = 0$

Como $P \in \pi \rightarrow 0 - (-3) - 2 + D = 0 \rightarrow 3 - 2 + D = 0 \rightarrow D = -1$

La ecuación del plano π *es* $x - y - z - 1 = 0$

Punto Q

$$1 + \lambda - (-\lambda) - (1 - \lambda) - 1 = 0$$
$$1 + \lambda + \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0$$
$$3\lambda - 1 = 0$$
$$3\lambda = 1$$
$$\lambda = \frac{1}{3} \quad \rightarrow Q = \left(1 + \frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, 1 - \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$d(P, r) = d(P, Q) = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(-3 - \frac{-1}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-8}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{64}{9} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

Respuesta: $d(P, r) = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

Otra forma de obtener esta distancia es mediante la fórmula: $d(P,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{v_r}\right|}{\left|\vec{v_r}\right|} \quad , \quad A \in r$

c) Obtengamos la ecuación del plano que pasa por los puntos A, B y C.

$$\pi : \begin{cases} \text{punto } A \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC} = (-1,1,0) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π *será,*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \,.\, 1 - y(-1) + (z-1) \,.\, 0 = 0$$

$$x - 1 + y = 0 \rightarrow x + y - 1 = 0$$

Por lo que, $d(P, \pi) = \dfrac{|0-3-1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$

Respuesta: $d(P, \pi) = 2\sqrt{2}$

PROBLEMA A.2. Se dan el punto $A = (-1, 0, 2)$ y las rectas $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{3} = z-2$ y $s: \begin{cases} x = -1-2\lambda \\ y = 1+3\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases}$

Obtener **<u>razonadamente</u>, <u>escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado</u>**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto A y contiene a la recta r. *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano σ que pasa por el punto A y es perpendicular a la recta s. *(3 puntos)*

c) Un vector dirección de la recta l intersección de los planos π y σ *(2 puntos)* y la distancia entre las rectas s y l. *(2 puntos)*

Solución:

a) Hay que obtener el plano $\pi \,/\, A \in \pi$ y $r \subset \pi$.

Para obtener la ecuación del plano π necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

De la recta r conocemos: $\begin{cases} \text{punto} & P_r = (1,0,2) \\ \text{vector} & \vec{v}_r = (2,3,1) \end{cases}$

Ahora obtenemos el vector $\overrightarrow{AP_r} = (2,0,0)$. *Como* $\overrightarrow{AP_r}$ *no es paralelo a* $\vec{v}_r$, $\left(\dfrac{2}{2} \neq \dfrac{0}{3} \neq \dfrac{0}{1}\right)$, $\overrightarrow{AP_r}$ *es otro vector director del plano* π.

Elementos del plano pedido: $\begin{cases} \text{Punto} \quad A(-1,0,2) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \vec{v}_r = (2,3,1) \\ \overrightarrow{AP_r} = (2,0,0) \end{cases} \end{cases}$, *la ecuación general del plano π la obtenemos mediante el siguiente cálculo:*

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; \begin{vmatrix} x+1 & y & z-2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante por la tercera fila:

$$2\begin{vmatrix} y & z-2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \;\rightarrow\; 2\big(y-3(z-2)\big) = 0 \;\rightarrow\; \big(y-3(z-2)\big) = 0 \;\rightarrow\; y-3z+6=0$$

Por lo tanto, la ecuación general del plano π es: $\mathbf{y - 3z + 6 = 0}$

b) Hay que obtener el plano $\sigma \,/\, A \in \sigma$ y $s \perp \sigma$.

Como $s \perp \sigma$, *el vector director del la recta s es perpendicular al plano σ.* $\vec{v}_s = (-2,3,1)$, *por lo tanto la ecuación del plano σ será:* $-2x + 3y + z + D = 0$

Como $A \in \sigma \;\rightarrow\; -2(-1) + 3 \cdot 0 + 2 + D = 0;\;\; 2 + 2 + D = 0;\;\; 4 + D = 0;\;\; D = -4$

Por lo tanto, la ecuación general del plano σ es: $\mathbf{-2x + 3y + z - 4 = 0}$

c) <u>Obtener un vector director de la recta l</u>.

Como la recta l es la intersección de los planos π y σ entonces $l: \begin{cases} y-3z+6=0 \\ -2x+3y+z-4=0 \end{cases}$ *por lo tanto un vector director de l lo obtenemos mediante el siguiente cálculo,*

$$\vec{v_l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 1 & -3\\ -2 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & -3\\ -2 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=10\,\vec{i}-6\,\vec{j}+2\,\vec{k}=(10,6,2)\cong(5,3,1)$$

Por lo tanto $\vec{v_l}=(5,3,1)$

<u>*Obtener la distancia entre las rectas s y l.*</u>

Veamos si las rectas son paralelas, $\vec{v_l}=(5,3,1)$ *y* $\vec{v_s}=(-2,3,1)$, $\frac{5}{-2}\neq\frac{3}{3}=\frac{1}{1}$, *luego las rectas no son paralelas.*

Podemos calcular d (s , l) mediante la fórmula correspondiente: $d(s,l)=\dfrac{\left|\left[\vec{v_s},\vec{v_l},\overrightarrow{P_sP_l}\right]\right|}{\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|}$

Calculemos cada uno de los términos de la fórmula anterior.

Obtengamos P_l*, punto de la recta* $l:\begin{cases}y-3z+6=0\\ -2x+3y+z-4=0\end{cases}$ *que era la intersección de los planos* π *y* σ *y por definición de estos dos planos el punto A está en los dos, luego* $P_l = A = (-1, 0, 2)$.

$\overrightarrow{P_sP_l}=(-1,0,2)-(-1,1,1)=(0,-1,1)$

$$\left[\vec{v_s},\vec{v_l},\overrightarrow{P_sP_l}\right]=\begin{vmatrix}-2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{vmatrix}=-6-5-2-15=-28$$

$$\vec{v_s}\times\vec{v_l}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 3 & 1\\ 5 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 5 & 1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 5 & 3\end{vmatrix}=7\,\vec{j}-21\,\vec{k}=(0,7,-21)$$

$$\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|=\left|(0,7,-21)\right|=\sqrt{0^2+7^2+(-21)^2}=\sqrt{490}=7\sqrt{10}$$

$$Y\quad d(s,l)=\frac{\left|\left[\vec{v_s},\vec{v_l},\overrightarrow{P_sP_l}\right]\right|}{\left|\vec{v_s}\times\vec{v_l}\right|}=\frac{|-28|}{7\sqrt{10}}=\frac{28}{7\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{\sqrt{10}\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{10}=\frac{2\sqrt{10}}{5}\approx 1'2649\ u.l.$$

Otra forma de obtener esta distancia, si no nos acordásemos de la fórmula anterior, sería obtener un plano τ *que contiene a la recta s y es paralelo a la recta l. De esta forma* $d(s,l)=d(P_l,\tau)$

Calculemos la ecuación del plano $\tau:\ s\subset\tau\ \ y\ \ l\,//\,\tau\ \rightarrow\ \overrightarrow{n_\tau}=\vec{v_s}\times\vec{v_l}$, *que hemos calculado anteriormente,* $\overrightarrow{n_\tau}=(0,7,-21)\approx(0,1,-3)$

Luego $\tau: y-3z+D=0$*. Como la recta s está en el plano* τ, $P_s(-1,1,1)$ *es de* τ *por lo que:* $1-3\cdot 1+D=0;\ 1-3+D=0;\ -2+D=0;\ D=2$*. Luego* $\tau: y-3z+2=0$.

$$d(s,l)=d(P_l,\tau)=\left.\begin{cases}P_l=(-1,0,2)\\ \tau: y-3z+2=0\end{cases}\right\}=\frac{|0-3.2+2|}{\sqrt{0^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{|-4|}{\sqrt{10}}=\frac{4}{\sqrt{10}}\approx 1'2649\ u.l.$$

Por lo tanto, $\boldsymbol{d(s,l)=\frac{2\sqrt{10}}{5}}\ u.l.\approx\boldsymbol{1'2649\ u.l.}$

OPCIÓN B

PROBLEMA B.2. Se da el triángulo T, cuyos vértices son $A = (1, 2, -2)$, $B = (0, -3, 1)$ y $C = (-1, 0, 0)$,

y los planos $\pi_1: x + y + z + 1 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -\alpha + \beta + 1 \\ y = \alpha - 2\beta \\ z = \alpha + \beta \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \Re$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T. *(4 puntos)*

b) Un vector $\vec{n_1}$ perpendicular al plano π_1 y un vector $\vec{n_2}$ perpendicular al plano π_2 *(1,5 puntos)* y el coseno del ángulo formado por los vectores $\vec{n_1}$ y $\vec{n_2}$. *(1,5 puntos)*

c) Las ecuaciones paramétricas de la recta intersección del los planos π_1 y π_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Posición relativa del plano π_1 y del plano que contiene al triángulo T, lo llamaremos π_3.

De π_3 conocemos: $\begin{cases} \text{punto} \quad C = (-1,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{AC} = (-2,-2,2) \\ \overrightarrow{BC} = (-1,3,-1) \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π_3 se obtiene:

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & y-0 & z-0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y & z \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1)(-4) - y \cdot 4 + z(-8) = 0$$

$$-4x - 4 - 4y - 8z = 0$$
$$4x + 4y + 8z + 4 = 0$$
$$x + y + 2z + 1 = 0$$

Estudiemos la posición relativa de los planos π_1 y π_3, para ello estudiamos el sistema formado por sus dos ecuaciones:

$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ x + y + 2z = -1 \end{cases}$, *de este sistema su matriz ampliada es* $M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$

La matriz de coeficientes, M, es 2 x 3, su máximo rango será 2. M´ es 2 x 4, su máximo rango será 2.
Estudiemos el rango de M:

$|1| = 1 \neq 0 \rightarrow ran(M) \geq 1$

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \rightarrow ran(M) = 2$

Y, como el máximo rango de M´ es 2, ran (M´) = 2

Luego ran (M) = ran (M´) = 2 < nº de incógnitas = 3 entonces ***los dos planos se cortan en una recta****.*

b) $\pi_1 : x+y+z+1=0 \quad \rightarrow \quad \vec{n_1} = (1,1,1)$.

Para obtener el vector $\vec{n_2}$ / $\vec{n_2} \perp \pi_2$, *obtengamos la ecuación general del plano* π_2 *(además, la necesitaremos en el apartado c))*

$$\text{Del plano } \pi_2 \text{ conocemos: } \begin{cases} \text{punto} \quad (1,0,0) \\ \text{vectores directores} \begin{cases} \overrightarrow{u_2} = (-1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2} = (1,-2,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π_2 *se obtiene:*

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-1).3 - y(-2) + z.1 = 0$$

$$3x-3+2y+z=0 \quad \rightarrow \quad \pi_2 : 3x+2y+z-3=0 \quad \rightarrow \quad \vec{n_2} = (3,2,1)$$

Por lo tanto, $\boxed{\vec{n_1} = (1,1,1) \quad y \quad \vec{n_2} = (3,2,1)}$

Calculemos el coseno del ángulo que forman los vectores anteriores:

$$\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\,\sqrt{3^2+2^2+1^2}} = \frac{3+2+1}{\sqrt{3}\,\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6\sqrt{42}}{42} = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0'9258$$

Por lo tanto, $\boxed{\cos\left(\vec{n_1}, \vec{n_2}\right) = \frac{\sqrt{42}}{7} \approx 0'9258}$

c) Llamamos $r : \pi_1 \cap \pi_2$

Luego $r : \begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 3x+2y+z-3=0 \end{cases}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2-3 = -1 \neq 0$, *el sistema a resolver es:* $\begin{cases} x+y=-1-z \\ 3x+2y=3-z \end{cases}$. *Podemos resolverlo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1-z & 1 \\ 3-z & 2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2-2z-3+z}{-1} = \frac{-5-z}{-1} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 3 & 3-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{3-z+3+3z}{-1} = \frac{6+2z}{-1} = -6-2z$$

Las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = -6-2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

PROBLEMA A.2. Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que pasa por el punto $P(2, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ *(3 puntos)*

b) Las coordenadas del punto Q situado en la intersección de la recta r y del plano π. *(2 puntos)*

c) La distancia del punto P a la recta r *(3 puntos)* y **justificar razonadamente** que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$. *(2 puntos)*

Solución:

a) *¿plano π? / $P \in \pi$ y $\pi \perp r$*

Como $\pi \perp r$ un vector normal del plano π es un vector director de la recta r.

Obtengamos un vector director de r. Pasemos a paramétricas la ecuación de la recta r,

$$r: \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P_r(0,0,0) \\ \vec{v_r}(-2,1,0) \end{cases}$$

Por tanto del plano π conocemos $\begin{cases} punto \quad P(2,0,1) \\ \vec{n_\pi}(-2,1,0) \end{cases}$

La ecuación del plano π será: $-2x + y + 0 \,.\, z + D = 0 \rightarrow -2x + y + D = 0$

Determinamos el valor de D con la condición de que el punto P es del plano,

$-2 \,.\, 2 + 0 + D = 0 \rightarrow -4 + D = 0 \rightarrow D = 4$

Finalmente, $\boldsymbol{\pi : -2x + y + 4 = 0}$ ***o*** $\boldsymbol{\pi : 2x - y - 4 = 0}$

b) *¿Punto Q? / $Q = r \cap \pi$*

Para obtener el punto Q resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de la recta r y el plano π,

$\begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \\ -2x+y+4=0 \end{cases}$ *este sistema nos da el valor de z (z = 0); obtendremos los valores de x e y resolviendo el sistema formado por la 1ª y 3ª ecuaciones.*

$\begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ -2x+y=-4 \end{cases}$ *despejando x de la 1ª ecuación:* $x = -2y$

y sustituyendo en la 2ª: $-2(-2y) + y = -4 \rightarrow 4y + y = -4 \rightarrow 5y = -4 \rightarrow y = \frac{-4}{5}$

luego, $x = -2\left(\frac{-4}{5}\right) = \frac{8}{5}$

Finalmente, $Q\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$

c) ¿ d (P, r)?

Los cálculos realizados en los apartados anteriores, plano π (que es perpendicular a r por P) y punto Q (corte entre r y π) son los que corresponden para calcular d (P , r) = d (P, Q). Por tanto

$$d(P,r)=d(P,Q\ )=\sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2+\left(0-\frac{-4}{5}\right)^2+(1-0)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2+1}=\sqrt{\frac{4}{25}+\frac{16}{25}+1}=\sqrt{\frac{45}{25}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u.l.$$

También podemos calcular la distancia pedida por la fórmula correspondiente,

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}\qquad \left.\begin{array}{l}P(2,0,1)\\ P_r(0,0,0)\in r\end{array}\right\}\ \rightarrow\ \overrightarrow{P_rP}(2,0,1)\ \ y\ \ \overrightarrow{v_r}(-2,1-0)\{obtenido\ en\ a)\}$$

$$\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\ 2&0&1\\ -2&1&0\end{vmatrix}=2\vec{k}-2\vec{j}-\vec{i}=(-1,-2,2)$$

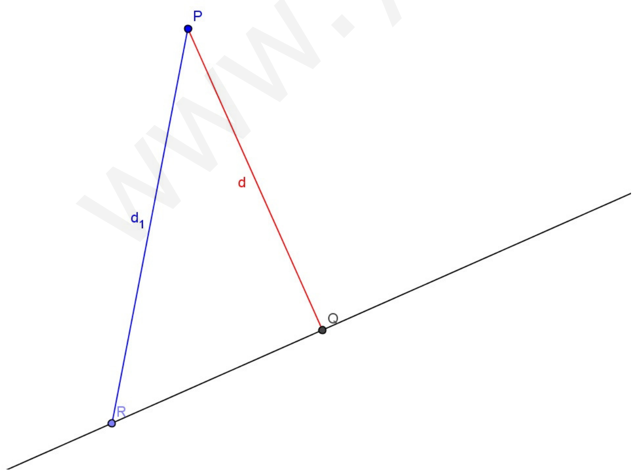
$$\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}=3$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2+(0)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$$

$$Luego,\ d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{P_rP}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{5}\ u.l.$$

La justificación de que la distancia del punto P a un punto cualquiera de la recta r es mayor o igual que $\frac{3\sqrt{5}}{5}$, viene de la definición de distancia de punto a recta como la menor de las distancias del punto a cualquier otro de la recta.

Otra justificación. Gráficamente la distancia del punto P a la recta r se mide en perpendicular,



La distancia de P a cualquier punto de la recta r (distinto de Q), como se observa en el gráfico, sería la hipotenusa del triángulo rectángulo PQR; por tanto d_1 (hipotenusa) > d (cateto). Es decir, d (P, R) > d (P, Q) = d (P, r)

Luego, $d(P,R)\geq\frac{3\sqrt{5}}{5}$ *c.q.c*

Una última forma de justificación sería estudiar la monotonía de la función d (P, R) siendo R un punto cualquiera de la recta r.

Según obtuvimos en el apartado a), de la ecuación paramétrica de r se deduce que cualquier punto de la recta r será: (– 2 λ , λ , 0) y como P (2, 0, 1),

$$d(P,R)=\sqrt{(2+2\lambda)^2+(0-\lambda)^2+(1-0)^2}=\sqrt{4+8\lambda+4\lambda^2+\lambda^2+1}=\sqrt{5+8\lambda+5\lambda^2}$$

Por cálculo el radicando es una suma de términos al cuadrado, luego para cualquier valor de λ este radicando es positivo. Podemos estudiar la monotonía de d (P, R) estudiando la monotonía del radicando, es decir,

$$y = 5 + 8\lambda + 5\lambda^2$$
$$y' = 8 + 10\lambda$$
$$8 + 10\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad 10\lambda = -8 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-8}{10} = \frac{-4}{5}$$

Como 8 + 10 λ es, gráficamente, una recta de pendiente positiva, a la izquierda de $\frac{-4}{5}$ *es negativa y a la derecha positiva. Por tanto para* $\lambda = \frac{-8}{5}$ *hay un mínimo relativo, que por lo dicho anteriormente es el absoluto de d (P , R).*

$$\text{Para } \lambda = \frac{-8}{5}, \quad \begin{cases} x = -2\dfrac{-4}{5} = \dfrac{16}{5} \\ y = \dfrac{-4}{5} \\ z = 0 \end{cases} \quad \rightarrow \quad R\left(\frac{8}{5}, \frac{-4}{5}, 0\right)$$

La mínima distancia es:

$$d\,(P,R) = \sqrt{\left(2-\frac{8}{5}\right)^2 + \left(0-\frac{-4}{5}\right)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + 1} = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25} + 1} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Por tanto, para cualquier punto de la recta r $d(P,R) \geq \frac{3\sqrt{5}}{5}$ *c.q.c.*

PROBLEMA B.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+2=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) El plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r. *(3 puntos)*

b) La recta t que pasa por el punto (0, 0, 0), sabiendo que un vector director de t es perpendicular a un vector director de r y también es perpendicular a un vector director de s. *(3 puntos)*

c) **Averiguar razonadamente** si existe o no un plano perpendicular a s que contenga a la recta r. *(4 puntos)*

Solución:

a) *¿Plano paralelo a s que contiene a r?*

$\pi \,//\, s \rightarrow \vec{v_s}$ *será director de* π

$r \subset \pi \rightarrow P_r \in \pi$ y $\vec{v_r}$ *será director de* π

Obtengamos los elementos de r y s necesarios. Nos interesa obtener las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$r:\begin{cases} x-y \quad = -3 \\ 2x \quad -z = -2 \end{cases}$ *como* $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, *despejamos x e y en función de z.*

$$\begin{cases} x-y = -3 \\ 2x = -2+z \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -2+z & 0 \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-2+z}{2} = -1+\dfrac{z}{2} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2+z \end{vmatrix}}{2} = \dfrac{-2+z+6}{2} = \dfrac{4+z}{2} = 2+\dfrac{z}{2} \end{matrix} \rightarrow r:\begin{cases} x = -1+\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = 2+\dfrac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Por tanto: $r:\begin{cases} P_r(-1,2,0) \\ \vec{v_r}\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},1\right) \approx (1,1,2) \end{cases}$

$$s:\begin{cases} 3y+1=0 \\ x-2z-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3y=-1 \\ x=3+2z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{-1}{3} \\ x=3+2z \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x=3+2\mu \\ y=\dfrac{-1}{3} \\ z=\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$$

Por tanto: $s:\begin{cases} P_s\left(3\,,\,\dfrac{-1}{3}\,,\,0\right) \\ \vec{v_s}(2\,,\,0\,,\,1) \end{cases}$

Luego, del plano π *conocemos: punto* $P_r(-1,2,0)$ *y vectores directores* $\begin{matrix} \vec{v_r}(1,1,2) \\ \vec{v_s}(2,0,1) \end{matrix}$

La ecuación del plano π será: $\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$x + 1 + 4\,(\,y - 2\,) - 2\,z - (\,y - 2\,) = 0$$
$$x + 1 + 4\,y - 8 - 2\,z - y + 2 = 0$$
$$x + 3\,y - 2\,z - 5 = 0$$

***Solución:* π: $x + 3\,y - 2\,z - 5 = 0$**

b) ¿recta t? / $(\,0\,,0\,,0\,) \in t$ y $\vec{v}_t \perp \left(\vec{v}_r \;\; y \;\; \vec{v}_s\right)$

$\vec{v}_t \perp \left(\vec{v}_r \;\; y \;\; \vec{v}_s\right)$, por lo tanto $\vec{v}_t = \vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\,\vec{j} - 2\,\vec{k} - \vec{j} = \vec{i} + 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k} = (1,3,-2)$

Y la ecuación paramétrica de la recta t será: $t: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + 3\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow \; t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -2\lambda \end{cases}$

Solución: $t: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -2\lambda \end{cases}$

c) ¿Existe un plano π / $s \perp \pi$ y $r \subset \pi$?

Como $s \perp \pi \;\rightarrow\; \vec{n}_\pi = \vec{v}_s = (2,0,1)$ $\left[\vec{n}_\pi \text{ vector perpendicular al plano } \pi\right]$

Como $r \subset \pi \;\rightarrow\; \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$

Veamos si esto último es cierto,

$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = (1,1,2)\cdot(2,0,1) = 2 + 0 + 2 = 4 \neq 0$, por tanto estos vectores no son perpendiculares.

En conclusión, **el plano π pedido no existe.**

PROBLEMA A.2. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x-2y+z+3=0 \\ 3x+y-z+1=0 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x=1 \\ y=2\alpha \\ z=\alpha-2 \end{cases}$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta paralela a r que pasa por el punto (0,1,0). *(3 puntos)*

b) El plano π que contiene a la recta r y es paralelo a s. *(3 puntos)*

c) La distancia entre las rectas r y s. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta t? / $t \parallel r$ y $(0,1,0) \in t$

Obtengamos la ecuación paramétrica de r.

En la recta r, $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1+6 = 7 \neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r:\begin{cases} x-2y=-z-3 \\ 3x+y=z-1 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z-3 & -2 \\ z-1 & 1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{-z-3+2z-2}{7} = \frac{-5+z}{7} = \frac{-5}{7} + \frac{z}{7}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z-3 \\ 3 & z-1 \end{vmatrix}}{7} = \frac{z-1+3z+9}{7} = \frac{8+4z}{7} = \frac{8}{7} + \frac{4z}{7}$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} x = \frac{-5}{7} + \frac{\lambda}{7} \\ y = \frac{8}{7} + \frac{4\lambda}{7} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} P_r\left(\frac{-5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right) \\ \vec{v}_r\left(\frac{1}{7}, \frac{4}{7}, 1\right) \approx (1,4,7) \end{cases}$$

De la recta t hemos obtenido $\begin{cases} punto \quad (0,1,0) \\ como\ t \parallel r \rightarrow \vec{v}_t \parallel \vec{v}_r \quad \rightarrow \quad \vec{v}_t = (1,4,7) \end{cases}$ *por lo que* ***la ecuación paramétrica de la recta t será:*** $\begin{cases} x = \mu \\ y = 1+4\mu \\ z = 7\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$

b) ¿Plano π? / $r \subset \pi$ y $\pi \parallel s$

Como $r \subset \pi$ $\rightarrow$ $P_r\left(\frac{-5}{7}, \frac{8}{7}, 0\right) \in \pi$ y $\vec{v}_r$ es vector director de π.

Como $\pi \parallel s$ $\rightarrow$ $\vec{v}_s$ es vector director de π.

La ecuación general del plano π la obtenemos: $\begin{vmatrix} x+\frac{5}{7} & y-\frac{8}{7} & z \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\left(x+\frac{5}{7}\right)4+2z-14\left(x+\frac{5}{7}\right)-\left(y-\frac{8}{7}\right)=0$$

$$-10\left(x+\frac{5}{7}\right)+2z-\left(y-\frac{8}{7}\right)=0$$

$$-10x-\frac{50}{7}+2z-y+\frac{8}{7}=0$$

$$-10x-y+2z-6=0$$

$$10x+y-2z+6=0$$

Solución: **π: 10 x + y – 2 z + 6 = 0**

c) ¿d(r,s)?

Estudiemos la posición relativa entre las rectas r y s.

Debemos estudiar el rango de la matriz $\begin{pmatrix} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{pmatrix}$. $\left.\begin{array}{l} \vec{v_r}(1,4,7) \\ \vec{v_s}(0,2,1) \\ P_r\left(\frac{-5}{7},\frac{8}{7},0\right) \\ P_s(1,0,-2) \end{array}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rP_s}\left(\frac{12}{7},\frac{-8}{7},-2\right)$

Rango de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} |1| = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rango \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rango \geq 2 \\ \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \\ \frac{12}{7} & \frac{-8}{7} & -2 \end{vmatrix} = -4+\frac{48}{7}-24+\frac{8}{7} = -20 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rango = 3 \end{cases}$

Por tanto las rectas r y s se cruzan y $d(r,s)=\dfrac{\left|\left[\vec{v_r}\ \vec{v_s}\ \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r}\times\vec{v_s}\right|}$

$$\left[\vec{v_r}\ \vec{v_s}\ \overrightarrow{P_rP_s}\right] = \{lo\ hemos\ obtenido\ en\ el\ cálculo\ del\ rango\} = -20$$

$$\vec{v_r}\times\vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i}+2\vec{k}-14\vec{i}-\vec{j} = -10\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k} = (-10,-1,2)$$

$$\left|\vec{v_r}\times\vec{v_s}\right| = \sqrt{(-10)^2+(-1)^2+2^2} = \sqrt{105}$$

Finalmente, $d(r,s)=\dfrac{|-20|}{\sqrt{105}}=\dfrac{20}{\sqrt{105}}$

Otra forma de obtener $d(r,s)$ es la siguiente:

El plano π del apartado anterior contiene a la recta r y es paralelo a la recta s $\rightarrow$ $d(r,s) = d(s,\pi)$ y como la recta s es paralela al plano π $\rightarrow$ $d(s,\pi) = d(P_s,\pi)$.

P_s es un punto de la recta s, por ejemplo, $P_s(1,0,-2)$

y el plano π: $10x + y - 2z + 6 = 0$

Luego, $d(r,s) = d(P_s,\pi) = \dfrac{|10.1 + 0 - 2(-2) + 6|}{\sqrt{10^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \dfrac{|10 + 4 + 6|}{\sqrt{105}} = \dfrac{20}{\sqrt{105}}$

PROBLEMA B.2. Se da el plano π: $6x + 3y + 2z - 12 = 0$ y los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$ y $C(0,0,3)$.

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación implícita del plano σ que pasa por los puntos *A, B y C,* *(2 puntos)* y la posición relativa de los planos σ y π. *(2 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices *A, B y C*. *(3 puntos)*

c) Un punto P del plano π y el volumen del tetraedro cuyos vértices son *P, A, B y C*. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿plano σ que pasa por los puntos A(1,0,0), B(0,2,0) y C(0,0,3)?

$$\text{Del plano } \sigma \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(1,0,0) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(-1,2,0) \\ \overrightarrow{AC}(-1,0,3) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano σ será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6(x-1) + 2z + 3y = 0 \rightarrow 6x - 6 + 2z + 3y = 0 \rightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\sigma: 6x + 3y + 2z - 6 = 0}$

Posición relativa de σ y π:

Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los dos planos,

$$\begin{cases} 6x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ 6x + 3y + 2z - 12 = 0 \end{cases} \qquad \text{Como } \frac{6}{6} = \frac{3}{3} = \frac{2}{2} \neq \frac{-6}{-12},$$ ***los planos σ y π son paralelos.***

b) ¿Área del triángulo de vértices A, B y C?

El área del triángulo de vértices A, B y C la calculamos mediante la fórmula:

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 2\vec{k} + 3\vec{j} - = (6,3,2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{6^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{36 + 9 + 4} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}7 = \frac{7}{2} \text{ u.a.}$$

Solución: el área del triángulo de vértices A, B y C es 7/2 u.a.

c) ¿ P ? / $P \in \pi$

Un punto P del plano π lo obtenemos a partir de la ecuación implícita del plano dando valores a, por ejemplo, x e y y obteniendo el valor de z.

Para $x = 0,\ y = 0 \rightarrow 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2z - 12 = 0 \rightarrow 2z = 12 \rightarrow z = 6 \rightarrow$ $\boldsymbol{P(0, 0, 6)}$

El volumen del tetraedro de vértices P, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}\ \ \overrightarrow{BP}\ \ \overrightarrow{CP}\right]\right|$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AP} = (-1,0,6)\\ \overrightarrow{BP} = (0,-2,6)\\ \overrightarrow{CP} = (0,0,3)\end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP}\ \ \overrightarrow{BP}\ \ \overrightarrow{CP}\right]\right| = \frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-1 & 0 & 6\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 0 & 3\end{vmatrix}\right| = \frac{1}{6}|6| = \frac{1}{6}6 = 1\ u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano σ, y la altura la obtenemos sabiendo que $P \in \pi$ y que los planos σ y π son paralelos.

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3}\,\acute{A}rea\_base\,.\,h = \frac{1}{3}\,A_{tri\acute{a}gulo\ A,B,C}\ d(P,\sigma) \overset{*}{=}$$

$$A_{tri\acute{a}gulo\ A,B,C} = \frac{7}{2} \quad (del\ apartado\ anterior)$$

$$d(P,\sigma) = \frac{|6\,.\,0 + 3\,.\,0 + 2\,.\,6 - 6|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}} = \frac{6}{7}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\,\frac{7}{2}\,\frac{6}{7} = \frac{42}{42} = 1\ u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es 1 u^3.

PROBLEMA A.2. Se dan el punto P = (1 , 1 , 1), la recta $r:\begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y-z-1=0 \end{cases}$ y el plano π: x + y + z = 1 Obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado,** las ecuaciones de:

a) El plano que contiene al punto P y a la recta a *r*. *(2 puntos)*

b) La recta *s* que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π , la distancia del punto P al plano π y el punto de intersección de la recta *s* con el plano π. *(2+2+2 puntos)*

c) El plano σ que contiene a la recta *r* y es perpendicular al plano *π*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano σ*? /* $P \in \sigma$ *y* $r \subset \sigma$

Obtengamos la ecuación paramétrica de r (para tener punto y vector director de r).

En la recta r, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-1 = 1 \neq 0$

Por tanto resolvemos el sistema: $r:\begin{cases} x+y=-1+z \\ x+2y=1+z \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1+z & 1 \\ 1+z & 2 \end{vmatrix}}{1} = \frac{-2+2z-1-z}{1} = -3+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1+z \\ 1 & 1+z \end{vmatrix}}{1} = 1+z+1-z = 2$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=2 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad r:\begin{cases} P_r(-3,2,0) \\ \vec{v}_r(1,0,1) \end{cases}$$

El punto P (1 , 1 , 1) $\notin$ *r (segunda coordenada* $\neq 2$*), luego podemos construir el plano pedido.*

$$\sigma:\begin{cases} \text{punto} \quad P(1,1,1) \\ \text{vectores directores}:\begin{cases} \vec{v}_r(1,0,1) \\ \vec{PP_r}(4,-1,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación general del plano σ *la obtenemos:* $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,.\,1-(y-1)\,.\,(-3)+(z-1)\,.\,(-1)=0$$

$$x-1+3y-3-z+1=0$$

$$x+3y-z-3=0$$

Solución: $\boldsymbol{\sigma: x+3y-z-3=0}$

b)

b_1) ¿recta s? / $P \in s$ y $s \perp \pi$

$$s:\begin{cases} punto \quad P(1,1,1) \\ vector\ \ director, \quad como\ \ s\perp\pi \to : \vec{v}_s = \vec{n}_\pi = (1,1,1) \end{cases}$$

La ecuación paramétrica de la recta s será: $s:\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1+\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

b_2) ¿d(P , π)?. P (1 , 1 , 1) y π: x + y + z = 1 → π: x + y + z − 1 = 0

$$d(P,\pi) = \frac{|1+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \qquad \to \qquad d(P,\pi) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u.l.$$

b_3) ¿ $s \cap \pi$?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la ecuación paramétrica de la recta r en la ecuación del plano π,

$1 + \lambda + 1 + \lambda + 1 + \lambda = 1$

$3 + 3\lambda = 1$ $\qquad\qquad Q = s \cap \pi$

$3\lambda = 1 - 3$

$3\lambda = -2$ $\qquad \to \qquad Q = \left(1-\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}, 1-\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\lambda = \frac{-2}{3}$

Solución: $\boldsymbol{s \cap \pi} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

c) ¿Plano σ? / $r \subset \sigma$ y $\sigma \perp \pi$

$$\sigma:\begin{cases} punto \quad P_r(-3,2,0) \\ vectores\ \ directores: \begin{cases} r\subset\sigma \ \to\ \vec{u} = \vec{v}_r(1,0,1) \\ \sigma\perp\pi \ \to\ \vec{v} = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación general del plano σ la obtenemos: $\begin{vmatrix} x+3 & y-2 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$(x+3).(-1) - (y-2).0 + z.1 = 0$

$-x-3+z=0$

$-x+z-3=0$

Solución: $\boldsymbol{\sigma: -x+z-3=0}$

PROBLEMA B.2. Sea T un tetraedro de vértices O = (0,0,0), *A* = (1,1,1), *B* = (3,0,0) y *C* = (0,3,0).

Obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La ecuación del plano π que contiene a los puntos *A, B y C,* *(1 punto)*
y las ecuaciones de la recta h_0 perpendicular a π que pasa por O. *(2 puntos)*

b) El punto de intersección de la altura h_0 y el plano π. *(3 puntos)*

c) El área de la cara cuyos vértices son los puntos *A, B y C*, *(2 puntos)*
y el volumen del tetraedro *T*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿plano π que pasa por los puntos A(1,1,1), B(3,0,0) y C(0,3,0)?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto} \quad A(1,1,1) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AC}(-1,2,1) \end{cases} \end{cases}$$

La ecuación del plano π será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\,3 - (y-1)\,(-3) + (z-1)\,3 = 0$$

$$3x-3+3y-3+3z-3=0 \rightarrow 3x+3y+3z-9=0 \rightarrow x+y+z-3=0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi: \ x + y + z - 3 = 0}$

Recta h_0 / $O \in h_0$ y $h_0 \perp \pi$:

$$h_0 : \begin{cases} \text{Punto} \quad O(0,0,0) \\ \text{vector director, como } h_0 \perp \pi \rightarrow \vec{v}_{h_0} = \vec{n}_\pi(1,1,1) \end{cases}$$

Ecuaciones de h_0:

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re \rightarrow$
$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) \quad \lambda \in \Re$

$$\text{Ecuación paramétrica: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Ecuación continua: $x = y = z$

b) ¿ $h_0 \cap \pi$?

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta paramétrica en la ecuación del plano,
$\lambda + \lambda + \lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda - 3 = 0; \quad 3\lambda = 3; \quad \lambda = 1$

El punto de corte entre la recta h_0 y el plano π es (1 , 1 , 1)

c) *Área de la cara de vértices A, B y C*

Como es un tetraedro su cara es un triángulo de vértices A, B y C y calculamos su área mediante la fórmula: (los vectores a usar los calculamos en el apartado a))

$$Área = \frac{1}{2}\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 4\vec{k} + \vec{j} - \vec{k} + 2\vec{i} + 2\vec{j} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k} = (3,3,3)$$

$$\left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$Área = \frac{1}{2} 3\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \ u.a.$$

Solución: el área de la cara pedida es $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ ***u.a.***

El volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C podemos obtenerlo de dos formas:

a) Mediante la fórmula: $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC} \right] \right|$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OA} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{OB} = (3,0,0) \\ \overrightarrow{OC} = (0,3,0) \end{array}\right\} \quad V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left| \left[\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB}\ \overrightarrow{OC} \right] \right| = \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}|9| = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} u^3$$

b) Podemos considerar como base del tetraedro el triángulo de vértices A, B y C que está sobre el plano π, y la altura del tetraedro, que estaría sobre la recta que pasa por el punto O y es perpendicular al plano π (la recta h_0 *obtenida en el apartado a)); por tanto la altura del tetraedro es la distancia entre los puntos O (0,0,0) y el obtenido en el apartado b) P (1,1,1).*

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{3} Área\_base \,.\, h = \frac{1}{3} A_{triángulo\ A,B,C}\ d(P,O) \overset{*}{=}$$

$$A_{triángulo\ A,B,C} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (del\ apartado\ anterior)$$

$$d(P,O) = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{3}\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\,\sqrt{3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} u^3$$

Solución: El área de tetraedro pedido es $\frac{3}{2}$ $\boldsymbol{u^3}$***.***

PROBLEMA A.2. Dados los puntos $A = (-1,2,\lambda)$, $B = (2,3,5)$ y $C = (3,5,3)$, donde λ es un parámetro real, se pide obtener **razonadamente**, **escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

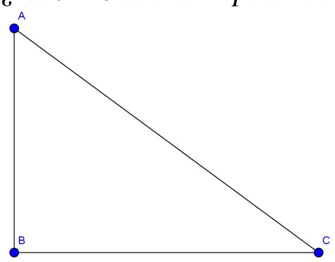
a) El valor del parámetro λ para que el segmento AC sea la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C. *(3 puntos)*

b) El área del triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices A, B y C cuando $\lambda = 6$. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿λ? / AC sea la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC.



Si AC es la hipotenusa $\rightarrow \ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC} \ \rightarrow \ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$

$$\overrightarrow{AB} = (3,1,5-\lambda), \quad \overrightarrow{BC} = (1,2,-2)$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = (3,1,5-\lambda)\cdot(1,2,-2) = 3+2-2(5-\lambda) = 5-10+2\lambda = -5+2\lambda$$

$$-5+2\lambda = 0 \ \rightarrow \ 2\lambda = 5 \ \rightarrow \ \lambda = \frac{5}{2}$$

Solución: el segmento AC será la hipotenusa del triángulo rectángulo ABC para $\lambda = 5/2$.

b) ¿Área del triángulo ABC para $\lambda = 6$?($A(-1,2,6)$, $B(2,3,5)$ y $C = (3,5,3)$)

Calculamos el área triángulo de vértices A, B y C mediante la fórmula:

$$Área = \frac{1}{2}\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\ \right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (3,1,-1) \qquad y \qquad \overrightarrow{BC} = (1,2,-1)$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -2\vec{i}+6\vec{k}-\vec{j}-\vec{k}+2\vec{i}+6\vec{j} = 5\vec{j}+5\vec{k} = (0,5,5)$$

$$\left|\ \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}\ \right| = \sqrt{0^2+5^2+5^2} = 5\sqrt{2}$$

$$Área = \frac{1}{2}5\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ u.a.$$

c) ¿Plano π que contiene los puntos $A(-1,2,6)$, $B(2,3,5)$ y $C = (3,5,3)$?

$$\text{Del plano } \pi \text{ conocemos } \begin{cases} \text{punto } A(-1,2,6) \\ \text{vectores directores } \begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,1,-1) \\ \overrightarrow{BC}(1,2,-2) \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{La ecuación del plano } \pi \text{ será: } \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-6 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \ \rightarrow$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (z-6)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\,0-(y-2)\,(-5)+(z-6)\,5 = 0 \ \rightarrow \ 5y-10+5z-30 = 0 \ \rightarrow \ 5y+5z-40 = 0 \ \rightarrow \ y+z-8 = 0$$

Por tanto, $\boldsymbol{\pi :\ y + z - 8 = 0}$

PROBLEMA B.2. Dados el punto $A(5,7,3)$ y la recta $r: \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{2}$, se pide obtener **razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado**:

a) La recta s que corta a la recta a r, pasa por el punto A, y es perpendicular a la recta r *(4 puntos)*

b) La distancia del punto A a la recta r. *(3 puntos)*

c) La distancia del punto $B(1,1,1)$ al plano π que pasa por $(3,-1,0)$ y es perpendicular a r. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿recta s? / s corta a r, $A \in s$ y $s \perp r$

s corta a r en el punto P_r, *por tanto la recta s pasa por A y* P_r

Como $s \perp r \rightarrow \overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r}$, $\left(\overrightarrow{v_r} \text{ es el vector director de la recta } r \right)$

$A(5, 7, 3)$ y $P_r(3-\lambda, -1+3\lambda, 2\lambda) \rightarrow \overrightarrow{AP_r} = (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda)$

$\overrightarrow{v_r} = (-1, 3, 2)$

$\overrightarrow{AP_r} \perp \overrightarrow{v_r} \rightarrow (-2-\lambda, -8+3\lambda, -3+2\lambda) \cdot (-1, 3, 2) = 0$

$2 + \lambda - 24 + 9\lambda - 6 + 4\lambda = 0 \rightarrow -28 + 14\lambda = 0 \rightarrow 14\lambda = 28 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow$

$P_r(1, 5, 4)$

La recta s que pasa por A y P_r, $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{AP_r} = (4,2,-1)$, *por tanto*

$$s: \frac{x-5}{4} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-3}{-1}$$

b) ¿$d(A, r)$?

El cálculo de esta distancia es: $d(A,r) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$

$A(5,7,3)$

$P_r(3,-1,0)$

$\overrightarrow{AP_r}(-2,-8,-3)$

$\overrightarrow{v_r}(-1,3,2)$

$$\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -8 & -3 \\ -1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -2 & -8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\,(-16+9) - \vec{j}\,(-4-3) + \vec{k}\,(-6-8) = \vec{i}\,(-7) - \vec{j}\,(-7) + \vec{k}\,(-14) = -7\vec{i} + 7\vec{j} - 14\vec{k} = (-7, 7, -14)$$

$$\left|\overrightarrow{AP_r} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 7^2 + (-14)^2} = 7\sqrt{6}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

Finalmente, $d(A,r) = \dfrac{7\sqrt{6}}{\sqrt{14}} = \sqrt{21}\ u.$

c) ¿$d(B, \pi)$? / siendo: $B(1, 1, 1)$ y π un plano $\left\langle \begin{array}{l} pasa\ por\ (3, -1, 0) \\ \perp r \end{array} \right.$

Ecuación del plano π:

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1, 3, 2) \rightarrow \pi: -x + 3y + 2z + C = 0$

Como $(3, -1, 0) \in \pi \rightarrow -3 + 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + C = 0 \rightarrow -6 + C = 0 \rightarrow C = 6$

Por tanto, $\pi: -x + 3y + 2z + 6 = 0$

Finalmente, $d(B, \pi) = \dfrac{|-1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 2^2}} = \dfrac{10}{\sqrt{14}} = \dfrac{5\sqrt{14}}{7} \rightarrow d(B, \pi) = \dfrac{5\sqrt{14}}{7}\ u.$

PROBLEMA A.2. Consideramos en el espacio las rectas $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases}$ y $s: x = y+1 = \dfrac{z-2}{2}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación del plano que contiene las rectas r y s. *(3 puntos)*

b) La recta que pasa por P = (0, – 1, 2) y corta perpendicularmente a la recta r. *(4 puntos)*

c) El valor que deben tener los parámetros reales a y b para que la recta s esté contenida en el plano π: x – 2 y + a z = b. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Plano π? / r y s ⊂π.

Veamos la posición relativa de r y s.

Ecuación paramétrica de r, $r:\begin{cases} x-y+3=0 \\ 2x-z+3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=3+x \\ z=-3+2x \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x=\mu \\ y=3+\mu \\ z=-3+2\mu \end{cases} \quad \mu\in\Re$

Ecuación paramétrica de s, $s: x=y+1=\dfrac{z-2}{2} \rightarrow s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases} \quad \lambda\in\Re$

Obtengamos los vectores directores de r y s.

$\vec{v}_r=(1,1,2)$ *y* $\vec{v}_s=(1,1,2)$, *por lo que* $\vec{v}_r=\vec{v}_s \rightarrow r\,//\,s$

El plano π *que contiene a r y s lo obtendremos a partir de* $\begin{cases} \text{punto } P_r(0,3,3) \\ v.\ directores \begin{cases} \vec{v}_r \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{cases} \end{cases}$

La ecuación del plano π,

$$\begin{vmatrix} x & y-3 & z-3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow x\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}-(y-3)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+(z-3)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=0$$

$$7x+y-3-4z+12=0 \rightarrow 7x+y-4z+9=0$$

Por lo tanto, ***el plano que contiene a las rectas r y s es π: 7 x + y – 4 z + 9 = 0***

b) ¿Recta t? / P(0, – 1, 2) ∈ t y t corte ⊥ a r.

De lo calculado en el apartado anterior sabemos: punto genérico de r $P_r(\mu, 3+\mu, 3+2\mu)$ *y* $\vec{v}_r=(1,1,2)$

El corte entre r y t será el punto P_r *de manera que* $\overrightarrow{PP_r}\perp\vec{v}_r$.

$$\overrightarrow{PP_r}=(\mu, 4+\mu, 1+2\mu)$$

Como $\overrightarrow{PP_r}\perp\vec{v}_r \rightarrow \overrightarrow{PP_r}\cdot\vec{v}_r=0 \rightarrow (\mu, 4+\mu, 1+2\mu)\cdot(1,1,2)=0$

$$\mu+4+\mu+2+4\mu=0, \quad 6\mu+6=0, \quad 6\mu=-6, \quad \mu=-1$$

Luego el punto de corte entre t y r es (– 1 , 2 , 1)

Entonces, como la recta t buscada pasa por P(0, – 1, 2) y Q(– 1 , 2 , 1) $\rightarrow \vec{v}_t=(-1,3,-1)$

Finalmente, ***la ecuación de la recta pedida será:*** $t:\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-1}$

c) ¿a, b? / s ⊂ π : x – 2 y + a z = b

De lo calculado en el apartado a) tenemos la ecuación paramétrica de s,

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=2+2\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación de π,

$\lambda - 2(-1+\lambda) + a(2+2\lambda) = b$

$\lambda + 2 - 2\lambda + 2a + 2a\lambda = b$

$-\lambda + 2a\lambda = b - 2 - 2a$

$\lambda(-1+2a) = b - 2 - 2a$

Para que s ⊂π, la ecuación debe dar 0 = 0. Por lo que $\begin{cases} -1+2a=0 \\ b-2-2a=0 \end{cases}$

De la 1ª ecuación $2a = 1 \quad \rightarrow \quad a=\dfrac{1}{2}$

Sustituyendo en la 2ª ecuación, $b-2-2\dfrac{1}{2}=0 \quad \rightarrow \quad b-3=0 \quad \rightarrow \quad b=3$

Por tanto, s ⊂π para $a=\dfrac{1}{2}$ ***y b = 3.***

PROBLEMA B.2. Sea π el plano de ecuación $9x + 12y + 20z = 180$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 4 unidades de π. *(4 puntos)*

b) Los puntos *A, B y C* intersección del plano π con los ejes OX, OY y OZ y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. *(4 puntos)*

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son el origen de coordenadas y los puntos *A, B y C*. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Planos paralelos a π / $d(\text{plano}, \pi) = 4$?

Los planos paralelos a π tiene por ecuación: $\sigma: 9x + 12y + 20z + D = 0$

Como $\sigma \,//\, \pi \;\rightarrow\; d(\pi, \sigma) = d(P_\pi, \sigma)$

Obtengamos un punto del plano π, para $x = 0$ e $y = 0$ $\rightarrow$ $20z = 180$ $\rightarrow$ $z = 9$ $\rightarrow$ $P_\pi = (0, 0, 9)$

$$d(P_\pi, \sigma) = \frac{|9.0 + 12.0 + 20.9 + D|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|180 + D|}{25}$$

Debe ser $\dfrac{|180 + D|}{25} = 4 \;\rightarrow\; |180 + D| = 100 \;\begin{cases} 180 + D = 100 \;\rightarrow\; D = -80 \\ 180 + D = -100 \;\rightarrow\; D = -280 \end{cases}$

Los planos pedidos serán: $\boldsymbol{\sigma_1: 9x + 12y + 20z - 80 = 0}$ ***y*** $\boldsymbol{\sigma_2: 9x + 12y + 20z - 280 = 0}$

b) A = $\pi \cap$ eje OX

Calculemos la ecuación del eje OX, punto (0 , 0, 0) y vector director (1 , 0 , 0)

$$\text{eje } OX: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego ***A (20 , 0 , 0)***

$\pi \cap \text{eje } OX \;\equiv\; 9\lambda + 12\cdot 0 + 20\cdot 0 = 180 \;\rightarrow\; 9\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 20$

B = $\pi \cap$ eje OY

Calculemos la ecuación del eje OY, punto (0 , 0, 0) y vector director (0 , 1 , 0)

$$\text{eje } OY: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 \end{cases}$$

Luego ***B (0 , 15 , 0)***

$\pi \cap \text{eje } OY \;\equiv\; 9\cdot 0 + 12\lambda + 20\cdot 0 = 180 \;\rightarrow\; 12\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 15$

C = $\pi \cap$ eje OZ

Calculemos la ecuación del eje OZ, punto (0 , 0, 0) y vector director (0 , 0 , 1)

$$\text{eje } OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

Luego ***C (0 , 0 , 9)***

$\pi \cap \text{eje } OZ \;\equiv\; 9\cdot 0 + 12\cdot 0 + 20\lambda = 180 \;\rightarrow\; 20\lambda = 180 \;\rightarrow\; \lambda = 9$

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{AB} = (-20, 15, 0)$ *y* $\overrightarrow{AC} = (-20, 0, 9)$. *Si* $\alpha = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

$$\cos\alpha = \frac{|(-20, 15, 0)\cdot(-20, 0, 9)|}{\sqrt{(-20)^2 + 15^2 + 0^2}\,\sqrt{(-20)^2 + 0^2 + 9^2}} = \frac{|400|}{25\sqrt{481}} = \frac{400}{25\sqrt{481}} = 0'7295$$

y $\boldsymbol{\alpha = 43'1524^o = 43^o\ 9'\ 8'' = 0'75315}$ ***rds.***

c) Volumen del tetraedro de vértices O, A, B y C.

Calculemos los vectores: $\overrightarrow{OA}=(20,0,0)$ $\overrightarrow{OB}=(0,15,0)$ $\overrightarrow{OC}=(0,0,9)$

Entonces el cálculo del volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}20 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{vmatrix}=\frac{1}{6}2700=450\ u.v.$$

Por tanto, ***el volumen del tetraedro pedido es 450 u.v.***

Problema 2. Sea dan los planos π_1: $x + y + z = a - 1$, π_2: $2x + y + az = a$ y π_3: $x + ay + z = 1$.

a) Determinad la posición relativa de los tres planos en función del parámetro a. *(4 puntos)*

b) Para $a = 1$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_3. *(3 puntos)*

c) Para $a = 2$, calculad, si existe, la recta de corte entre los planos π_1 y π_2. *(3 puntos)*

Solución:

a) Estudiemos el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos.

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.

A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2a + a - 1 - a^2 - 2 = -a^2 + 3a - 2$$

Resolvemos la ecuación: $-a^2 + 3a - 2 = 0$

$$\begin{array}{c|ccc} & -1 & 3 & -2 \\ 1 & & -1 & 2 \\ \hline & -1 & 2 & \boxed{0} \\ 2 & & -2 & \\ \hline & -1 & \boxed{0} & \end{array}$$

Soluciones: $a = 1$ *y* $a = 2$

Si $a \neq 1$ *y* 2 $\rightarrow$ *el sistema es compatible y determinado, por lo que los tres planos se cortan en un punto.*

Si $a = 1$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $/A/ = 0$, *estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 - 2 = -1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible; por tanto los tres planos no se cortan en un elemento común.

Como π_1: $x + y + z = 0$ *y* π_3: $x + y + z = 1$, *estos planos son paralelos {coeficientes de incógnitas iguales y términos independientes distintos}. El menor de orden 2 no nulo de A nos indica que* π_2 *corta a* π_1 *y* π_3.

Si $a = 2$,

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Sabemos que $|A| = 0$*, estudiemos los rangos de A y A´,*

En A, $\left.\begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \end{array}\right\} \to ran(A) = 2 \quad y \quad ran(A') \geq 2$

En A´, a partir del menor de orden dos no nulo anterior formamos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{C_1 = C_3\} = 0 \quad \to \quad ran(A') = 2$$

Por lo tanto, ran(A) = ran(A´) = 2, luego el sistema es compatible indeterminado (resolvemos dos incógnitas en función de otra); por tanto los tres planos se cortan en una recta.

Resumiendo,

Si $a \neq 1$ ***y 2, los tres planos se cortan en un punto.***

Si a = 2, los tres planos se cortan en una recta

Si a = 1, los tres planos no se cortan en un elemento común. π_1 **y** π_3 ***son paralelos y*** π_2 ***corta a ambos.***

b) Si a = 1, ¿corte entre π_1 y π_3*?*

π_1: $x + y + z = 0$ *y* π_3: $x + y + z = 1$.

Como los coeficientes de x, y, z son iguales y los términos independientes distintos, los dos planos son paralelos.

Luego, ***si a = 1 no hay recta de corte entre*** π_1 **y** π_3.

c) Si a = 2, ¿corte entre π_1 y π_2*?*

π_1: $x + y + z = 1$ *y* π_3: $2x + y + 2z = 2$.

El sistema a resolver es: $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \end{cases}$ *y* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ *{calculado en apartado a) }*

Por tanto el sistema tiene solución. El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} x + y = 1 - z \\ 2x + y = 2 - 2z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & 1 \\ 2-2z & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{1 - z - 2 + 2z}{-1} = \frac{-1 + z}{-1} = 1 - z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-z \\ 2 & 2-2z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2 - 2z - 2 + 2z}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

$$Solución: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

Por tanto, ***si a = 2 los planos*** π_1 **y** π_2 ***se cortan en la recta:*** $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$

Problema 5. Dados el punto $P(1, 2, 3)$ y el plano π: $3x + 2y + z + 4 = 0$, se pide:

a) Calculad la distancia del punto P al plano π. *(2 puntos)*

b) Calculad el punto P' que es el simétrico del punto P respecto del plano π. *(5 puntos)*

c) La ecuación del plano π' que pasa por P y es paralelo a π. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿d(P, π)?

$$d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 1+2\cdot 2+3+4|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

Solución: $d(P,\pi)=\sqrt{14}$ *u.l.*

b) ¿P´? / P´ es el simétrico de P respecto de π.

1º) Recta, r, que pasa por P y es perpendicular a π.

De la recta r conocemos: $\begin{cases} \text{punto} \quad P(1,2,3) \\ v.\ director,\ r\perp\pi \rightarrow \vec{v}_r=\vec{n}_\pi(3,2,1) \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de r, $r:\begin{cases} x=1+3\lambda \\ y=2+2\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=3+\lambda \end{cases}$

2º) Punto de corte entre r y π (M).

Sustituyendo los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda+4=0$

$3+9\lambda+4+4\lambda+3+\lambda+4=0$

$14\lambda+14=0 \ \rightarrow\ 14\lambda=-14 \ \rightarrow\ \lambda=\frac{-14}{14}=-1$

Sustituyendo este valor en la ecuación de la recta: $\begin{cases} x=1+3(-1)=-2 \\ y=2+2(-1)=0 \\ z=3-1=2 \end{cases}$

Entonces $M(-2, 0, 2)$.

3º) El cálculo de P´ podemos realizarlo de dos formas.

a) P´ será tal que $\frac{P+P'}{2}=M$

$P+P'=2M \rightarrow P'=2M-P=2(-2,0,2)-(1,2,3)=(-4,0,4)-(1,2,3)=$
$(-5,-2,1)$

b) $¿Q\in r?\ /\ d(Q,\pi)=\sqrt{14}$

$$d(Q,\pi)=\sqrt{14} \quad\rightarrow\quad \frac{|3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda+4|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

$|3(1+3\lambda)+2(2+2\lambda)+3+\lambda+4|=14; \quad |3+9\lambda+4+4\lambda+3+\lambda+4|=14$

$|14\lambda+14|=14; \quad \begin{cases} 14\lambda+14=14; \quad 14\lambda=0; \quad \lambda=0; \quad Q(1,2,3)=P \\ 14\lambda+14=-14; \quad 14\lambda=-28; \quad \lambda=-2; \quad Q(-5,-2,1)=P' \end{cases}$

Solución: P´(– 5 , – 2 , 1).

c) ¿ π'? / $P' \in \pi'$ y $\pi' // \pi$

Como $\pi' // \pi \rightarrow \pi': 3x + 2y + z + D = 0$

Como $P' \in \pi' \rightarrow 3(-5) + 2(-2) + 1 + D = 0$

$-15 - 4 + 1 + D = 0; \quad -18 + D = 0; \quad D = 18$

Solución, $\boldsymbol{\pi': 3x + 2y + z + 18 = 0}$

Problema 3. Dadas las rectas $r:\begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x = 4-5z \\ y = 4z-3 \end{cases}$.

a) Indicar justificadamente la posición relativa de las rectas r y s. *(5 puntos)*

b) Hallar la ecuación de la recta l que pasa por el origen y corta a r y s. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de r y s?

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r:\begin{cases} x = z-1 \\ y = 2-3z \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} x = -1+\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v_r}(1, -3, 1) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} x = 4-5z \\ y = 4z-3 \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} x = 4-5\mu \\ y = -3+4\mu \\ z = \mu \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} P_s(4, -3, 0) \\ \vec{v_s}(-5, 4, 1) \end{cases}$$

Estudiamos la matriz $\left[\vec{v_r} \quad \vec{v_s} \;\vdots\; \overrightarrow{P_rP_s}\right]$*, es decir:* $M´=\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Rango de M, { M es 3 x 2, luego máximo rango de M es 2}

$$|1| = 1 \neq 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4-15 = -11 \neq 0 \rightarrow ran(M) = 2$$

Rango de M´, {M´ es 3 x 3, luego máximo rango de M´ es 3}.

El menor: $\begin{vmatrix} 1 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -15+25-20+5 = -5 \neq 0 \rightarrow ran(M´) = 3$

Como ran (M) =2, las rectas no son paralelas y como ran(M´) = 3, ***las rectas r y s se cruzan en el espacio.***

b) ¿ recta l? / l pasa por el origen y corta a las rectas r y s.

Construyamos los siguientes planos:

π: contiene a r y al origen y δ: contiene a s y al origen, por tanto l será la intersección de ellos.

Para obtener la ecuación de cada plano necesitamos un punto y dos vectores directores del plano.

Plano π,

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} P_r(-1, 2, 0) \\ \vec{v_r}(1, -3, 1) \end{cases} \\ O(0,0,0) \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } O(0,0,0) \\ \text{vectores} \left\langle \begin{array}{l} \vec{v_r}(1, -3, 1) \\ \overrightarrow{OP_r}(-1, 2, 0) \end{array} \right. \end{cases} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2z-y-3z-2x = 0 \rightarrow -2x-y-z = 0 \rightarrow 2x+y+z = 0$$

Plano δ,

$$s:\begin{cases} P_s(4\,,-3\,,0) \\ \vec{v}_s(-5\,,4\,,1) \end{cases} \left.\begin{matrix} \\ \\ O\,(0{,}0{,}0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{cases} \text{punto } O\,(0{,}0{,}0) \\ \text{vectores} \left\langle \begin{matrix} \vec{v}_s(-5\,,4\,,1) \\ \overrightarrow{OP_s}\,(4\,,-3\,,0) \end{matrix} \right. \end{cases} \rightarrow \delta:\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -5 & 4 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 15z+4y-16z+3x=0 \rightarrow 3x+4y-z=0$$

Finalmente, **la ecuación de la recta l es** $\begin{cases} 2x+y+z=0 \\ 3x+4y-z=0 \end{cases}$.

Problema 4. Dados los planos π_1: $2x - y - z + 4 = 0$ y $\pi_2: \begin{cases} x = -1+\alpha \\ y = 1+\alpha+\beta \\ z = \alpha-\beta \end{cases}$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$.

a) Calcular la posición relativa de π_1 y π_2. *(3 puntos)*

b) Calcular el punto P' que es el simétrico al punto $P = (1,0,0)$ respecto del plano π_1. *(4 puntos)*

c) Calcular, si existe, el punto de intersección de π_1 y r. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿Posición relativa de π_1 y π_2?

Obtengamos la ecuación general de π_2.

$$\pi_2: \begin{cases} punto\ (-1,1,0) \\ vectores \left\langle \begin{array}{l} \vec{u}(1,1,1) \\ \vec{v}(0,1,-1) \end{array} \right. \end{cases} \rightarrow \pi_2: \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (x+1)\cdot(-2) - (y-1)\cdot(-1) + z\cdot 1 = 0 \rightarrow$$

$$-2x-2+y-1+z=0 \rightarrow -2x+y+z-3=0 \rightarrow 2x-y-z+3=0$$

Los planos son: $\begin{array}{l} \pi_1: 2x-y-z+4=0 \\ \pi_2: 2x-y-z+3=0 \end{array}$, *como los coeficientes de x, y, z son proporcionales (iguales en este caso pero los términos independientes no proporcionales* $\left(\dfrac{2}{2} = \dfrac{-1}{-1} = \dfrac{-1}{-1} \neq \dfrac{4}{3}\right)$ *los planos son paralelos no coincidentes.*

Solución: π_1 y π_2 son planos son paralelos no coincidentes.

b) ¿P´? / P´ es el simétrico de P (1, 0, 0) respecto de π_1?

π_1: $2x - y - z + 4 = 0$

Calculemos la ecuación de una recta, s, que pasa por P y es perpendicular a π_1.

$$s: \begin{cases} punto\ P(1,0,0) \\ vector\ director\quad \vec{v_s} = \vec{n}_{\pi_1}(2,-1,-1) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Calculemos el punto M intersección de s y π_1.

Sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano:

$2(1+2\lambda) - (-\lambda) - (-\lambda) + 4 = 0$

$2 + 4\lambda + \lambda + \lambda + 4 = 0;\quad 6\lambda + 6 = 0;\quad 6\lambda = -6;\quad \lambda = -1$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación de s obtendremos M.

$$\begin{cases} x = 1+2(-1) = -1 \\ y = -(-1) = 1 \\ z = -(-1) = 1 \end{cases} \rightarrow M(-1,1,1)$$

P´ será el simétrico de P respecto de M,

$$\frac{P+P'}{2}=M \quad \rightarrow \quad P'=2M-P=2\left(-1,1,1\right)-\left(1,0,0\right)=\left(-3,2,2\right)$$

Solución: ***el simétrico de P respecto de π_1 es P´(– 3 , 2 , 2).***

c) ¿$\pi_1 \cap r$?

Nos interesan las ecuaciones paramétricas de r.

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{-1} \quad \rightarrow \quad r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación del plano, (π_1: 2 x – y – z + 4 = 0)

$2(1+\lambda)-2\lambda-(2-\lambda)+4=0; \quad 2+2\lambda-2\lambda-2+\lambda+4=0; \quad \lambda+4=0; \quad \lambda=-4$

Sustituyendo este valor de λ en la ecuación de r obtendremos el punto buscado.

$$\begin{cases} x=1+\lambda=1-4=-3 \\ y=2\lambda=2(-4)=-8 \\ z=2-(-4)=6 \end{cases}$$

Por tanto, ***existe el punto de corte entre r y π_1 y es el punto (– 3 , – 8 , 6).***

Problema 3. Dada la recta $r:\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y+z=0 \end{cases}$ *y* los puntos $P=(0,0,3)$ y $Q=(2,2,\alpha)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real α, si existen, para los son paralelas las rectas r y la recta que pasa por los puntos *P* y *Q*. *(6 puntos)*

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por *P*. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿α? / r // s (s es la recta que pasa por P y Q)

De la recta s conocemos $\begin{cases} punto \quad P(0,0,3) \\ vector\ director\ \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ} = (2,2,\alpha-3) \end{cases}$

recta r, $¿\vec{v}_r?$

$$\vec{v}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} = (-1,-1,3)$$

$$r // s \quad si \quad \frac{2}{-1} = \frac{2}{-1} = \frac{\alpha-3}{3} \quad \rightarrow \quad -2 = \frac{\alpha-3}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha-3=-6 \quad \rightarrow \quad \alpha=-3$$

Solución: las rectas r y s son paralelas cuando $\boldsymbol{\alpha = -3}$

b) ¿Plano π*? /* $\pi \perp r$ *y* $P \in \pi$

Representamos por $\vec{n}_\pi$ *el vector perpendicular al plano* π*.*

Como $\pi \perp r \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\pi = \vec{v}_r = (-1,-1,3)$

La ecuación del plano π *será:* $-x-y+3z+D=0$

Como el punto $P(0,0,3) \in \pi \quad \rightarrow \quad -0-0+3\cdot 3+D=0;\ \ 9+D=0;\ \ D=-9$

Luego $\pi: -x-y+3z-9=0$ *o bien* $x+y-3z+9=0$

Solución: la ecuación del plano pedido es $\boldsymbol{x+y-3z+9=0}$.

Problema 4. Dada la recta $r:\begin{cases}5x+y+7z=16\\9x-y+7z=12\end{cases}$ y el punto $P=(0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q=(2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. *(2 puntos)*
b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. *(3 puntos)*
c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿$Q \in r$?

Comprobemos que el punto Q(2,6,0) cumple las ecuaiones de la recta r.

$$\begin{cases}5.2+6+7.0=16\\9.2-6+7.0=12\end{cases} \rightarrow \begin{cases}16=16 \quad Sí\\12=12 \quad Sí\end{cases} \rightarrow Q\in r$$

¿recta s? / s es la recta que pasa por P y Q.

$$\text{De la recta } s \text{ conocemos } \begin{cases}\text{punto} \quad P(0,5,2)\\ \text{vector director } \vec{v}_s=\overrightarrow{PQ}=(2,1,-2)\end{cases} \rightarrow s:\frac{x-0}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

$$\text{Luego} \quad s:\frac{x}{2}=\frac{y-5}{1}=\frac{z-2}{-2}$$

b) ¿Ángulo que forman r y s? $(\hat{r,s})$

El ángulo lo obtendremos a partir de los vectores directores de las dos rectas.

De la recta s obtuvimos su vector director en el apartado anterior: $\vec{v}_s=(2,1,-2)$

Como de la recta r tenemos su ecuación implícita, el cálculo de su vector director es:

$$\vec{v}_r=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\5&1&7\\9&-1&7\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1&7\\-1&7\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}5&7\\9&7\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}5&1\\9&-1\end{vmatrix}=14\vec{i}+28\vec{j}-14\vec{k}=(14,28,-14)\approx(1,2,-1)$$

$$\cos(\hat{r,s})=\frac{\left|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s\right|}{\left|\vec{v}_r\right|\left|\vec{v}_s\right|}=\frac{\left|(-1,-2,1)\cdot(2,1,-2)\right|}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+1^2}\,\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{\left|-2-2-2\right|}{\sqrt{6}\,\sqrt{9}}=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(\hat{r,s})=arc\cos\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)=35'2644^{\circ}$$

Solución: las rectas r y s forman un ángulo de 35´2644º.

c) ¿Proyección ortogonal del punto P en la recta r?

Los cálculos a realizar son:

i) Plano (π) que contiene a P y es perpendicular a r.

Representamos por $\vec{n}_\pi$ el vector perpendicular al plano π.

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n}_\pi=\vec{v}_r=(1,2,-1)$

La ecuación del plano π será: $x+2y-z+D=0$

Como el punto $P(0,5,2) \in \pi \rightarrow 0 + 2 \cdot 5 - 2 + D = 0;\ \ 8 + D = 0;\ \ D = -8$
Luego $\pi: x + 2y - z - 8 = 0$

ii) Corte entre π *y* r*.*

Nos interesa tener la ecuación vectorial de la recta r.
De los dos apartados anteriores, de la recta conocemos

$$\begin{cases} punto \quad Q(2,6,0) \\ vector\ director\ \vec{v}_r = (1,2,-1) \end{cases} \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 6 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = -\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y, z en la ecuación de π*,*
$2 + \lambda + 2(6 + 2\lambda) - (-\lambda) - 8 = 0;\quad 2 + \lambda + 12 + 4\lambda + \lambda - 8 = 0;\quad 6 + 6\lambda = 0;\quad 6\lambda = -6;$
$\lambda = -1$

Sustituyendo este valor de λ *en la ecuación de* r $\begin{cases} x = 2 + (-1) = 1 \\ y = 6 + 2(-1) = 4 \\ z = -(-1) = 1 \end{cases}$*, punto (1,4,1)*

Solución: la proyección ortogonal del punto P en la recta r es el punto (1,4,1).

Problema 3. Se considera la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-1}$ y el plano π: $3x - my + z = 1$.

Se pide:

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. *(4 puntos)*

b) Para los valores de m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π que contenga a la recta r. *(3 puntos)*

c) Calcular en función de m, la distancia entre π y el punto $P(1, -1, -2)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿m? / r // π.

$r \,//\, \pi$ *si* $\vec{v_r}$ *(vector director de r) y* $\vec{n_\pi}$ *(vector perpendicular a* π*) son perpendiculares.*

$\vec{v_r}(2,3,-1)$ y $\vec{n_\pi}(3,-m,1)$. $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi} \rightarrow \vec{v_r} \cdot \vec{n_\pi} = 0$;

$(2,3,-1)\cdot(3,-m,1) = 0$; $\quad 6 - 3m - 1 = 0$; $\quad 5 - 3m = 0$; $\quad 5 = 3m$; $\quad m = \dfrac{5}{3}$

Para que r y π sean paralelos $m = \dfrac{5}{3}$.

¿m? / r ⊂ π.

Para que $r \subset \pi$ *deben cumplirse dos condiciones:* $P_r(1,-1,-2) \in \pi$ *y que* $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$.

Como hemos obtenido anteriormente, $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$ *si* $m = \dfrac{5}{3}$.

$P_r(1,-1,-2) \in \pi$, *sustituyendo las coordenadas de* P_r *en* π: $3 \cdot 1 - m(-1) + (-2) = 1$;

$3 + m - 2 = 1$; $\quad m + 1 = 1$; $\quad m = 0$.

Hemos obtenido dos valores de m distintos, por lo que la recta r no está contenida en el plano π.

No existe valor de m para el que el plano π contiene a la recta r.

b) Para $m = \dfrac{5}{3}$ *¿plano σ? /* $\sigma \,//\, \pi$ *y* $r \subset \sigma$.

Para $m = \dfrac{5}{3} \rightarrow \pi : 3x - \dfrac{5}{3}y + z = 1 \rightarrow \pi : 9x - 5y + 3z = 3$

Como $\sigma \,//\, \pi \rightarrow \sigma$: $9x - 5y + 3z = D$

Para que $r \subset \sigma \rightarrow P_r(1,-1,-2) \in \sigma \rightarrow 9 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = D \rightarrow 9 + 5 - 6 = D \rightarrow D = 8$

La ecuación del plano pedido es: $\boldsymbol{9x - 5y + 3z = 8}$.

c) $P(1,-2,-2)$ *y* π: $3x - my + z = 1$, *¿d(P,π)?*

$$d(P,\pi) = \frac{|3 \cdot 1 - m(-1) + (-2)\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + m^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m - 3|}{\sqrt{m^2+10}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2+10}}$$

Solución: $d(P,\pi) = \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2+10}}$

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$ y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. *(2 puntos)*
b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. *(3 puntos)*
c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿recta r?

Como la recta r es la que contiene los otros dos vértices del cuadrado será paralela a la que pasa por P y Q. Por tanto de la recta r sabemos
$$\begin{cases} punto \quad R(4,7,6) \\ vector\ director\ \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \end{cases}$$

La ecuación vectorial de r:
$$\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$$

La ecuación continua de r: $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z-6}{-2}$

b) ¿Plano π? / $\pi \subset$ cuadrado

π será el plano que contenga los punto P, Q y R.

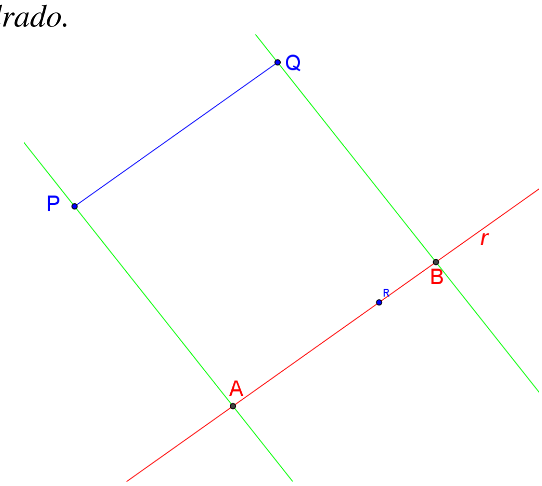
Por tanto del plano π sabemos
$$\begin{cases} punto \quad P(2,1,3) \\ vectores\ directores \left\langle \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\ (-1,2,-2) \\ \overrightarrow{PR}\ (2,6,3) \end{array} \right. \end{cases}$$

La ecuación del plano π la obtenemos a partir de:
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad (x-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$
$$(x-2)(6+12) - (y-1)(-3+4) + (z-3)(-6-4) = 0; \quad 18(x-2) - (y-1) - 10(z-3) = 0$$
$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0; \quad 18x - y + 10z - 5 = 0$$

Solución: la ecuación del plano pedido es 18 x – y – 10 z – 5 = 0.

c) Coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

El problema a resolver expresado de forma gráfica (en el plano en lugar del espacio) es:



Cálculo del vértice A.

Calculamos el plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r (plano σ). El vértice A será el punto de corte entre el plano σ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\sigma$ *el vector perpendicular al plano* σ.

Como $\sigma \perp r \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano σ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $P(2,1,3) \in \sigma \quad \rightarrow \quad -2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + D = 0; \; -6 + D = 0; \quad D = 6$

Luego $\sigma: -x + 2y - 2z + 6 = 0$

Punto de corte entre σ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$$-(4-\lambda)+2(7+2\lambda)-2(6-2\lambda)+6=0; \quad -4+\lambda+14+4\lambda-12+4\lambda+6=0; \quad 4+9\lambda=0$$

$$\lambda = \frac{-4}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{-4}{9} = \dfrac{40}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{55}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{62}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{40}{9},\frac{55}{9},\frac{62}{9}\right)$$

Cálculo del vértice B.

Calculamos el plano que contiene al punto Q y es perpendicular a la recta r (plano δ). El vértice B será el punto de corte entre el plano δ y la recta r.

Representamos por $\vec{n}_\delta$ *el vector perpendicular al plano* δ.

Como $\delta \perp r \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\delta = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano δ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $Q(1,3,1) \in \delta \quad \rightarrow \quad -1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + D = 0; \; 3 + D = 0; \quad D = -3$

Luego $\delta: -x + 2y - 2z - 3 = 0$

Punto de corte entre δ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$$-(4-\lambda)+2(7+2\lambda)-2(6-2\lambda)-3=0; \quad -4+\lambda+14+4\lambda-12+4\lambda-3=0; \quad 9\lambda-5=0$$

$$\lambda = \frac{5}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{31}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{73}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{44}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{31}{9},\frac{73}{9},\frac{44}{9}\right)$$

Solución: los otros dos vértices del cuadrado son $A\left(\dfrac{40}{9},\dfrac{55}{9},\dfrac{62}{9}\right)$ *y* $B\left(\dfrac{31}{9},\dfrac{73}{9},\dfrac{44}{9}\right)$.

Problema 2.1. Dadas las dos rectas **r** y **s**, que se cortan, de ecuaciones

$r: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{2y-1}{-6} = \dfrac{2z-3}{6}$ y $s: \dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{2y+3}{2} = \dfrac{z-1}{4}$, se pide calcular:

a) El punto P de corte de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

b) Un vector direccional de **r** y otro de **s** , *(0,5 puntos)*, y el ángulo α que forman las rectas **r** y **s** en el punto de corte *P*. *(0,6 puntos).*

c) La ecuación implícita $a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$ del plano π que contiene a las rectas **r** y **s** *(1,1 puntos).*

Solución:

a) Escribimos las ecuaciones paramétricas de r y s.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{2y-1}{-6} = \frac{2z-3}{6}$$

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-\frac{1}{2}}{-3} = \frac{z-\frac{3}{2}}{3} \quad \rightarrow \quad r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = \dfrac{1}{2} - 3\lambda \\ z = \dfrac{3}{2} + 3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{2y+3}{2} = \frac{z-1}{4}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y+\frac{3}{2}}{2} = \frac{z-1}{4} \quad \rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 3-2\mu \\ y = -\dfrac{3}{2} + \mu \\ z = 1+4\mu \end{cases} \quad \mu \in \Re$$

Punto de corte entre r y s,

$$\begin{cases} 1+2\lambda = 3-2\mu \\ \dfrac{1}{2} - 3\lambda = -\dfrac{3}{2} + \mu \\ \dfrac{3}{2} + 3\lambda = 1+4\mu \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \\ 3\lambda - 4\mu = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

El determinante de la matriz ampliada de este sistema es

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & -2 \\ 3 & -4 & -1/2 \end{vmatrix} = 1+24-12+6-16-3 = 0$$

Como en la matriz de coeficiente el menor $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -2+6 = 4 \neq 0$ *el sistema tiene solución única.*

Las rectas se cortan en,

$$\begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -3\lambda - \mu = -2 \end{cases} \rightarrow \quad 2x2^{a} \quad \begin{cases} 2\lambda + 2\mu = 2 \\ -6\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

$$-4\lambda = -2 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

El punto de corte será,

$$\begin{cases} x = 1 + 2\dfrac{1}{2} = 2 \\ y = \dfrac{1}{2} - 3\dfrac{1}{2} = -1 \\ z = \dfrac{3}{2} + 3\dfrac{1}{2} = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad P(2, -1, 3)$$

b)

$\overrightarrow{v_r} = (2, -3, -3) \qquad y \qquad \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 4)$

$$siendo \quad \alpha = (\widehat{r,s}) \quad \rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(2, -3, -3) \cdot (-2, 1, 4)\right|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 3^2}\ \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 4^2}} = \frac{\left|-4 - 3 + 12\right|}{\sqrt{4+9+9}\ \sqrt{4+1+16}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{22}\sqrt{21}} = \frac{5}{\sqrt{462}}$$

luego $\alpha = 76'548...^{\circ} \approx 76'55^{\circ}$

c)

$$Del\ \ plano\ \pi\ conocemos \begin{cases} punto \quad P(2, -1, 3) \\ vectores\ directores \left\langle \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (2, -3, -3) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 4) \end{array} \right. \end{cases}$$

la ecuación del plano será,

$$\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -2 \\ y+1 & -3 & 1 \\ z-3 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-12-3) - (y+1)(8+6) + (z-3)(2-6) = 0$$

$$-15(x-2) - 14(y+1) - 4(z-3) = 0$$

$$-15x + 30 - 14y - 14 - 4z + 12 = 0$$

$$-15x - 14y - 4z + 28 = 0$$

$15x + 14y + 4z - 28 = 0$ *esta es la ecuación del plano* π

Problema 2.2. Dados el punto $Q = (3, -1, 4)$ y la recta **r** de ecuación paramétrica

r: $x = -2 + 3\lambda,\ y = -2\lambda,\ z = 1 + 4\lambda,$ se pide:

a) Hallar la distancia del punto Q a la recta **r.** *(1,1 puntos).*

b) Justificar que la recta **s** que pasa por Q y tiene a $(1, -1, 1)$ como vector direccional no corta a **r**. *(1,1 puntos).*

c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

Solución:

a)

$$d(Q,r) = \frac{\left|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|} \qquad \text{siendo } P_r \text{ y } \overrightarrow{v_r} \text{ punto y vector director de } r.$$

$$P_r = (-2, 0, 1) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{P_rQ} = (5, -1, 3)$$

$$\overrightarrow{v_r} = (3, -2, 4)$$

$$\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-4+6) - \vec{j}(20-9) + \vec{k}(-10+3) = 2\vec{i} - 11\vec{j} - 7\vec{k} = (2, -11, -7)$$

$$\left|\overrightarrow{P_rQ} \times \overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{2^2 + (-11)^2 + (-7)^2} = \sqrt{4+121+49} = \sqrt{174}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9+4+16} = \sqrt{29}$$

$$d(Q,r) = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6}\ u.\,l.$$

b)

$$s: \begin{cases} Q(3, -1, 4) \\ \overrightarrow{v_s}(1, -1, 1) \end{cases} \qquad r: \begin{cases} P(-2, 0, 1) \\ \overrightarrow{v_r}(3, -2, 4) \end{cases}$$

$$M' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 3-(-2) \\ -2 & -1 & -1-0 \\ 4 & 1 & 4-1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 10 - 4 + 20 + 3 + 6 = 6 \quad \rightarrow \quad ran(M') = 3 \rightarrow \quad \text{las rectas se cruzan.}$$

c)

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right| = \left|\begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}\right| = |6| = 6$$

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}(-2+4) - \vec{j}(3-4) + \vec{k}(-3+2) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} =$$

$$= (2, 1, -1)$$

$$\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{PQ}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}\ u.\ l.$$

Problema 2.1. Se dan los puntos A = (2 , 1 , 1) y B = (1 , 0 , – 1), y la recta **r** de ecuación $r: x-5 = y = \frac{z+2}{-2}$

Se pide calcular razonadamente:
a) El punto C de **r** que equidista de A y B. *(2 puntos).*
b) El área del triángulo ABC. *(1,3 puntos).*

Solución:
a)

Buscamos $C \in r \quad / \quad d(A,C) = d(B,C)$

Escribamos la ecuación paramétrica de la recta r; como conocemos su ecuación en forma continua es fácil escribir la ecuación paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = 5+\lambda \\ y = \lambda \qquad\qquad \lambda \in \Re \\ z = -2-2\lambda \end{cases}$$

Por lo que las coordenadas de cualquier punto de la recta r, en particular del C que buscamos, son

$$(5+\lambda\,,\lambda\,,-2-2\lambda)$$

Calculemos las distancias indicadas,

$$d(A,C) = \sqrt{(5+\lambda-2)^2+(\lambda-1)^2+(-2-2\lambda-1)^2} = \sqrt{(3+\lambda)^2+(\lambda-1)^2+(-3-2\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{9+6\lambda+\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+9+12\lambda+4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19}$$

$$d(B,C) = \sqrt{(5+\lambda-1)^2+(\lambda-0)^2+(-2-2\lambda+1)^2} = \sqrt{(4+\lambda)^2+(\lambda)^2+(-1-2\lambda)^2} =$$
$$= \sqrt{16+8\lambda+\lambda^2+\lambda^2+1+4\lambda+4\lambda^2} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$

Igualándolas:

$$\sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$

Resolvemos la ecuación planteada elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$6\lambda^2+16\lambda+19 = 6\lambda^2+12\lambda+17 \quad \to \quad 4\lambda+2=0 \quad \to \quad \lambda = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

Comprobemos que esta solución lo es de la ecuación irracional inicial,

$$\sqrt{6\lambda^2+16\lambda+19} = \sqrt{6\lambda^2+12\lambda+17}$$
$$\sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2+16\left(\frac{-1}{2}\right)+19} = \sqrt{6\left(\frac{-1}{2}\right)^2+12\left(\frac{-1}{2}\right)+17}$$
$$\sqrt{6\frac{1}{4}-8+19} = \sqrt{6\frac{1}{4}-6+17}$$
$$\sqrt{\frac{3}{2}+11} = \sqrt{\frac{3}{2}+11} \quad \textit{cierto,} \quad \textit{luego} \quad \lambda = \frac{-1}{2} \textit{ es válida.}$$

$$Y \quad \textit{finalmente} \quad C = \left(5-\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2-2\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$$

Otra forma de resolverlo,

Calculamos el siguiente plano:

π *plano que pasa por* $PM_{\overline{AB}}$ *y* $\perp$ $\vec{AB}$

$PM_{\overline{AB}}$ $\left(\frac{2+1}{2}, \frac{1+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$

$\vec{AB}$ $(1-2, 0-1, -1-1) = (-1, -1, -2) \approx (1, 1, 2)$

La educación del plano será: x + y + 2 z + D = 0, con la condición de que pase por $PM_{\overline{AB}}$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 2.0 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 2 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -2$$

$\pi: \quad x + y + 2z - 2 = 0$

El punto C será el de corte entre la recta r y el plano π

$$5 + \lambda + \lambda + 2(-2 - 2\lambda) - 2 = 0$$

$$5 + \lambda + \lambda - 4 - 4\lambda - 2 = 0$$

$$-1 - 2\lambda = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{-1}{2}$$

luego $C = \left(5 - \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, -2 - 2\,\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$

b) Área del triángulo ABC

A = (2 , 1 , 1) y B = (1 , 0 , -1) **y** $C = \left(\frac{9}{2}, \frac{-1}{2}, -1\right)$

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, -2)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(\frac{5}{2}, \frac{-3}{2}, -2\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{-3}{2} & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ \frac{5}{2} & \frac{-3}{2} \end{vmatrix} = \vec{i}(2-3) - \vec{j}(2+5) + \vec{k}\left(\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\right) =$$

$$= (-1, -7, 4)$$

y $\left|(-1, -7, 4)\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-7)^2 + 4^2} = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}$

y el área será $\frac{1}{2}\sqrt{66} = \frac{\sqrt{66}}{2}$ *u.a.*

Problema 2.2. Dadas la recta **r**, intersección de los planos y + z = 0 y x – 2 y – 1 = 0, y la recta **s** de ecuación

$s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3$, se pide

a) Obtener, razonadamente, las ecuaciones paramétricas de **r** y **s**. *(1,1 puntos).*
b) Explicar de un modo razonado cuál es la posición relativa de las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*
c) Calcular la distancia entre las rectas **r** y **s**. *(1,1 puntos).*

Solución:
a) Ecuaciones paramétricas de r

Resolvamos el sistema de ecuaciones que define la recta r

$$\begin{cases} y + z = 0 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$

podemos resolver el sistema anterior usando x e y como incógnitas principales,

$$\begin{cases} y = -z \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{2z - 1}{-1} = -2z + 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{z}{-1} = -z$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de la recta r serán: $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -\lambda \qquad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de s

$$s: \frac{x}{2} = y - 1 = -z + 3$$

la ecuación continua será $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-1}$

y la paramétrica $\begin{cases} x = 2\mu \\ y = 1 + \mu \qquad \mu \in \Re \\ z = 3 - \mu \end{cases}$

b) Posición relativa de r y s.

Estudiemos el sistema que plantearíamos para buscar el punto de corte entre las rectas,

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda = 2\mu \\ -\lambda = 1 + \mu \\ \lambda = 3 - \mu \end{cases} \to \begin{cases} -2\lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 3 \end{cases}$$

La matriz ampliada del sistema $\left(\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$

En la matriz de coeficientes, A, vemos que $C_1 = C_2$ *y que tiene elementos no nulos, luego* $ran(A) = 1$

En la matriz ampliada, como $C_1 = C_2$ $|A'| = 0$ *y* $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-1 = -3 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A') = 2$

Como ran(A) = 1 y ran(A´)=2, las rectas r y s son paralelas.

c) Como las rectas r y s son paralelas

$$d(r,s) = d(P_r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_s}\right|}$$

$$\begin{matrix} P_r(1,0,0) \\ P_s(0,1,3) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{P_sP_r}(1,-1,-3)$$

$\overrightarrow{v_s}(2,1,-1)$

$$\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}(1+3) - \vec{j}(-1+6) + \vec{k}(1+2) = (4,-5,3)$$

$$\left|\overrightarrow{P_sP_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 3^2} = \sqrt{16+25+9} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Por lo que $d(r,s) = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{5\sqrt{3}}{3}\, u.l.$

Problema 2.1. Sean A, B y C los puntos de intersección del plano de ecuación $x + 4y - 2z - 4 = 0$ con los tres ejes coordenados OX, OY y OZ, respectivamente. Se pide calcular razonadamente:
a) El área del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*
b) El perímetro del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*
c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC. *(1,1 puntos).*

Solución:
Calculemos los puntos A, B y C.
A – punto de corte entre el plano y el eje OX

La ecuación del eje OX la podemos dar como intersección de dos planos: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

El sistema a resolver para encontrar el punto A es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de y, z en la primera ecuación obtenemos x – 4 = 0, luego x = 4. El punto A tiene de coordenadas (4 , 0 , 0)

Similarmente obtenemos los restantes puntos.
B – punto de corte entre el plano y el eje OY

El sistema a resolver para encontrar el punto B es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, z en la primera ecuación obtenemos 4 y – 4 = 0, luego y = 1. El punto B tiene de coordenadas (0 , 1 , 0)

C – punto de corte entre el plano y el eje OZ

El sistema a resolver para encontrar el punto C es,

$$\begin{cases} x + 4y - 2z - 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo los valores de x, y en la primera ecuación obtenemos – 2 z – 4 = 0, luego z = – 2. El punto C tiene de coordenadas (0 , 0 , – 2)

a) Área del triángulo ABC.

Para calcular esta área utilizamos la siguiente fórmula $S = \frac{1}{2}\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right|$

$$\vec{AB} = (0,1,0) - (4,0,0) = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (0,0,-2) - (4,0,0) = (-4,0,-2)$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -2\,\vec{i} - 8\,\vec{j} + 4\,\vec{k} = (-2,-8,4)$$

$$\left| \vec{AB} \times \vec{AC} \right| = \left|(-2,-8,4)\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-8)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 64 + 16} = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}$$

Finalmente $S = \frac{1}{2} 2\sqrt{21} = \sqrt{21}\ u^2$

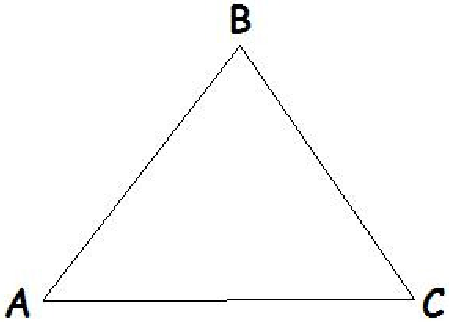
b) Perímetro del triángulo ABC.

$$P = d(A,B) + d(B,C) + d(C,A) =$$

$$= \sqrt{(0-4)^2+(1-0)^2+(0-0)^2} + \sqrt{(0-0)^2+(0-1)^2+(-2-0)^2} + \sqrt{(4-0)^2+(0-0)^2+(0+2)^2} =$$

$$= \sqrt{16+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{16+4} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + \sqrt{20} = \sqrt{17} + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} = \sqrt{17} + 3\sqrt{5} \approx 10'83\ u$$

c) Los tres ángulos interiores del triángulo ABC



Obtengamos los vectores que determinan los tres lados. Anteriormente ya obtuvimos dos de ellos,

$$\vec{AB} = (-4,1,0)$$

$$\vec{AC} = (-4,0,-2)$$

Calculemos el tercero

$$\vec{BC} = (0,0,-2) - (0,1,0) = (0,-1,-2)$$

Procedamos al cálculo de los tres ángulos, para ello utilizamos la fórmula del coseno del ángulo determinado por dos vectores.

$$\cos \hat{A} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{\left|\vec{AB}\right|\left|\vec{AC}\right|} = \frac{(-4,1,0)\cdot(-4,0,-2)}{\sqrt{(-4)^2+1^2+0^2}\ \sqrt{(-4)^2+0^2+(-2)^2}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ \sqrt{20}} = \frac{16}{\sqrt{17}\ 2\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{85}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \hat{A} = arc \cos\left(\frac{8}{\sqrt{85}}\right) = 29'805^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\left|\vec{BA}\right|\left|\vec{BC}\right|} = \frac{(4,-1,0)\cdot(0,-1,-2)}{\sqrt{4^2+(-1)^2+0^2}\ \sqrt{0^2+(-1)^2+(-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{17}\ \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{85}} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \hat{B} = arc \cos\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\right) = 83'773^\circ$$

y finalmente $\hat{C} = 180^\circ - 29'805^\circ - 83'773^\circ = 66'422^\circ$

Problema 2.2. Dados los puntos O = (0,0,0), A = (4,4,0) y P = (0,0,12), se pide obtener razonadamente:
a) La ecuación de la recta que pasa por A y es perpendicular al plano de ecuación z = 0. *(1 punto).*
b) La ecuación de un plano que cumpla las dos condiciones siguientes:

- Pase por P y por un punto Q de la recta de ecuación x = y = 4
- Sea perpendicular a la recta que pasa por O y Q. *(2,3 puntos por hallar uno de los dos planos solución).*

Solución:
a) Recta que pasa por A (4, 4 , 0) y $\perp$ al plano z = 0.
Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector normal del plano será director de la recta.
Del plano z = 0 un vector normal es (0 , 0 , 1), por lo tanto de la recta pedida conocemos:

punto A (4 , 4 , 0) y vector director $\vec{v}$ (0 , 0 , 1), la ecuación de la recta será,
ecuación paramétrica:

$$\begin{cases} x = 4 + 0\lambda \\ y = 4 + 0\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \quad \textit{simplificando} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 4 \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

ecuación continua:

$$\frac{x-4}{0} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-0}{1}$$

b) Q es un punto de la recta r de ecuación x = y = 4, luego las coordenadas de Q serán (4 , 4 , λ), siendo λ un número real.

$$Plano, \pi, \ que \left\langle \begin{array}{l} pasa \ por \ los \ puntos \ P(0,0,12) \ y \ Q(4,4,\lambda) \\ y \\ \perp \ recta \ s \ que \ pasa \ por \left\langle \begin{array}{l} O(0,0,0) \\ Q(4,4,\lambda) \end{array} \right. \rightarrow \ \vec{v}_s(4,4,\lambda) \end{array} \right.$$

$$\pi \perp s \quad \rightarrow \quad \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda)$$

$$como \ P \ y \ Q \in \pi \quad \rightarrow \quad \vec{PQ} \perp \vec{n}_\pi \quad \rightarrow \quad \vec{PQ} \, . \, \vec{n}_\pi = 0$$

$$\vec{PQ} = (4,4,\lambda - 12)$$

$$\vec{PQ} \, . \, \vec{n}_\pi = (4,4,\lambda - 12) \, . \, (4,4,\lambda) = 16 + 16 + \lambda^2 - 12\lambda = \lambda^2 - 12\lambda + 32$$

$$luego \quad \lambda^2 - 12\lambda + 32 = 0$$

$$\lambda = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.1.32}}{2.1} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \dfrac{12+4}{2} = 8 \\ \dfrac{12-4}{2} = 4 \end{array} \right.$$

Para $\lambda = 8$

$$\vec{n}_\pi = (4,4,8) \approx (1,1,2) \quad \rightarrow \quad \pi : \quad x + y + 2z + D = 0$$

$$P(0,0,12) \in \pi \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 2 \, . \, 12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 24 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -24$$

$$luego \quad \pi : x + y + 2z - 24 = 0$$

Para $\lambda = 4$

$\vec{n}_{\pi} = (4,4,4) \approx (1,1,1) \quad \rightarrow \quad \pi: \quad x + y + z + D = 0$

$P(0,0,12) \in \pi \quad \rightarrow \quad 0 + 0 + 12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad 12 + D = 0 \quad \rightarrow \quad D = -12$

luego $\pi : x + y + z - 12 = 0$

Por lo tanto el plano buscado puede ser: $x + y + 2z - 24 = 0$ *o* $x + y + z - 12 = 0$

EJERCICIO A

PROBLEMA 3. Consideramos los planos

$$\pi_1 : \quad x + y - 6 = 0$$
$$\pi_2 : \quad 2x + 4y + \lambda z + 2 = 0$$

donde λ es un parámetro real. Se pide:

a) Determinar las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos π_1 y π_2 cuando $\lambda = 4$. *(1,5 puntos)*

b) Calcular razonadamente λ para que los planos π_1 y π_2 se corten formando un ángulo de 45º. *(1,8 puntos)*

Solución:

a) Para $\lambda = 4$ el plano π_2 será: 2 x + 4 y + 4 z + 2 = 0; simplificando por 2 queda x + 2 y + 2 z + 1 = 0

La ecuación de la recta r intersección de estos dos planos será, en forma implícita,

$$r : \begin{cases} x + y - 6 = 0 \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r las obtenemos resolviendo el sistema anterior,

$$como \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \text{ usamos como incógnitas principales } x \text{ e } y,$$

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \qquad *(-1) \begin{cases} -x - y = -6 \\ x + 2y = -1 - 2z \end{cases} \quad \text{sumando} \quad y = -7 - 2z$$

sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación, x – 7 – 2 z = 6; despejando x, x = 13 + 2 z

Las ecuaciones paramétricas de r serán,

$$r : \begin{cases} x = 13 + 2\mu \\ y = -7 - 2\mu \quad \mu \in \Re \\ z = \mu \end{cases}$$

b) π_1 y π_2 se cortarán formando un ángulo de 45º cuando sus vectores ortogonales también lo formen,

$\vec{n_1}(1,1,0)$ *y* $\vec{n_2}(2,4,\lambda)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{n_1},\vec{n_2}}\right) = \frac{\vec{n_1}\ \vec{n_2}}{\left|\vec{n_1}\right|\left|\vec{n_2}\right|}$$

$$\cos 45º = \frac{(1,1,0)\ (2,4,\lambda)}{\sqrt{1+1}\ \sqrt{4+16+\lambda^2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2+4}{\sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2}}$$

$$\sqrt{2}\ \sqrt{2}\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$2\ \sqrt{20+\lambda^2} = 12$$

$$\sqrt{20+\lambda^2} = 6$$

Elevando ambos miembros de la igualdad al cuadrado,

$$20 + \lambda^2 = 36 \rightarrow \lambda^2 = 16 \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{16} \rightarrow \lambda = \pm 4$$

Comprobamos las soluciones obtenidas en la ecuación irracional

Para $\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+4^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6$ *Sí*

Para $\lambda = -4 \quad \rightarrow \quad \sqrt{20+(-4)^2} = 6; \quad \sqrt{20+16} = 6; \quad \sqrt{36} = 6$ *Sí*

Ambos planos se cortarán formando un ángulo de 45º cuando $\lambda = -4$ *o* $\lambda = 4$.

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dado el plano definido por la ecuación $\pi: \; 8x-4y+z=3$, hallar
a) La ecuación de la recta perpendicular al plano π que pasa por el punto P(1,-3,7), expresada como la intersección de dos planos. (*1 punto*)
b) La distancia del punto P al plano π. (*0,8 puntos*)
c) Las ecuaciones de los planos que distan 3 unidades del plano π. (*1,5 puntos)*

Solución:

a) *Como la recta debe ser perpendicular al plano, el vector ortogonal del plano será director de la recta,*

$\vec{n_\pi}\,(8,-4,1)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r serán,

$$r:\begin{cases} x=1+8\lambda \\ y=-3-4\lambda \quad \lambda\in\Re \\ z=7+\lambda \end{cases}$$

La ecuación continua,

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z-7}{1}$$

A partir de esta ecuación obtenemos la de dos planos cuya intersección será la recta r,

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{y+3}{-4} \\ \dfrac{x-1}{8}=\dfrac{z-7}{-1} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x+4=8y+24 \\ x-1=8z-56 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -4x-8y=20 \\ x-8z=-55 \end{cases}$$

La ecuación de la recta expresada como la intersección de dos plano es: (simplificamos la 1ª ecuación)

$$r:\begin{cases} x+2y=-5 \\ x-8z=-55 \end{cases}$$

b)

$$d(P,\pi)=\frac{|8\,.1-4\,(-3)+7-3|}{\sqrt{8^2+(-4)^2+1^2}}=\frac{|8+12+7-3|}{\sqrt{64+16+1}}=\frac{24}{\sqrt{81}}=\frac{24}{9}=\frac{8}{3}\,u.l.$$

c) *Los planos que distan 3 unidades del plano π son paralelos a él, su ecuación general será de la forma:* *$8x-4y+z=D$*

Como los dos planos son paralelos $d(\pi,\pi_1)=d(P_\pi,\pi_1)$

Busquemos un punto del plano π, $x=0$, $y=0$ luego $z=3$

$$d(\pi,\pi_1)=d(P_\pi,\pi_1)=d((0,0,3),\pi_1)=\frac{|3-D|}{\sqrt{64+16+1}}=\frac{|3-D|}{\sqrt{81}}=\frac{|3-D|}{9}$$

Luego $3=\dfrac{|3-D|}{9}$

$$27=|3-D| \;\rightarrow\; \begin{cases} 3-D=27 \;\rightarrow\; D=-24 \\ 3-D=-27 \;\rightarrow\; D=30 \end{cases}$$

Por lo que hay dos planos que distan 3 unidades del plano π, son los planos $8x-4y+z=-24$ y $8x-4y+z=30$

EJERCICIO A

PROBLEMA 4. En el espacio $\Re^3$, se consideran el punto P = (3,2,3) y la recta r intersección de los planos de ecuaciones: x + 3 y – 4 z = 0 y x + 2 y – 2 z = 1. Se pide determinar:
a) La distancia *d* del punto P a la recta r (*1,3 puntos*).
b) Los puntos M y N de la recta r que cumplan que su distancia al punto P es $\sqrt{5}\,d$ *(2,3 puntos).*

Solución:
a) El cálculo de la distancia de un punto a una recta lo realizamos mediante la fórmula:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}$$

siendo P_r un punto de la recta r
$\overrightarrow{v_r}$ el vector director de r

Para obtener P_r y $\overrightarrow{v_r}$ pasamos la ecuación de r a paramétricas.

$$r:\begin{cases}x+3y-4z=0\\x+2y-2z=1\end{cases}\qquad\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}=2-3=-1\neq 0$$

Planteamos el sistema, $\begin{cases}x+3y=4z\\x+2y=1+2z\end{cases}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}4z&3\\1+2z&2\end{vmatrix}}{-1}=\frac{8z-3-6z}{-1}=\frac{2z-3}{-1}=3-2z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1&4z\\1&1+2z\end{vmatrix}}{-1}=\frac{1+2z-4z}{-1}=\frac{1-2z}{-1}=-1+2z$$

Luego $r:\begin{cases}x=3-2\lambda\\y=-1+2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\quad\lambda\in\Re\quad\Rightarrow\quad\begin{array}{l}P_r(3,-1,\,0)\\\overrightarrow{v_r}(-2,2,1)\end{array}$

$$\overrightarrow{PP_r}=(3,-1,0)-(3,2,3)=(0,-3,-3)$$

$$\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}\vec i&\vec j&\vec k\\0&-3&-3\\-2&2&1\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}-3&-3\\2&1\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}0&-3\\-2&1\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}0&-3\\-2&2\end{vmatrix}=3\,\vec i+6\,\vec j-6\,\vec k=(3,6,-6)$$

$$\left|\overrightarrow{PP_r}\times\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{3^2+6^2+(-6)^2}=\sqrt{9+36+36}=\sqrt{81}=9$$

$$\left|\overrightarrow{v_r}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\sqrt{4+4+1}=\sqrt{9}=3$$

Finalmente $d(P,r)=\frac{9}{3}=3\,u.\,l.$

b) Un punto de la recta r será $(3-2\lambda,-1+2\lambda,\lambda)\quad\lambda\in\Re$ *Buscamos puntos de r que cumplan*

$$d(\,(3-2\lambda,-1+2\lambda,\lambda)\,,\,(3,2,3)\,)=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(3-2\lambda-3)^2+(-1+2\lambda-2)^2+(\lambda-3)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{(-2\lambda)^2+(-3+2\lambda)^2+(\lambda-3)^2}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{4\lambda^2+9-12\lambda+4\lambda^2+\lambda^2-6\lambda+9}=3\sqrt{5}$$

$$\sqrt{9\lambda^2 - 18\lambda + 18} = 3\sqrt{5}$$

$$9\lambda^2 - 18\lambda + 18 = 45 \quad \rightarrow \quad 9\lambda^2 - 18\lambda - 27 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{matrix} \right.$$

$$para \quad \lambda_1 = 3 \quad \rightarrow \quad M(5,-3,-1)$$
$$\lambda_2 = -1 \quad \rightarrow \quad N(-3,5,3)$$

c) El área del triángulo de vértices P(3,2,3), M(5,-3,-1) y N(-3,5,-3) la obtenemos mediante la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{PM} \times \vec{PN}\right|$$

$$\vec{PM}(2,-5,-4) \qquad y \qquad \vec{PN}(-6,3,0)$$

$$\vec{PM} \times \vec{PN} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -5 & -4 \\ -6 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = 12\,\vec{i} - 24\,\vec{j} - 24\,\vec{k} = (12,-24,-24)$$

$$\left|\vec{PM} \times \vec{PN}\right| = \sqrt{12^2 + (-24)^2 + (-24)^2} = \sqrt{12^2 + 4\,.\,12^2 + 4\,.\,12^2} = \sqrt{9\,.\,12^2} = 3\,.\,12 = 36$$

$$Finalmente \quad A = \frac{1}{2}36 = 18\ u.\ a.$$

EJERCICIO B

PROBLEMA 4. Sean π y π´ los planos del espacio $\Re^3$, determinados del modo siguiente: el plano π pasa por los puntos (0,2,1), (3,-1,1) y (1,-1,5) y el plano π´ pasa por los puntos (3,0,2), (2,1,1) y (5,4,-2). Se pide calcular:
a) Una ecuación paramétrica de la recta *r* intersección de los planos π y π´ (*1,3 puntos*).
b) El ángulo α que forman los planos π y π´ (*0,7 puntos*).
c) La ecuación del plano que contiene a la recta *r* y forma un ángulo de 90 grados con el plano π (*1,3 puntos*).

Solución:
a) En primer lugar calculamos las ecuaciones generales de los dos planos.
Como de cada plano conocemos tres puntos, podemos formar dos vectores que, si no son paralelos, serán directores del plano.

Plano π,

$$\vec{u} = (3,-1,1)-(0,2,1) = (3,-3,0)$$
$$\vec{v} = (1,-1,5)-(0,2,1) = (1,-3,4)$$
$\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos*

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ -3 & -3 & y-2 \\ 0 & 4 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad x\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (z-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} = 0$$
$$-12x-(y-2)12+(z-1)(-9+3)=0$$
$$-12x-12y+24-6z+6=0$$
$$-12x-12y-6z+30=0 \quad \rightarrow \quad 2x+2y+z-5=0$$

Plano π´,

$$\vec{u} = (2,1,1)-(3,0,2) = (-1,1,-1)$$
$$\vec{v} = (5,4,-2)-(3,0,2) = (2,4,-4)$$
$\vec{u}$ *y* $\vec{v}$ *no son paralelos*

La ecuación del plano se obtiene:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & x-3 \\ 1 & 4 & y \\ -1 & -4 & z-2 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (x-3)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$$
$$(x-3)(-4+4)-y(4+2)+(z-2)(-4-2)=0$$
$$-6y-6z+12=0$$
$$y+z-2=0$$

La ecuación de la recta r es: $\begin{cases} 2x+2y+z-5=0 \\ y+z-2=0 \end{cases}$ *La ecuación paramétrica de r la encontramos resolviendo este sistema.*

Como $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ *las incógnitas principales son x e y*

$$\begin{cases} 2x+2y=5-z \\ y=2-z \end{cases}$$
$$2x+2(2-z)=5-z \quad \rightarrow \quad 2x+4-2z=5-z \quad \rightarrow \quad 2x=-4+2z+5-z$$
$$2x=1+z \quad \rightarrow \quad x=\frac{1+z}{2}$$

La ecuación paramétrica de r:
$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \Re$$

$b)$ *Siendo* $\vec{n}_\pi$ *un vector ortogonal al plano* π, *si* $\alpha = ang(\pi, \pi')$ $\rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\left|\vec{n}_\pi\ \vec{n}_{\pi'}\right|}{\left|\vec{n}_\pi\right|\left|\vec{n}_{\pi'}\right|}$

$\vec{n}_\pi = (2,2,1)$ *y* $\vec{n}_{\pi'} = (0,1,1)$ *luego* $\cos\alpha = \dfrac{|(2,2,1)\,(0,1,1)|}{|(2,2,1)|\,|(0,1,1)|} = \dfrac{|2+1|}{\sqrt{4+4+1}\,\sqrt{1+1}} = \dfrac{3}{3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Luego $\alpha = 45^\circ$ *o* $\alpha = \dfrac{\pi}{4} rds$

$c)$ *Buscamos un plano* γ *tal que* $r \in \gamma$ *y* $(\widehat{\gamma, \pi}) = 90^\circ$

como γ *y* π *deben ser* $\perp \rightarrow \vec{n}_\pi$ *será vector director de* γ

como $r \in \gamma$ $\Rightarrow \vec{v}_r$ *es director de* γ

P_r *es punto de* γ

De γ *conocemos* $\begin{cases} \vec{u}\ (2,2,1) \\ \vec{v}\left(\dfrac{1}{2},-1,1\right) \\ P\left(\dfrac{1}{2},2,0\right) \end{cases}$ *la ecuación de* γ $\begin{vmatrix} 2 & 1/2 & x-1/2 \\ 2 & -1 & y-2 \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)3 - (y-2)\,\frac{3}{2} + z\,(-3) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - \frac{3}{2} - \frac{3y}{2} + 3 - 3z = 0 \quad \rightarrow \quad 3x - \frac{3y}{2} - 3z + \frac{3}{2} = 0$$

$$6x - 3y - 6z + 3 = 0 \quad \rightarrow \quad 2x - y - 2z + 1 = 0$$

La ecuación del plano $\gamma : 2x - y - 2z + 1 = 0$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. a) Obtener el plano que pasa por el punto P(-2,4,-3) y es perpendicular a la recta r : (x,y,z) = (1,2,0) + t (1,-2,1) *(1 punto).*
b) Calcular la distancia entre el punto P y la recta r *(2,3 puntos).*

Solución:

a) *Como el plano buscado es perpendicular a la recta r , el vector director de la recta (1,-2,1) será ortogonal al plano, por lo tanto la ecuación del plano será* $x - 2y + z + D = 0$
el plano debe pasar por el punto P(-2,4,-3), luego $-2 - 2 \cdot 4 + (-3) + D = 0$, $-2 - 8 - 3 + D = 0$
$-13 + D = 0$, *es decir* $D = 13$
El plano tendrá de ecuación $x - 2y + z + 13 = 0$

b) *Para calcular la distancia del punto P a la recta r utilizamos la siguiente fórmula*

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{d}_r\right|}{\left|\overrightarrow{d}_r\right|}$$ *siendo R un punto de la recta r y* $\overrightarrow{d}_r$ *el vector director de r.*

En nuestro problema R(1,2,0), P(-2,4,-3), $\overrightarrow{RP}(-3,2,-3)$ *y* $\overrightarrow{d}_r(1,-2,1)$.

$$\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{d}_r = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k} = (-4,0,4)$$

$$\left|\overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{d}_r\right| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{d}_r\right| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Por lo tanto, $d(P,r) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{2}\sqrt{6}}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \dfrac{4\sqrt{12}}{6} = \dfrac{4 \cdot 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$ *u.l.*

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Consideramos los puntos: A = (1,0,0), B = (0,1,0), C = (0,0,1) y D = (2,1,2). Se pide

a) Hallar el área del triángulo de vértices B, C y D (*1,1 puntos*).
b) Calcular el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D (*1,1 puntos*).
c) Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por los puntos B, C y D (*1,1 puntos*).

Solución:

a) *Para calcular el área del triángulo de vértices B, C y D usamos la fórmula*

$$A=\frac{1}{2}\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|$$

Calculamos los vectores indicados,

$$\vec{BC}=(0,0,1)-(0,1,0)=(0,-1,1) \qquad y \qquad \vec{BD}=(2,1,2)-(0,1,2)=(2,0,2)$$

$$\vec{BC}\times\vec{BD}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}0 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}$$

$$\left|\vec{BC}\times\vec{BD}\right|=\sqrt{(-2)^2+2^2+2^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

Luego $A=\frac{1}{2}2\sqrt{3}=\sqrt{3}$ *u. a.*

b) *El volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D se obtiene como sigue*

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1 & z_1\\ 1 & x_2 & y_2 & z_2\\ 1 & x_3 & y_3 & z_3\\ 1 & x_4 & y_4 & z_4\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=(C_1-C_2)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{6}(-1-1-2)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

El volumen del tetraedro es $\frac{2}{3}$ *u.v.*

c) *Dado un punto* $A(x_0,y_0,z_0)$ *y un plano* π: $a\,x+b\,y+c\,z+d=0$

$$d(a,\pi)=\frac{\left|a\,x_0+b\,y_0+c\,z_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Cálculo del plano π:

El plano π pasa por los puntos B, C y D; obtenemos los vectores $\vec{BC}$ *y* $\vec{BD}$ *y calculamos su producto vectorial (ya obtenido en el apartado a)), el vector que obtenemos (-2,2,2) es perpendicular al plano π.*

Del plano π conocemos: un punto, por ejemplo, B (0,1,0) y
un vector normal al plano (-2,2,2)

La ecuación del plano π será:

$$-2\,(x-0)+2\,(y-1)+2\,(z-0)=0$$
$$-2\,x+2\,y-2+2\,z=0$$
$$-\,x+\,y+z-1=0$$

Finalmente,

$$d(a,\pi)=\frac{\left|-1+0+0-1\right|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\frac{\left|-2\right|}{\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ u.\,l.$$

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. Un paralelepípedo rectangular (u ortoedro) tiene tres de sus aristas sobre las rectas:
$l:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, $m:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases}$ y $n:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$, y uno de sus vértices es (12, 21, -11). Se pide:
a) Hallar los vértices restantes *(2,5 puntos).* b) Calcular su volumen *(0,8 puntos).*

Solución:
Obtengamos las ecuaciones paramétricas de las rectas l, m y n.

$$l:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \quad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$$

la recta l es el eje Z

$$m:\begin{cases} x-2y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2y \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \quad \mu\in\Re \\ z=0 \end{cases}$$

$$n:\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2x \\ z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \quad \gamma\in\Re \\ z=0 \end{cases}$$

las rectas m y n están en el plano z = 0

Obtengamos los puntos de intersección de estas tres rectas,

$$l\cap m \equiv \begin{cases} 0=2\mu \\ 0=\mu \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\mu=0 \rightarrow l\cap m=(0,0,0)$$

$$l\cap n \equiv \begin{cases} 0=\gamma \\ 0=-2\gamma \\ \lambda=0 \end{cases} \rightarrow \lambda=\gamma=0 \rightarrow l\cap n=(0,0,0)$$

$$m\cap n \equiv \begin{cases} 2\mu=\gamma \\ \mu=-2\gamma \\ 0=0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2(-2\gamma)=\gamma \rightarrow -4\gamma=\gamma \rightarrow \gamma=0 \\ \rightarrow \mu=0 \rightarrow m\cap n=(0,0,0) \end{matrix}$$

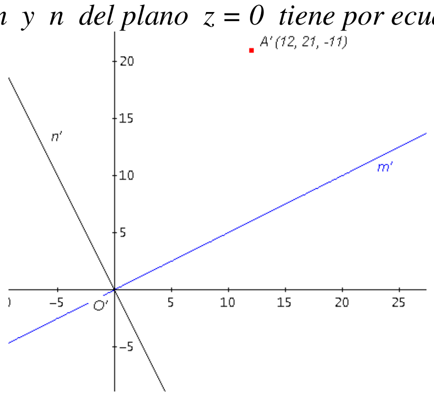
Es decir, el punto O(0,0,0) es un vértice del ortoedro. Como las rectas m y n están en el plano z = 0, una cara del ortoedro está en este plano.

Una arista del ortoedro está en el eje Z, el vértice A´(12,21,-11) no está en el plano z = 0, por lo tanto otra de sus caras, la opuesta a la que está en el plano z = 0, está en el plano z = -11.

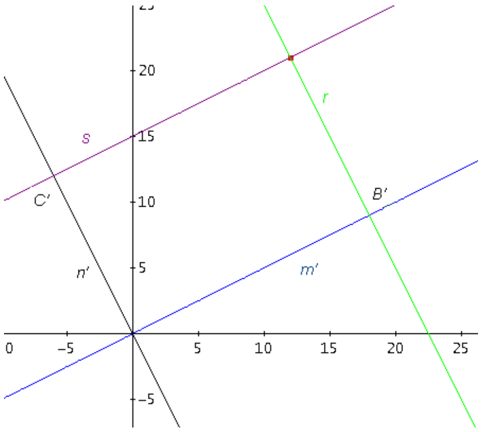
En el plano z = -11 los vértices del ortoedro serán: el conocido (12,21,-11), el que está en la arista l que será O'(0,0,-11) y los otros dos los obtenemos como sigue,

en el plano z = -11 las rectas paralelas a m y n del plano z = 0 tiene por ecuaciones:

$$m':\begin{cases} x=2\mu \\ y=\mu \\ z=-11 \end{cases} \qquad n':\begin{cases} x=\gamma \\ y=-2\gamma \\ z=-11 \end{cases}$$ *gráficamente*



para encontrar los otros dos vértices procedemos de la siguiente forma,



recta r que pasa por A'(12, 21, -11) y es paralela a n' $\quad r:\begin{cases} x=12+\lambda \\ y=21-2\lambda \\ z=-11 \end{cases}$

B´ punto de corte entre r y m´

$$\begin{cases} 12+\lambda=2\mu \\ 21-2\lambda=\mu \\ -11=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda-2\mu=-12 \\ -2\lambda-\mu=-21 \end{cases} \rightarrow \quad 2*1^{a} \quad \begin{cases} 2\lambda-4\mu=-24 \\ -2\lambda-\mu=-21 \end{cases}$$

$$sumando \quad \rightarrow \quad -5\mu=-45 \quad \rightarrow \quad \mu=9 \quad \Rightarrow \quad B´(18,9,-11)$$

recta s que pasa por A'(12, 21, -11) y es paralela a m' $\quad s:\begin{cases} x=12+2\lambda \\ y=21+\lambda \\ z=-11 \end{cases}$

C´ punto de corte entre s y n´

$$\begin{cases} 12+2\lambda=\gamma \\ 21+\lambda=-2\gamma \\ -11=-11 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\lambda-\gamma=-12 \\ \lambda+2\gamma=-21 \end{cases} \rightarrow \quad 2.1^{a} \quad \begin{cases} 4\lambda-2\gamma=-24 \\ \lambda+2\gamma=-21 \end{cases}$$

$$sumando \quad \rightarrow \quad 5\lambda=-45 \quad \rightarrow \quad \lambda=-9 \quad \Rightarrow \quad C´(-6,12,-11)$$

Los vértices correspondientes en el plano z = 0 serán:
O (0, 0, 0), A (12, 21, 0), B (18, 9, 0) y C(-6, 12, 0)

Los ocho vértices del ortoedro son:

O (0, 0, 0)

A (12, 21, 0)

B (18, 9, 0)

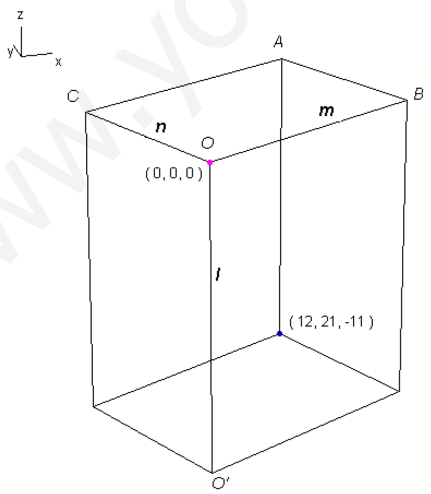
C (-6, 12, 0)

O' (0, 0, -11)

A' (12, 21, -11)

B' (18, 9, -11)

C' (-6, 12, -11)



b) El ortoedro está definido por los vectores

$\overrightarrow{OO'}=(0,0,-11) \quad \overrightarrow{OB}=(8,9,0) \quad \overrightarrow{OC}=(-6,12,0)$

$$Luego \quad V=\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 & -11 \\ 8 & 9 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{vmatrix}\right|=\left|-11\begin{vmatrix} 18 & 9 \\ -6 & 12 \end{vmatrix}\right|=\left|-11\,(18\,.\,12+6\,.\,9)\right|=\left|-11\,.\,270\right|=2970$$

Es decir V = 2970 u^3

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. Dados los planos $\pi: 5x - y - z = 0$, $\sigma: x + y - z = 0$ y el punto P (9, 4, -1), determinar:

a) La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π y a σ (*1,5 puntos*).
b) El punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ (*1,8 puntos*).

Solución:

a) *Obtenemos los vectores perpendiculares a los planos dados,*

$\vec{u}\,(5,-1,-1)$ *luego* $\vec{u} \perp \pi$; $\vec{v}\,(1,1,-1)$ *luego* $\vec{v} \perp \sigma$

Para obtener un vector perpendicular a los planos π *y* σ *calculamos el producto vectorial de los vectores anteriores,*

$$\vec{u}\times\vec{v} \perp \begin{cases}\vec{u}\\ \vec{v}\end{cases} \Rightarrow \quad \vec{u}\times\vec{v} \perp \begin{cases}\pi\\ \sigma\end{cases}$$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = \vec{i}\,(1+1) - \vec{j}\,(-5+1) + \vec{k}\,(5+1) =$$

$$= (2, 4, 6)$$

El plano de ecuación $2x + 4y + 6z + D = 0$ *será perpendicular a los planos* π *y* σ*, como debe pasar por el punto (9, 4, -1),*

$2 \cdot 9 + 4 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + D = 0$

$18 + 16 - 6 + D = 0$

$D = -28$

El plano pedido es $2x + 4y + 6z - 28 = 0$*, ecuación que podemos simplificar por 2,*

$x + 2y + 3z - 14 = 0$

La ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a π ***y a*** σ ***es:*** $x + 2y + 3z - 14 = 0$

b) *Para resolver este apartado seguiremos el siguiente proceso:*

1º) Calculo del plano que contiene a P y es $\perp$ *a* $r \equiv \psi$

2º) Calculo del punto de corte entre r y $\psi \equiv M$

3º) Calculo del simétrico de P, P', sabiendo que M es el punto medio entre P y P'.

1º) El vector director de r será perpendicular a ψ

Conocemos la recta r como intersección de dos planos, calculemos su ecuación paramétrica,

$$r: \begin{cases}5x - y - z = 0\\ x + y - z = 0\end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix}5 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix} = 5 + 1 = 6 \neq 0 \quad \begin{cases}5x - y = z\\ x + y = z\end{cases}$

$$sumando: \quad 6x = 2z \quad \rightarrow \quad x = \frac{z}{3}$$

$$susttituyendo \ en \ la \ 2^{a} \ ecuación: \ \frac{z}{3} + y = z \rightarrow y = z - \frac{z}{3} = \frac{2z}{3}$$

La ecuación parámetrica de r: $\begin{cases}x = \frac{1}{3}\lambda\\ y = \frac{2}{3}\lambda \quad \lambda \in \Re\\ z = \lambda\end{cases}$

y el vector director de r: $\vec{v}_r = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ *o bien* $\vec{v}_r = (1,2,3)$

La ecuación del plano ψ será $x + 2y + 3z + D = 0$, como P está en el plano:
$9 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) + D = 0$
$9 + 8 - 3 + D = 0$
$d = -14$
La ecuación del plano ψ es $x + 2y + 3z - 14 = 0$

2º) El punto de corte entre la recta r y el plano ψ lo encontramos resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de r y ψ,

$$\begin{cases} x+y-z=0 \\ 5z-y-z=0 \\ x+2y+3z=14 \end{cases} \quad \textit{Como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3-10-1-1-15+2=-28 \neq 0 \quad \textit{es un S.C.D.}$$

lo resolvemos por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-1)}{-28} = \frac{-28}{-28} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{-14(-1+5)}{-28} = \frac{-56}{-28} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \end{vmatrix}}{-28} == \frac{14\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{14(-1-5)}{-28} = \frac{14(-6)}{-28} = 3$$

Por lo tanto M (1, 2, 3)

3º) Por ser M el punto medio del segmento P P', se cumple, $M = \dfrac{P+P'}{2}$

luego P' = 2 M – P = 2 (1, 2, 3) – (9, 4, -1) = (2, 4, 6) – (9, 4, -1) = (-7, 0, 7)

Finalmente, ***el punto simétrico de P respecto de la recta r, intersección de los planos π y σ, es (-7, 0, 7)***

EJERCICIO A

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- La recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas 2 x – 2 y – z = 9 y 4 x – y + z = 42.
- Y la recta ***s*** que pasa por los puntos (1,3,-4) y (3,-5,-2). Se pide:

a) Calcular las ecuaciones paramétricas de la recta ***r*** **(0,8 puntos)** y de la recta ***s*** **(0,3 puntos).**
b) Justificar que las rectas ***r*** y ***s*** se cruzan **(0,8 puntos)**.
c) Calcular un vector direccional de la recta ***t***, perpendicular común a las rectas ***r*** y ***s***, **(0,4 puntos)** y **calcular** el punto *P* de intersección de las rectas ***s*** y ***t*** **(1 punto)**.

Solución:
a) Ecuaciones paramétricas de la recta r.
Resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 2x-2y-z=9 \\ 4x-y+z=42 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2+8=6\neq 0$

usaremos como incógnitas principales x e y

$$\begin{cases} 2x-2y=9+z \\ 4x-y=42-z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 9+z & -2 \\ 42-z & -1 \end{vmatrix}}{6}=\frac{-9-z+84-2z}{6}=\frac{75-3z}{6}=\frac{25-z}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 9+z \\ 4 & 42-z \end{vmatrix}}{6}=\frac{84-2z-36-4z}{6}=\frac{48-6z}{6}=8-z$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son: $\begin{cases} x=\dfrac{25-\lambda}{2} \\ y=8-\lambda \qquad \lambda\in\Re \\ z=\lambda \end{cases}$

Ecuaciones paramétricas de s.

$$\vec{v}_s=(3,-5,-2)-(1,3,-4)=(2,-8,2)\approx(1,-4,1)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son: $\begin{cases} x=1+\mu \\ y=3-4\mu \qquad \mu\in\Re \\ z=-4+\mu \end{cases}$

b)

$\vec{v}_r=\left(\dfrac{-1}{2},-1,1\right)$ *Estos vectores no tiene sus coordenadas proporcionales* $\dfrac{-1}{-4}\neq\dfrac{1}{1}$

$\vec{v}_s=(1,-4,1)$ *por lo que las rectas r y s no son paralelas.*

Veamos la posición relativa de estas dos rectas mediante el cálculo del siguiente determinante,

$$\begin{vmatrix} \vec{v_r} & \vec{v_s} & P_r - P_s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{25}{2}-1 \\ -1 & -4 & 8-3 \\ 1 & 1 & 0-(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & 1 & \frac{23}{2} \\ -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2 - C_1 \\ C_3 - 4C_1 \\ = \end{matrix} \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{25}{2} \\ -1 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & \frac{25}{2} \\ -3 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 25 \\ -3 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(27+75) = 51 \neq 0$$

Por lo tanto las rectas r y s se cruzan.

c) La recta perpendicular común a r y s tiene como vector director,

$$\vec{v_t} = \vec{v_r} \wedge \vec{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} -1/2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} -1/2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}(-1+4) - \vec{j}\left(-\frac{1}{2}-1\right) + \vec{k}(2+1) =$$

$$= 3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

luego $\vec{v_t} = \left(3, \frac{3}{2}, 3\right) \approx \left(1, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (2,1,2)$

Calculemos el punto P intersección de las rectas s y t.

Sean $P_r\left(\frac{25-\lambda}{2}, 8-\lambda, \lambda\right)$ *y* $P_s(1+\mu, 3-4\mu, -4+\mu)$ *puntos cualesquiera de las rectas r y s, respectivamente. Por ser t la perpendicular común a r y s buscamos el punto P imponiendo la condición de que los vectores $\vec{P_rP_s}$ y $\vec{v_t}$ deben ser paralelos.*

$$\vec{P_rP_s} = \left(1+\mu - \frac{25-\lambda}{2}, 3-4\mu-(8-\lambda), -4+\mu-\lambda\right)$$

$$\vec{v_t} = (2,1,2)$$

luego $$\frac{1+\mu-\frac{25-\lambda}{2}}{2} = \frac{3-4\mu-(8-\lambda)}{1} = \frac{-4+\mu-\lambda}{2}$$

que da lugar a siguiente sistema,

$$\begin{cases} \dfrac{1+\mu-\frac{25-\lambda}{2}}{2} = \dfrac{-4+\mu-\lambda}{2} \\ \dfrac{3-4\mu-(8-\lambda)}{1} = \dfrac{-4+\mu-\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1+\mu-\dfrac{25-\lambda}{2} = -4+\mu-\lambda \\ 6-8\mu-16+2\lambda = -4+\mu-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2+2\mu-25+\lambda = -8+2\mu-2\lambda \\ -8\mu-\mu+2\lambda+\lambda = -4-6+16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\mu - 2\mu + \lambda + 2\lambda = -8 - 2 + 25 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda = 15 \\ -9\mu + 3\lambda = 6 \end{cases}$$

de 1^{a} $\rightarrow$ $\lambda = \dfrac{15}{3} = 5$

en 2^{a} $\rightarrow$ $-9\mu + 3\,.\,5 = 6$

$$-9\mu + 15 = 6$$

$$-9\mu = 6 - 15$$

$$-9\mu = -9$$

$$\mu = \frac{-9}{-9} = 1$$

El punto de la recta s buscado será: (1 + 1 , 3 – 4 . 1 , – 4 + 1) = (2 , – 1 , – 3)

Luego P (2 , – 1 , – 3)

EJERCICIO B

PROBLEMA 2. En el espacio se consideran:

- El plano **π** que pasa por los puntos (11, 1, 2), (5, 7, 5) y (7, –1, –2).
- Y la recta ***r*** intersección de los planos de ecuaciones implícitas $x + y + z = 15$ y $2x - 7y + 2z = 3$.

a) Calcular la ecuación paramétrica de ***r*** **(0,6 puntos)** y la ecuación implícita del plano **π (0,4 puntos).**
b) Calcular el punto *P* intersección de ***r*** y **π (0,8 puntos)** y el ángulo **α** que determinan ***r*** y **π (0,5 puntos).**
c) Calcular los puntos *M* y *N* de la recta ***r*** cuya distancia al plano **π** es igual a 3 u.l. **(1 punto).**

Solución:
a) Ecuación paramétrica de r

$$r:\begin{cases} x+y+z=15 \\ 2x-7y+2z=3 \end{cases} \qquad \textit{como} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -7 \end{vmatrix} = -7-2=-9\neq 0$$

resolvemos el sistema de la recta r usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x+y=15-z \\ 2x-7y=3-2z \end{cases}$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 15-z & 1 \\ 3-2z & -7 \end{vmatrix}}{-9}=\frac{-105+7z-3+2z}{-9}=\frac{-108+9z}{-9}=12-z$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 15-z \\ 2 & 3-2z \end{vmatrix}}{-9}=\frac{3-2z-30+2z}{-9}=\frac{-27}{-9}=3$$

La ecuación paramétrica de la recta r será: $r:\begin{cases} x=12-\lambda \\ y=3 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad \lambda\in\Re$

Ecuación implícita del plano π
Punto (11 , 1 , 2)

Vectores directores: $\vec{v}=(11,1,2)-(5,7,5)=(6,-6,-3)\approx(2,-2,-1)$
$\vec{w}=(11,1,2)-(7,-1,-2)=(4,2,4)\approx(2,1,2)$

La ecuación implícita del plano π será,

$$\begin{vmatrix} x-11 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-11)\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}-(y-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}+(z-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-11)\,(-4+1)-(y-1)\,(4+2)+(z-2)\,(2+4)=0$$

$$(x-11)\,(-3)-(y-1)\,6+(z-2)\,6=0$$

$$-3x+33-6y+6+6z-12=0$$

$$-3x-6y+6z+27=0$$

simplificando por – 3
$x + 2y - 2z - 9 = 0$ es la ecuación del plano π.

b) P, punto de intersección de ***r*** *y* $\boldsymbol{\pi}$

Sustituimos las coordenadas de un punto cualquiera de la recta r en la ecuación del plano π

$(12-\lambda,3,\lambda)\in r$

$12-\lambda+2\,.\,3-2\lambda-9=0$

$12-\lambda+6-2\lambda-9=0$

$9-3\lambda=0$

$-3\lambda=-9 \quad\rightarrow\quad \lambda=\dfrac{-9}{-3}=3$

Por lo que el punto P será: (12 – 3 , 3 , 3) = (9 , 3 , 3)

Ángulo α que determinan r y π.

$de \quad r \quad \vec{v}_r=(-1,0,1)$

$de \quad \pi \quad el\ vector\ ortogonal \quad \vec{u}=(1,2,-2)$

$Sea \quad \alpha=(\widehat{r,\pi})$

$$sen\,\alpha=\frac{|\ (-1,0,1)\ (1,2,-2)\ |}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}\ \sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|-1-2|}{\sqrt{2}\ \sqrt{9}}=\frac{3}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$Luego \quad \alpha=\dfrac{\pi}{4}\ rds$

c)

$¿M,N\in r? \quad / \quad d(M,\pi)=d(N,\pi)=3$

$\pi: x+2y-2z-9=0$

$Sea \quad P\in r\rightarrow \quad P=(12-\lambda,3,\lambda)$

$$d(P,\pi)=\frac{|12-\lambda+2\,.\,3-2\lambda-9|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|9-3\lambda|}{3}$$

$$\frac{|9-3\lambda|}{3}=3 \quad\rightarrow\quad |9-3\lambda|=9 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} 9-3\lambda=9 \quad\rightarrow\quad -3\lambda=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=0 \\ 9-3\lambda=-9 \quad\rightarrow\quad -3\lambda=-18 \quad\rightarrow\quad \lambda=6 \end{cases}$$

$$Para \quad \begin{array}{l} \lambda=0 \quad\rightarrow\quad M(12,3,0) \\ \lambda=6 \quad\rightarrow\quad N(6,3,6) \end{array}$$

PROBLEMA A.2. Se pide obtener razonadamente:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O = (0, 0, 0), A = (6, – 3, 0) y B = (3, 0, 1). *(3 puntos)*

b) La ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (8, 7, – 2) y es perpendicular al plano π. *(3 puntos)*

c) El punto Q del plano π cuya distancia al punto P es menor que la distancia de cualquier otro punto del plano π al punto P. *(4 puntos)*

Solución:

a) La ecuación del plano π que pasa por los puntos O = (0, 0, 0), A = (6, – 3, 0) y B = (3, 0, 1).

A partir de los tres puntos del plano calculamos los dos vectores directores del plano:

$$\vec{OA} = (6,-3,0) - (0,0,0) = (6,-3,0)$$

$$\vec{OB} = (3,0,1) - (0,0,0) = (3,0,1)$$

y tomando como punto del plano, por ejemplo, O = (0, 0, 0), podemos calcular la ecuación del plano π

Ecuación paramétrica $\left\{\begin{array}{l} x = 0 + 6\lambda + 3\mu \\ x = 0 - 3\lambda + 0\mu \\ x = 0 + 0\lambda + \mu \end{array}\right. \quad \lambda, \mu \in \Re \quad \rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x = 6\lambda + 3\mu \\ x = -3\lambda \\ x = \mu \end{array}\right. \quad \lambda, \mu \in \Re$

Ecuación implícita $\begin{vmatrix} 6 & 3 & x-0 \\ -3 & 0 & y-0 \\ 0 & 1 & z-0 \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix} 6 & 3 & x \\ -3 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad -3x - 6y + 9z = 0,$

simplificando entre $-3, \quad x + 2y - 3z = 0$

b) Ecuación de la recta r que pasa por el punto P = (8, 7, – 2) y es perpendicular al plano π: x + 2 y – 3 z = 0

Como $r \perp \pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r = \vec{n}_\pi \quad \rightarrow \quad \vec{v}_r = (1, 2, -3)$

De la recta r tenemos $\left\{\begin{array}{l} Punto \quad P = (8,7,-2) \\ vector\ director \quad \vec{v}_r = (1, 2, -3) \end{array}\right.$

Por lo que:

Ecuación paramétrica: $\left\{\begin{array}{l} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \end{array}\right. \quad \lambda \in \Re$

Ecuación continua: $\dfrac{x-8}{1} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z+2}{-3}$

c) $¿Q \in \pi? \quad / \quad d(Q,P) \le d(P_\pi, P) \quad \forall P_\pi \in \pi$

Como $r \perp \pi$, *el punto Q será el de corte entre el plano π y la recta r.*

$$\begin{cases} r \\ \pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 8 + \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = -2 - 3\lambda \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$8 + \lambda + 2(7 + 2\lambda) - 3(-2 - 3\lambda) = 0$$
$$8 + \lambda + 14 + 4\lambda + 6 + 9\lambda = 0$$
$$14\lambda + 28 = 0$$
$$14\lambda = -28$$
$$\lambda = -2$$

Sustituyendo este valor de λ *en la ecuación de la recta*

$x = 8 - 2 = 6$

$y = 7 + 2(-2) = 3$

$z = -2 - 3(-2) = -2 + 6 = 4$

Por lo tanto $Q(6, 3, 4)$

PROBLEMA B.2. Dadas las dos rectas r y s de ecuaciones

$$r: \frac{x-4}{3} = \frac{y-4}{2} = z-4 \qquad y \qquad s: x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}.$$

se pide calcular razonadamente:

a) Las coordenadas del punto P de intersección de las rectas r y s. *(3 puntos)*
b) El ángulo que forman las rectas r y s. *(3 puntos)*
c) Ecuación implícita A x + B y + C z + D = 0 del plano π que contiene a las rectas r y s. *(4 puntos)*

Solución:

a) Punto P de intersección de las rectas r y s.

Escribamos las ecuaciones paramétricas de las rectas r y s,.

$$r: \begin{cases} x = 4+3\lambda \\ y = 4+2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 4+\lambda \end{cases} \qquad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = 2\mu \quad \mu \in \Re \\ z = 3\mu \end{cases}$$

Buscamos el punto de corte entre r y s resolviendo el sistema que se obtiene al igualar las ecuaciones de las rectas,

$$\begin{cases} 4+3\lambda = \mu \\ 4+2\lambda = 2\mu \\ 4+\lambda = 3\mu \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \\ \lambda - 3\mu = -4 \end{cases} \rightarrow A' = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{array}\right)$$

Estudiemos el rango de A´,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{matrix} f_2 - f_1 \\ f_3 - f_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \{ f_3 = 2\ x\ f_2 \} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6+2 = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A') = 2$$

Estudiemos el rango de A,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rang(A) = 2$$

Como $rang(A) = rang(A') = 2 = n^o$ *de incógnitas* $\rightarrow$ *Sistema Compatible* Determinado

Resolvemos el sistema usando las ecuaciones correspondientes al menor de orden 2 no nulo.

El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} 3\lambda - \mu = -4 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \end{cases} \quad \begin{matrix} -2\ x\ 1^a \\ 2^a \end{matrix} \begin{cases} -6\lambda + 2\mu = 8 \\ 2\lambda - 2\mu = -4 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $-4\lambda = 4 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1$

No es necesario que busquemos el valor de la otra incógnita.

Obtengamos las coordenadas del punto P (sustituyendo el valor de λ en la recta r),

x = 4 + 3 (– 1) = 1
y = 4 + 2 (– 1) = 2
z = 4 + (– 1) = 3

luego P = (1 , 2 , 3)

b)

$$(\widehat{r,s}) = \left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right)$$

Como $\vec{v}_r = (3,2,1)$ *y* $\vec{v}_s = (1,2,3)$

$$\cos\left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right) = \frac{\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s}{\left|\vec{v}_r\right| \cdot \left|\vec{v}_s\right|} = \frac{(3,2,1)\,(1,2,3)}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}\,\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{3+4+3}{\sqrt{14}\,\sqrt{14}} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$$

luego $\left(\widehat{\vec{v}_r,\vec{v}_s}\right) = 0'7752\ rds = 44'4153^{o}$

Finalmente $(\widehat{r,s}) = 0'7752\ rds = 44'4153^{o}$

c) Plano π *que contiene a las rectas r y s.*

Como las rectas r y s están en el plano π, entonces P (punto de corte entre r y s) es de π y los vectores directores de las rectas l serán del plano. La ecuación del plano podemos obtenerla como sigue:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x-1 \\ 2 & 2 & y-2 \\ 1 & 3 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

desarrollando por la tercera columna,

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-2)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$(x-1)\,4 - (y-2)\,8 + (z-3)\,4 = 0$, *simplificando entre 4,*

$(x-1) - (y-2)\,2 + (z-3) = 0$

$x - 1 - 2y + 4 + z - 3 = 0$

$x - 2y + z = 0$

Solución: $\pi \equiv x - 2y + z = 0$

PROBLEMA A.2. En el espacio se dan las rectas

$$r:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=2+\lambda \end{cases} \qquad y \qquad s:\begin{cases} x+2y-1=0 \\ 3y-z+2+\alpha=0 \end{cases}$$

Obtener **razonadamente**:

a) El valor de α para el que las rectas r y s están contenidas en un plano. *(4 puntos)*
b) La ecuación del plano que contiene a las rectas r y s para el valor de α obtenido en el apartado anterior. *(2 puntos)*
c) La ecuación del plano perpendicular a la recta r que contiene el punto (1, 2 , 1). *(4 puntos)*

Solución:
Previamente vamos a obtener los vectores directores de ambas rectas.

Como la ecuación de la recta r *está dada en forma paramétrica, sabemos que* $\vec{v_r}=(1,2,1)$
A partir de la ecuación de la recta s *, dada como intersección de dos planos, obtengamos la forma paramétrica Para ello de la primera ecuación despejamos la* x *y de la segunda la* z*:*

$$s:\begin{cases} x=1-2y \\ z=2+\alpha+3y \end{cases} \quad \text{luego} \quad \begin{cases} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=2+\alpha+3\mu \end{cases} \quad \text{por lo tanto} \quad \vec{v_s}=(-2,1,3)$$

a) Las rectas r *y* s *estarán contenidas en un plano si son paralelas o se cortan en un punto.*
Veamos si son paralelas, ¿son proporcionales sus vectores directores? ¿$\frac{1}{-2}=\frac{2}{1}=\frac{1}{3}$?

Como $\frac{1}{-2}\neq\frac{2}{1}$ *entonces los vectores no son proporcionales, las rectas no son paralelas.*
En consecuencia las rectas r *y* s *deben cortarse.*

Para que se corten el siguiente sistema debe tener solución, $\begin{cases} 3+\lambda=1-2\mu \\ -1+2\lambda=\mu \\ 2+\lambda=2+\alpha+3\mu \end{cases}$

Arreglamos el sistema considerando que las incógnitas son λ *y* μ, $\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \\ \lambda-3\mu=\alpha \end{cases}$. *Por ser un sistema de 2 incógnitas y 3 ecuaciones, para que tenga solución el determinante de la matriz ampliada debe ser nulo, es decir:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & \alpha \end{vmatrix}=0 \;\rightarrow\; -\alpha+12+2-2+3-4\alpha=0 \;\rightarrow\; -5\alpha+15=0 \;\rightarrow\; -5\alpha=-15 \;\rightarrow\; \alpha=\frac{-15}{-5}=3$$

Por lo tanto, para $\alpha=3$ *las rectas* r *y* s *están contenidas en un plano.*

b) $\alpha=3$. *Busquemos el punto de corte entre* r *y* s *resolviendo el sistema del apartado anterior.*

$\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \\ \lambda-3\mu=\alpha \end{cases}$, *como* $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-2-4=-5\neq 0$ *y* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}=0$ *(obtenido en el apartado anterior), el sistema es compatible y determinado. Resolvemos el sistema usando las ecuaciones primera y segunda (las que aportan el menor de orden 2 no nulo):*

$\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 2\lambda-\mu=1 \end{cases}$, *resolvámoslo por reducción, multiplicamos la segunda ecuación por 2:* $\begin{cases} \lambda+2\mu=-2 \\ 4\lambda-2\mu=2 \end{cases}$ *sumando ambas ecuaciones:* $5\lambda=0 \rightarrow \lambda=0$.

Sustituyendo este valor de λ *en la recta* r *obtendremos, P, el punto de corte buscado,* $\begin{cases} x = 3 + 0 = 3 \\ y = -1 + 2.0 = -1 \\ z = 2 + 0 = 2 \end{cases}$, *luego* $P(3, -1, 2)$.

La ecuación del plano que contiene a las rectas r *y* s *viene determinada por el punto P y los vectores directores de* r *y* s, $\vec{v_r}$ *y* $\vec{v_s}$. *La ecuación de este plano será:*

$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$, *desarrollando por la primera fila:* $(x-3)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (z-2)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$,

calculando los menores: $(x-3)(6-1) - (y+1)(3+2) + (z-2)(1+4) = 0$

$5(x-3) - 5(y+1) + 5(z-2) = 0$, *simplificando entre 5,*

$(x-3) - (y+1) + (z-2) = 0$

$x - 3 - y - 1 + z - 2 = 0$

$x - y + z - 6 = 0$

Solución: la ecuación del plano que contiene a las rectas r *y* s *para* $\alpha = 3$ *es* $x - y + z - 6 = 0$

c) Buscamos un plano π / $\pi \perp r$ *y* $(1, 2, 1) \in \pi$

Como $\pi \perp r \rightarrow \vec{n_\pi} = \vec{v_r} = (1, 2, 1)$

La ecuación del plano π *será:* $x + 2y + z + D = 0$

Como debe contener al punto $(1, 2, 1)$, $1 + 2 . 2 + 1 + D = 0 \rightarrow 1 + 4 + 1 + D = 0 \rightarrow 6 + D = 0 \rightarrow D = -6$

Finalmente, el plano π *será:* $x + 2y + z - 6 = 0$

PROBLEMA B.2. Se da la recta

$r:\begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi_\alpha : (2+2\alpha)\,x+y+\alpha\,z-2-6\alpha=0$, dependiente del parámetro real α.

Obtener **razonadamente**:

a) La ecuación del plano π_α que pasa por el punto (1 , 1 , 0). *(3 puntos)*

b) La ecuación del plano π_α que es paralelo a la recta r. *(4 puntos)*

c) La ecuación del plano π_α que es perpendicular a la recta r *(3 puntos)*.

Solución:

a) Como el punto (1 , 1 , 0) pertenece al plano π_α:

$(2+2\alpha)\cdot 1+1+\alpha\cdot 0-2-6\alpha=0$

$2+2\alpha+1-2-6\alpha=0$

$-4\alpha+1=0$

$-4\alpha=-1 \;\rightarrow\; \alpha=\frac{-1}{-4}=\frac{1}{4}$

Por lo que la ecuación del plano pedido será:

$$\left(2+2\,\frac{1}{4}\right)x+y+\frac{1}{4}\,z-2-6\,\frac{1}{4}=0$$

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)x+y+\frac{1}{4}\,z-2-\frac{3}{2}=0$$

$$\frac{5}{2}x+y+\frac{1}{4}\,z-\frac{7}{2}=0$$

$$10x+4y+z-14=0$$

***Solución:* $\pi_\alpha : 10x+4y+z-14=0$**

b) Como π_α debe ser paralelo a la recta r, $\vec{n}_{\pi_\alpha}\perp\vec{v}_r$

$\vec{n}_{\pi_\alpha}=(2+2\alpha\,,1\,,\alpha)$

Calculemos el vector director de la recta r, $\vec{v}_r$

Como $r:\begin{cases} x-4y=0 \\ y-z=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4y \\ z=y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{v}_r=(4\,,1\,,1)$

Puesto que debe ser $\vec{n}_{\pi_\alpha}\perp\vec{v}_r \;\rightarrow\; (4\,,1\,,1)\cdot(2+2\alpha\,,1\,,\alpha)=0$

$8+8\alpha+1+\alpha=0;\quad 9+9\alpha=0;\quad 9\alpha=-9;\quad \alpha=\frac{-9}{9}=-1$

Sustituyendo el valor de α en el plano π_α:

$(2+2\cdot(-1))\,x+y+(-1)\,z-2-6(-1)=0$

$(2-2)\,x+y-z-2+6=0$

$y-z+4=0$

*La ecuación del plano **π_α** será:* **$y-z+4=0$**

c) Como π_α *debe ser perpendicular a la recta r,* $\vec{n}_{\pi_\alpha} // \vec{v}_r$

Por lo tanto debe cumplirse: $\dfrac{2+2\alpha}{4} = \dfrac{1}{1} = \dfrac{\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{2+2\alpha}{4} = \dfrac{1}{1} \quad \rightarrow \quad 2+2\alpha = 4 \quad \rightarrow \quad 2\alpha = 2 \quad \rightarrow \quad \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{1} = \dfrac{\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad \alpha = 1 \end{cases}$

Luego $\alpha = 1$

Sustituyendo el valor de α *en el plano* π_α:

$(2 + 2 \cdot 1) x + y + 1 \cdot z - 2 - 6 \cdot 1 = 0$

$4 x + y + z - 8 = 0$

$4 x + y + z - 8 = 0$

La ecuación del plano $\boldsymbol{\pi_\alpha}$ ***será:*** $\boldsymbol{4 x + y + z - 8 = 0}$

PROBLEMA A.2. En el espacio se tiene la recta $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ y el plano π: $x + m\,z = 0$, donde m es un parámetro real.

Obtener **razonadamente**:

a) El vector director de la recta r. *(2 puntos).*
b) El valor de m para el que la recta r y el plano π son perpendiculares. *(2 puntos).*
c) El valor de m para el que la recta r y el plano π son paralelos. *(3 puntos).*
d) La distancia entre r y π cuando se da a m el valor obtenido en el apartado c). *(3 puntos).*

Solución:

a) Obtengamos la ecuación paramétrica de la recta r.

Resolvemos el sistema que define a r.

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$, *podemos usar como incógnitas principales x e y. El sistema a resolver será* $\begin{cases} x+y=1+z \\ x-y=z \end{cases} \rightarrow$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 1 \\ z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-z-z}{-2} = \frac{1+2z}{2} = \frac{1}{2}+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{z-1-z}{-2} = \frac{1}{2}$$

La ecuación paramétrica de la recta r es, $r:\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\lambda \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\lambda \end{cases}$ $\lambda \in \Re$, *y el vector director de r,* $\vec{v_r}$, *es:*

$\vec{v_r} = (1, 0, 1)$

b) $r \perp \pi$ *cuando* $\vec{v_r} \,//\, \vec{n_\pi}$, *siendo* $\vec{n_\pi}$ *el vector perpendicular al plano π.*

$\vec{v_r} = (1, 0, 1)$ *y* $\vec{n_\pi} = (1, 0, m)$

Para que estos vectores sean paralelos: $\frac{1}{1} = \frac{1}{m} \rightarrow m = 1$

La recta r y el plano π son perpendiculares para m = 1

c) $r \,//\, \pi$ *cuando* $\vec{v_r} \perp \vec{n_\pi}$

Deberá cumplirse que $(1, 0, 1) \cdot (1, 0, m) = 0$; $1 + m = 0$; $m = -1$

La recta r y el plano π son paralelos para m = – 1

d) Para $m = -1$ *hay que calcular* $d(r, \pi)$.

Para $m = -1$, *el plano π es* $x - z = 0$. *Utilizamos la ecuación paramétrica de r obtenida en el apartado a).*

$$d(r\,,\pi)=d(P_r\,,\pi)=\left[siendo \quad P_r\left(\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\,,0\right)\right]=\frac{\left|\frac{1}{2}-0\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\,u.l.\approx 0'3536\;u.l.$$

PROBLEMA B.2. En el espacio se dan los planos π, σ y τ de ecuaciones:

$$\pi:\ 2x - y + z = 3\ ;\quad \sigma:\ x - y + z = 2\ ;\quad \tau:\ 3x - y - az = b,$$

siendo a y b parámetros reales, y la recta r intersección de los planos π y σ.
Obtener **razonadamente**:

a) Un punto, el vector director y las ecuaciones de la recta r. *(3 puntos).*
b) La ecuación del plano que contiene a la recta r y pasa por el punto (2,1,3). *(4 puntos).*
c) Los valores de a y de b para que el plano τ contenga a la recta r, intersección de los planos π y σ. *(3 puntos).*

Solución:

a) La recta r es la intersección de los planos π y σ, por lo que la ecuación de la recta r será:

$$r:\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 1 = -1 \neq 0$, *resolvemos el sistema anterior usando x e y como incógnitas principales, el sistema a resolver será* $\begin{cases} 2x - y = 3 - z \\ x - y = 2 - z \end{cases}$. *Resolviéndolo por Cramer,*

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & -1 \\ 2-z & -1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-3+z+2-z}{-1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3-z \\ 1 & 2-z \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4-2z-3+z}{-1} = \frac{1-z}{-1} = -1 + z$$

Por lo tanto, ***la ecuación paramétrica de r*** *será:* $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

A partir de esta ecuación conocemos: ***un punto de r*** $P_r(1,-1,0)$

y ***su vector director*** $\vec{v}_r(0,1,1)$

b) Buscamos el plano φ que contiene $\begin{cases} r\begin{cases} P_r(1,-1,0) \\ \vec{v}_r(0,1,1) \end{cases} \\ Q(2,1,3) \end{cases}$

Luego el plano φ queda determinado por el punto $P_r(1,-1,0)$ y los vectores $\vec{v}_r$ y $\overrightarrow{P_rQ}$

$\overrightarrow{P_rQ} = (2, 1, 3) - (1, -1, 0) = (1, 2, 3)$

La ecuación del plano φ será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)(3-2) - (y+1)(-1) + z(-1) = 0$$

$$(x-1) + (y+1) - z = 0$$

$x - 1 + y + 1 - z = 0$
$x + y - z = 0$

Luego, ***la ecuación del plano buscado es*** $\boldsymbol{\varphi: x + y - z = 0}$

c) Para que $r \subset \tau$*, cualquier punto de la recta* r *verificará la ecuación del plano* τ*. Luego*

$\forall \lambda \in \Re, \quad 3 \cdot 1 - (-1 + \lambda) - a\,\lambda = b$

$3 + 1 - \lambda - a\,\lambda = b$

$4 - \lambda - a\,\lambda = b$

Para $\lambda = 0 \;\rightarrow\; 4 = b$

Para $\lambda = 1 \;\rightarrow\; 4 - 1 - a = b;\quad 3 - a = b$*, sustituyendo el valor de* b *obtenido antes,* $3 - a = 4;$
$3 - 4 = a;\quad -1 = a$

Por lo tanto, ***el plano*** $\boldsymbol{\tau}$ ***contiene a la recta*** $\boldsymbol{r}$ ***para*** $\boldsymbol{a = -1}$ ***y*** $\boldsymbol{b = 4}$

PROBLEMA 2. Se da los planos π: $x + y = 1$ y π′: $x - y + z = 1$ y el punto P(1,−1,0).
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π′. *(3 puntos)*
b) La distancia de la recta r a los planos π y π′. *(3 puntos)*
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π′. *(4 puntos)*

Solución:

a) ¿Recta r? / $P \in r$ y r es paralela a π y π´.

$\pi: x + y = 1 \rightarrow \overrightarrow{n_\pi}\ (1,1,0)$; $\pi': x - y + z = 1 \rightarrow \overrightarrow{n_{\pi'}}\ (1,-1,1)$.

El vector director de la recta r debe ser un vector que sea paralelo a los dos planos.

$$\vec{v} = \overrightarrow{n_\pi} \times \overrightarrow{n_{\pi'}} \rightarrow \vec{v} \perp \begin{cases} \overrightarrow{n_\pi} \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} \end{cases} \quad y \quad \begin{matrix} \overrightarrow{n_\pi} \perp \pi \\ \overrightarrow{n_{\pi'}} \perp \pi' \end{matrix} \rightarrow \vec{v} \,//\, \begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$$

$$\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}\cdot(-1-1) = (1,-1,-2) \approx (-1,1,2)$$

De la recta r conocemos: $\left\langle \begin{matrix} punto \quad P(1,-1,0) \\ v.\,director,\ \vec{v_r} = (-1,1,2) \end{matrix} \right.$

Las ecuaciones paramétricas de r: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 2\lambda \end{cases}$

b) ¿d(r , π) y d(r , π´)?

$\pi: x + y - 1 = 0$, $\pi': x - y + z - 1 = 0$ y $P(1,-1,0)$.

Como $r \,//\, \pi \rightarrow d(r,\pi) = d(P,\pi) = \dfrac{|1 + (-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Como $r \,//\, \pi' \rightarrow d(r,\pi') = d(P,\pi') = \dfrac{|1 - (-1) + 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Solución: $d(r,\pi) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $d(r,\pi') = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

c) ¿Recta s? / $P \in s$ y s corta ⊥ recta $t: \begin{cases} \pi \\ \pi' \end{cases}$.

Ecuación de la recta t:

$t: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$, *en este sistema* $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$; *la ecuación de t la obtenemos resolviendo el sistema:* $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 - z \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1-z & -1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-1-1+z}{-2} = \frac{-2+z}{-2} = 1 - \frac{1}{2}z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-z \end{vmatrix}}{-2} = \frac{1-z-1}{-2} = \frac{-z}{-2} = \frac{1}{2}z$$

$$\rightarrow \quad t: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\lambda \\ y = \frac{1}{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Simplifiquemos la ecuación de t usando otro vector director.

Hemos obtenido que $\vec{v}_t\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right) \approx (-1,1,2)$. *Por lo que* $t: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$

Un punto genérico de la recta t será $Q(1-\lambda, \lambda, 2\lambda)$.

La recta s que buscamos debe cumplir que $\overrightarrow{PQ} \perp \vec{v}_t$, *es decir,* $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_t = 0$.

P(1,–1,0), luego $\overrightarrow{PQ} = (1-\lambda-1, \lambda-(-1), 2\lambda-0) = (-\lambda, \lambda+1, 2\lambda)$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v}_t = (-\lambda, \lambda+1, 2\lambda) \cdot (-1,1,2) = \lambda + \lambda + 1 + 4\lambda = 6\lambda + 1 \rightarrow 6\lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-1}{6}$$

Y $Q\left(1 - \left(-\frac{1}{6}\right), -\frac{1}{6}, 2 \cdot \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, \frac{-1}{6}, \frac{-2}{6}\right)$

De la recta s conocemos: $\left\langle \begin{array}{l} \text{punto } P(1,-1,0) \\ \text{v. director, } \vec{v}_s = \overrightarrow{PQ}\left(-\frac{-1}{6}, \frac{-1}{6}+1, 2 \cdot \frac{-1}{6}\right) = \left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{-2}{6}\right) \approx (1,5,-2) \end{array} \right.$

Las ecuaciones paramétricas de s: $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -1 + 5\lambda \quad \lambda \in \Re. \\ z = -2\lambda \end{cases}$

PROBLEMA 5. Sea dan las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda, \quad \lambda\in\Re, \\ z=2\lambda \end{cases}$ $\quad s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ y el plano

π: $3x+ay-z+1=0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro a para el cual la recta r está contenida en el plano π. *(4 puntos)*

b) La distancia entre las rectas r y s. *(3 puntos)*

c) El coseno del ángulo que forma la recta r y la recta $t:\begin{cases} 2x-y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿$\exists a$? / $r\subset\pi$.

Sustituyendo x, y, z de r en π,

$3\cdot 1+a(2+\lambda)-2\lambda+1=0$; *en esta ecuación la incógnita es* λ.

$3+2a+a\lambda-2\lambda+1=0$;

$a\lambda-2\lambda=-4-2a$; $\quad (a-2)\lambda=-4-2a$

Esta ecuación tendrá infinitas soluciones cuando:

$$\begin{cases} a-2=0 \\ -4-2a=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ -2a=4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=\dfrac{4}{-2}=-2 \end{cases}$$ *, (valores de a distintos) por lo que no hay solución.*

Por lo tanto, ***no hay valor de a / r ⊂ π.***

b) ¿$d(r,s)$?

De las rectas: $r:\begin{cases} \text{punto } P_r(1,2,0) \\ \text{v. director, } \vec{v}_r=(0,1,2) \end{cases}$ $\quad s:\begin{cases} P_s(-1,0,2) \\ \vec{v}_s=(2,-1,1) \end{cases}$

Estudiemos la posición relativa de las rectas r y s.

Debemos estudiar la matriz ampliada: $A'=\left(\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \vec{P_rP_s}\right)=\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$

En A, $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \rightarrow ran(A)=2$

En A', $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}=2+8+4-4=10\neq 0 \rightarrow ran(A')=3$ $\quad\rightarrow$ *las rectas r y s se cruzan.*

Por lo que,

$$d(r,s)=\frac{\left|\,\left|\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \vec{P_rP_s}\right|\,\right|}{\left|\vec{v}_r\times\vec{v}_s\right|}$$ *calculemos,*

$$\left|\vec{v}_r \quad \vec{v}_s \quad \overrightarrow{P_rP_s}\right| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \quad (\textit{calculado anteriormente})$$

$$\vec{v}_r \times \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot 3 - \vec{j}\cdot(-4) + \vec{k}\cdot(-2) = 3\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k} =$$

$$= (3,4,-2)$$

$$\left|\vec{v}_r \times \vec{v}_s\right| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$$

Luego $d(r,s) = \dfrac{|10|}{\sqrt{29}} = \dfrac{10}{\sqrt{29}}$ *u.l.*

c) ¿cos α*? siendo* $\alpha = (\widehat{r,t})$ *y* $t:\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases}$.

Necesitamos los vectores directores de ambas rectas. Sabemos que $\vec{v}_r = (0,1,2)$

De $t:\begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x = y \\ y - 2 = z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{y}{2} \\ z = -2 + y \end{cases} \rightarrow t:\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\alpha \\ y = \alpha \\ z = -2 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \Re$

Luego, $\vec{v}_t = \left(\dfrac{1}{2}, 1, 1\right) \cong (1,2,2)$

Y $\cos\alpha = \dfrac{|(0,1,2)(1,2,2)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \dfrac{|2+4|}{\sqrt{5}\sqrt{9}} = \dfrac{6}{3\sqrt{5}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Solución, $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Problema 2.1. Dado el plano $\pi : 2x + y + 3z - 1 = 0$ y el punto $Q = (2,1,3)$, se pide calcular :
a) La distancia del punto Q al plano π. (*1,1 puntos*).
b) El área del triángulo Δ cuyos vértices P_1, P_2 y P_3 son los puntos de intersección del plano π con los ejes coordenados. (*1,1 puntos*).
c) El volumen del tetraedro de vértices P_1, P_2, P_3 y Q. (*1,1 puntos*).

Solución:
a)

$$d(Q,\pi) = \frac{|2.2+1+3.3-1|}{\sqrt{2^2+1^2+3^2}} = \frac{|4+1+9-1|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{|13|}{\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{14}} u.l.$$

b) Calculemos los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas,

$$\pi \cap OX$$
$$OX : \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\pi : 2x+y+3z-1=0$$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$
$$2x+0-3.0-1=0$$
$$2x-1=0$$
$$2x=1 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$
$$P_1\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

$$\pi \cap OY$$
$$OY : \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$$
$$\pi : 2x+y+3z-1=0$$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$
$$2.0+y-3.0-1=0$$
$$y-1=0$$
$$y=1$$
$$P_2(0, 1, 0)$$

$$\pi \cap OZ$$
$$OZ : \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$
$$\pi : 2x+y+3z-1=0$$

Debemos resolver el sistema:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 2x+y+3z-1=0 \end{cases}$$
$$2.0+0-3z-1=0$$
$$3z-1=0$$
$$3z=1 \quad \rightarrow \quad z=\frac{1}{3}$$
$$P_3\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

Llamando A al área triángulo Δ cuyos vértices son P_1, P_2 y P_3

$$A=\frac{1}{2}\left|\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}\right|$$

$$\vec{P_1P_2}\left(\frac{-1}{2},1,0\right)$$

$$\vec{P_1P_2}\left(\frac{-1}{2},1,\frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{-1}{2} & 1 & 0\\ \frac{-1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & \frac{1}{3}\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{3}\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}\frac{-1}{2} & 1\\ \frac{-1}{2} & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\,\frac{1}{3}-\vec{j}\,\frac{1}{6}+\vec{k}\,\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{3},\frac{-1}{6},\frac{1}{2}\right)$$

$$y\quad \left|\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{-1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{4+1+9}{36}}=\sqrt{\frac{14}{36}}=\frac{\sqrt{14}}{6}$$

Finalmente,

$$A=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{14}}{6}=\frac{\sqrt{14}}{12}u.a.$$

c)

$$V(P_1,P_2,P_3,Q)=\left|\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\right|=$$ *(desarrollando el determinante por la 3ª columna)*

$$=\frac{1}{6}\left|-1\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & 0 & \frac{1}{3}\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-1\left(\frac{-1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}-\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{1}{6}-\frac{1}{6}+\frac{2}{3}+\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{6}\left|\frac{4+9}{6}\right|=\frac{13}{36}u.v.$$

Problema 2.2. Dados los planos π_1 y π_2 de ecuaciones

$\pi_1 : x+2y+z+3=0$; $\pi_2 : 2x+y-z-6=0$, se pide:

a) Calcular el ángulo α que forman los planos π_1 y π_2. (*1,1 puntos*).

b) Calcular la ecuación paramétrica de la recta **r**, intersección de los planos π_1 y π_2. (*1,1 puntos*).

c) Comprobar que el plano π de ecuación $x + y - 1 = 0$ es el plano bisector de π_1 y π_2, es decir, π forma un ángulo $\alpha/2$ con cada uno de de los planos π_1 y π_2, donde α es el ángulo obtenido en el apartado a). (*1,1 puntos*).

Solución:

a)

$$\alpha = ang(\pi_1, \pi_2)$$

$$\cos\alpha = \frac{|(1,2,1)\,(2,1,-1)|}{|(1,2,1)|\,|(2,1,-1)|} = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{3} rds$$

b)

$$r: \begin{cases} x+2y+z=-3 \\ 2x+y-z=6 \end{cases}$$

como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1-4=-3 \neq 0$

resolvemos el sistema usando x e y como incógnitas principales.

$$\begin{cases} x+2y=-3-z \\ 2x+y=6+z \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3-z & 2 \\ 6+z & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-3-z-12-2z}{-3} = \frac{-15-3z}{-3} = 5+z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3-z \\ 2 & 6+z \end{vmatrix}}{-3} = \frac{6+z+6+2z}{-3} = \frac{12+3z}{-3} = -4-z$$

Solución $r: \begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-4-\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \quad \lambda \notin \Re$

c)

Sea β *el ángulo que forman los planos* π y π_1.

$$\cos\beta = \frac{|(1,2,1)\,(1,1,0)|}{|(1,2,1)|\,|(1,1,0)|} = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{\pi}{6} rds$$

Sea δ *el ángulo que forman los planos* π y π_2.

$$\cos\delta = \frac{|(2,1,-1)\,(1,1,0)|}{|(2,1,-1)|\,|(1,1,0)|} = \frac{|2+1|}{\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{\pi}{6} rds$$

Luego $\beta = \delta = \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\alpha}{2}$ *como queríamos comprobar.*

Problema 2.1. Dados los planos **π_1**: x + y + z = 3 y **π_2**: x + y – α z = 0, se pide calcular razonadamente:
a) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean perpendiculares y, para este valor de α, obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de estos dos planos. *(1,5 puntos).*
b) El valor de α para que los planos **π_1** y **π_2** sean paralelos y, para este valor de α, obtener la distancia entre los dos planos **π_1** y **π_2** . *(1,8 puntos).*

Solución:
a) Valor de α / **$\pi_1 \perp \pi_2$**

Sea $\vec{n}_\pi$ *un vector ortogonal al plano π, entonces* $\pi_1 \perp \pi_2$ *si* $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$

$\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,1)$ *y* $\vec{n}_{\pi_2} = (1,1,-\alpha)$

Para que $\vec{n}_{\pi_1} \perp \vec{n}_{\pi_2}$ *debe ser* $\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2} = 0$

$(1, 1, 1)\,(1, 1, -\alpha) = 0$
$1 + 1 - \alpha = 0$
$2 - \alpha = 0$
$\alpha = 2$

Para α = 2, ecuaciones paramétricas de $\pi_1 \cap \pi_2$

La ecuación de la recta r será: $r : \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$

Para obtener la ecuación paramétrica de la recta basta con resolver el sistema de ecuaciones que define a la recta.

En el sistema anterior podemos calcular el siguiente menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 1 = -3$

por lo que podemos tomar como incógnitas principales: y, z. El sistema a resolver será:

$$\begin{cases} y + z = 3 - x \\ y - 2z = -x \end{cases}$$

Resolviéndolo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 - x & 1 \\ -x & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-6 + 2x + x}{-3} = \frac{-6 + 3x}{-3} = 2 - x$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 - x \\ 1 & -x \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-x - 3 + x}{-3} = 1$$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de r serán: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 1 \end{cases}$

b) Valor de α / **π_1** y **π_2** *sean paralelos.*

π_1 *y* π_2 *son paralelos si* $\vec{n}_{\pi_1} \,//\, \vec{n}_{\pi_2}$

Deberá ser:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{-\alpha} \quad \rightarrow \quad \alpha = -1$$

Para $\alpha = -1$ *calcular* $d(\pi_1 , \pi_2)$

Para este valor de α, **π_1***: x + y + z = 3 y* **π_2***: x + y + z = 0*

Como **π_1** *//* **π_2** *, d (***π_1** *,* **π_2** *) = d (P_1,* **π_2** *) siendo P_1 un punto de* **π_1***, por ejemplo, para x = 0 e y = 0, sustituyendo en la ecuación de* **π_1***, 0 + 0 + z = 3 → z = 3, por lo que P_1(0, 0, 3)*

$$d(P_1 , \pi_2) = \frac{|0 + 0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Problema 2.2. Dados el punto O = (0 , 0 , 0) y el plano **π**: x + y + z = 6, se pide calcular razonadamente:
a) La ecuación de la recta **r** que pasa por O y es perpendicular al plano **π**. *(1,1 puntos).*
b) Las coordenadas del punto simétrico de O respecto del plano **π**. *(1,1 puntos).*
c) La ecuación del plano que contiene al eje X y a la recta **r**. *(1,1 puntos).*

Solución:
a) Recta ***r*** */* ***r*** *pasa por* ***O*** *y* $\boldsymbol{r \perp \pi}$
Como la recta ***r*** *debe ser perpendicular al plano* ***π****, el vector ortogonal al plano* ***π*** *será vector director de la recta* ***r****.*
Por lo que de la recta ***r*** *conocemos: Punto O (0, 0, 0) y* $\vec{v}_r = (1,1,1)$
Ecuaciones de la recta ***r***

Paramétrica: $r: \begin{cases} x = 0 + \lambda \\ y = 0 + \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 0 + \lambda \end{cases} \equiv r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$

Continua: $r: \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1} \equiv x = y = z$

b) Simétrico de ***O*** *respecto de* ***π****,* ***O´***
Debemos calcular,
1) *Recta que pasa por el punto* ***O*** *y es perpendicular a* ***π****, es la recta obtenida en el apartado anterior. Usaremos su ecuación paramétrica,*

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = \lambda \end{cases}$$

2) *Punto de corte entre* ***r*** *y* ***π****,* ***M***
A partir de la ecuación paramétrica de la recta r, sustituimos los valores de x, y, z de la recta en la ecuación del plano: $\lambda + \lambda + \lambda = 6$, $3\lambda = 6$, $\lambda = 2$
Sustituyendo este valor de λ *en la recta, obtenemos el punto M (2, 2, 2)*

3) *Obtenemos* ***O´*** *considerando que* ***M*** *es el punto medio del segmento* ***OO´****, es decir que*

$$M = \frac{O + O´}{2} \rightarrow 2M = O + O´ \rightarrow O´ = 2M - O = 2(2,2,2) - (0,0,0) = (4,4,4)$$

El simétrico del punto ***O*** *respecto del plano* ***π*** *es (4, 4 ,4)*

c) Plano que contiene al eje ***X*** *y a* ***r****,* ***ψ***
Un vector director del eje X es (1, 0 , 0). Un vector director de la recta r es (1, 1, 1). Estos dos vectores no son paralelos (sus coordenadas no son proporcionales) por lo que son vectores directores del plano ***ψ****.*
Como punto del plano ***ψ*** *podemos tomar cualquiera del eje X o de la recta r, por ejemplo consideramos el (0, 0, 0) del eje X.*
La ecuación del plano ***ψ*** *será,*

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z - y = 0 \rightarrow y - z = 0$$

Luego el plano ***ψ*** *tiene por ecuación* $y - z = 0$

Problema 2.1. Dados los puntos P = (3, – 1, 4) y Q = (1, 0, – 1) , y el plano π de ecuación π: x – 2 y + 2 z + 5 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) La ecuación de la recta **r** que pasa por el punto *P* y es perpendicular al plano π. (*1,4 puntos*).

b) La ecuación de los planos que pasan por el punto *P* y son perpendiculares al plano π. (*1 punto*).

c) La ecuación del plano π' que pasa por los puntos *P* y *Q* y es perpendicular al plano π. (*0,9 puntos*).

Solución:

a) Recta r: pasa por P y es $\perp$ *a π.*

El vector director de la recta, $\vec{v}_r$ *, será el vector ortogonal al plano π,* $\vec{n}_\pi$ *, y* $\vec{n}_\pi = (1,-2,2)$.

Por lo tanto, de la recta r conocemos,

$$\begin{cases} \textit{Punto} \quad P(3,-1,4) \\ \textit{vector director} \quad \vec{v}_r = (1,-2,2) \end{cases}$$

Las ecuaciones de la recta r serán:

Ecuación vectorial $\qquad (x,y,z) = (3,-1,4) + \lambda(1,-2,2) \qquad \lambda \in \Re$

Ecuación paramétrica $\begin{cases} x = 3+\lambda \\ y = -1-2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 4+2\lambda \end{cases}$

Ecuación continua $\qquad \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-4}{2}$

b) Los planos que pasan por P y son perpendiculares al plano π contienen la recta r del apartado anterior. Por lo tanto las ecuaciones pedidas podemos obtenerlas a partir de la ecuación de la recta r dada como intersección de dos planos.

De la ecuación continua de r :

$$\begin{cases} \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+1}{-2} \\ \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{z-4}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x+6 = y+1 \\ 2x-6 = z-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+6-1=0 \\ 2x-z-6+4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x-y+5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x+y+5=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$$

El haz de planos que contienen a la recta r será: $\lambda (2x + y - 5) + \mu (2x - z - 2) = 0$ *y esta es la ecuación de los planos pedidos.*

c) Ecuación del plano π' que pasa por los puntos P y Q y es perpendicular al plano π.

Como $\pi' \perp \pi \rightarrow \vec{n}_\pi$ *es un vector director de* π'

Como $P \text{ y } Q \in \pi' \rightarrow \vec{PQ}$ *es otro vector director de* π'

$\vec{n}_\pi = (1,-2,2)$ *y* $\vec{PQ} = (1,0,-1) - (3,-1,4) = (-2,1,-5)$

Elegimos como punto del plano π', por ejemplo, P(3, – 1, 4). La ecuación del plano π' será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 0$$ *Desarrollando por la primera fila,*

$$(x-3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (z-4)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-3)(10-2)-(y+1)(-5+4)+(z-4)(1-4)=0$$

$$(x-3)8-(y+1)(-1)+(z-4)(-3)=0$$

$$8x-24+y+1-3z+12=0$$

$$8x+y-3z-11=0$$

Luego, la ecuación del plano π': $8x + y - 3z - 11 = 0$

Problema 2.2. Sea π el plano de ecuación π: 3 x + 2 y + 4 z – 12 = 0, se pide calcular razonadamente:

a) Las ecuaciones de los dos planos paralelos a π que distan 5 unidades de π. (*1,2 puntos*).
b) Los tres puntos *A*, *B* y *C,* intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados. (*0,6 puntos*).
c) Los tres ángulos del triángulo *ABC*. (*1,5 puntos*).

Solución:

a) Ecuaciones de los planos paralelos a π que distan 5 unidades de π.

Los planos paralelos a π tienen por ecuación, π´: 3 x + 2 y + 4 z + D = 0.

Como estos dos planos son paralelos, la distancia entre ellos la calculamos de la siguiente forma:

$d(\pi,\pi')=d(P_\pi,\pi')$, *siendo* P_π *un punto cualquiera del plano* π.

P_π *podemos obtenerlo para x = y = 0, en la ecuación del plano π, luego: 4 x – 12 = 0 → z = 3 →*
→ $P_\pi(0,0,3)$

$$d(P_\pi,\pi')=\frac{|3.0+2.0+4.3+D|}{\sqrt{3^2+2^2+4^2}}=\frac{|12+D|}{\sqrt{9+4+16}}=\frac{|12+D|}{\sqrt{29}}$$

y debe ser $$\frac{|12+D|}{\sqrt{29}}=5 \rightarrow \begin{cases} \dfrac{12+D}{\sqrt{29}}=5 \rightarrow 12+D=5\sqrt{29} \rightarrow D=-12+5\sqrt{29} \\ \dfrac{12+D}{\sqrt{29}}=-5 \rightarrow 12+D=-5\sqrt{29} \rightarrow D=-12-5\sqrt{29} \end{cases}$$

Finalmente, las ecuaciones de los planos pedidos son:

$$\pi_1: 3x+2y+4z-12+5\sqrt{29}=0 \qquad \wedge \qquad \pi_2: 3x+2y+4z-12-5\sqrt{29}=0$$

b) Los tres puntos A, B y C, intersección del plano π con cada uno de los tres ejes coordenados.

A, corte del plano π con eje X

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow 3x-12=0 \rightarrow x=4 \rightarrow A(4,0,0)$$

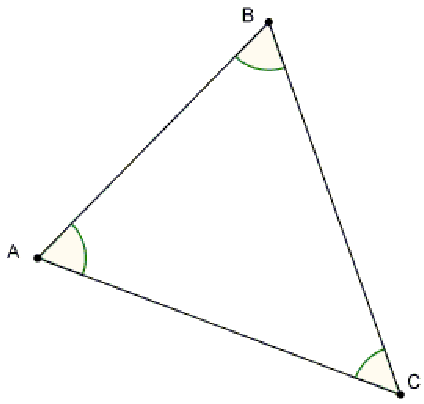
B, corte del plano π con eje Y

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases} \rightarrow 2y-12=0 \rightarrow y=4 \rightarrow B(0,6,0)$$

C, corte del plano π con eje Z

$$\begin{cases} 3x+2y+4z-12=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow 4z-12=0 \rightarrow z=3 \rightarrow C(0,0,3)$$

c) Los tres ángulos del triángulo ABC.



$$\hat{A}=\left(\overrightarrow{AB}\ \widehat{,}\ \overrightarrow{AC}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}=(0,6,0)-(4,0,0)=(-4,6,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=(0,0,3)-(4,0,0)=(-4,0,3)$$

$$\cos\hat{A}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{\left|(-4,6,0).(-4,0,3)\right|}{\sqrt{(-4)^2+6^2+0^2}\sqrt{(-4)^2+0^2+3^2}}=$$

$$=\frac{|16|}{\sqrt{16+36}\sqrt{16+9}}=\frac{16}{\sqrt{52}\sqrt{25}}=\frac{16}{5\sqrt{52}}$$

$$\hat{A}=63'6560^{\circ}$$

$$\hat{B}=\left(\overrightarrow{BA}\ \widehat{,}\ \overrightarrow{BC}\right)$$

$$\overrightarrow{BA}=(4,-6,0)\quad\left(\textit{es el opuesto del } \overrightarrow{AB} \textit{ calculado anteriormente}\right)$$

$$\overrightarrow{BC}=(0,0,3)-(0,6,0)=(0,-6,3)$$

$$\cos\hat{B}==\frac{\left|(4,-6,0).(0,-6,3)\right|}{\sqrt{4^2+(-6)^2+0^2}\sqrt{0^2+(-6)^2+3^2}}=\frac{|36|}{\sqrt{16+36}\sqrt{36+9}}=\frac{16}{\sqrt{52}\sqrt{45}}$$

$$\hat{B}=41'9088^{\circ}$$

Finalmente, $\quad\hat{C}=180^{\circ}-\hat{A}-\hat{B}=74'4352^{\circ}$