GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JULIOL 2024	CONVOCATORIA: JULIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)
c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD=DA$. (4 puntos)

Problema 2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X=B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s. (5 puntos)

Problema 4. Sea el plano $\pi: 6x+4y-3z-d=0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)
c) Para $d\neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)

b) Dicho volumen. (2 puntos)

Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Se considera la matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)
c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD=DA$. (4 puntos)

a) La matriz A es invertible si su determinante es no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0+2k-3k-2+k^2-0=k^2-k-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow k^2-k-2=0 \Rightarrow k=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases} \frac{1+3}{2}=\boxed{2=k} \\ \frac{1-3}{2}=\boxed{-1=k} \end{cases}$$

La matriz A es invertible para cualquier valor de k distinto de –1 y de 2.

b) Para $k = 0$ existe la inversa de A. La calculamos.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0$.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1/3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1/3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{3}+1 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para $k = 0$ la matriz inversa queda $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

c) Para $k = 0$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Una matriz diagonal tiene la expresión $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Debe cumplir $AD = DA$

$$AD = DA \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & b/3 & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & b/3 & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3a = 3c \to a = c \\ c = b \\ 2a = 2c \to a = c \\ -b = -c \to b = c \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = b = c \Rightarrow D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Las matrices diagonales que cumplen $AD = DA$ tienen la expresión $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X=B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

a) Para que la ecuación matricial tenga una única solución la matriz A^2 debe tener inversa y para ello es necesario que su determinante sea no nulo. Averiguamos cuando se anula dicho determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{vmatrix}=6+0+0-4a-0-0=6-4a$$

$$|A|=0\Rightarrow 6-4a=0\Rightarrow 4a=6\Rightarrow \boxed{a=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}}$$

La ecuación matricial $A^2X=B$ tiene una única solución para los valores de a distintos de 1.5.

b) Resolvemos la ecuación matricial.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ a & 0 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 0 & 2+6\\ 3+6+a & 4 & 6+2+3\\ a+3a & 0 & 2a+9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2a & 0 & 8\\ 9+a & 4 & 11\\ 4a & 0 & 2a+9\end{pmatrix}$$

$$A^2X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1+2a & 0 & 8\\ 9+a & 4 & 11\\ 4a & 0 & 2a+9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ -2\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}3(1+2a)-8\\ 3(9+a)-8-11\\ 12a-(2a+9)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3+6a-8\\ 27+3a-19\\ 12a-2a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}6a-5\\ 8+3a\\ 10a-9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\alpha=6a-5\\ \beta=3a+8\\ \gamma=10a-9\end{cases}}$$

Los valores buscados son $\alpha=6a-5,\ \beta=3a+8,\ \gamma=10a-9$.

Problema 3. Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s. (5 puntos)

a) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de las rectas.

$$r: \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} P_r(1,2,1) \\ \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} Q_s(3,3,-1) \\ \overrightarrow{u_s}=(-2,-1,2) \end{cases} \Rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$$

Intentamos resolver el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} 3-2\alpha=1+\lambda \\ 3-\alpha=2+\lambda \\ -1+2\alpha=1+2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\lambda \\ 1=\alpha+\lambda \\ -2=-2\alpha+2\lambda \to 1=\alpha-\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\lambda \\ 1=\alpha+\lambda \\ \lambda=\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2=2\alpha+\alpha-1 \\ 1=\alpha+\alpha-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3=3\alpha \\ 2=2\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\alpha=1} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=3-2=1 \\ y=3-1=2 \\ z=-1+2=1 \end{cases}}$$

La solución del sistema es única, por lo que las rectas se cortan en el punto de coordenadas la solución del sistema. Las rectas r y s se cortan en P(1,2,1).

b) La recta t que pasa por P y es perpendicular a r y a s tiene como vector director el producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r}=(1,1,2) \\ \overrightarrow{u_s}=(-2,-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{w_t}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2i-4j-k+2k-2j+2i=$$

$$=4i-6j+k=(4,-6,1)$$

Hallamos la ecuación de la recta que pasa por P(1,2,1) con vector director $\overrightarrow{w_t}=(4,-6,1)$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{w_t}=(4,-6,1) \\ P(1,2,1)\in t \end{array}\right\} \Rightarrow t: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-1}{1}$$

La recta t que pasa por P y es perpendicular a r y a s tiene ecuación $t: \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{-6}=\frac{z-1}{1}$.

Problema 4. Sea el plano $\pi : 6x+4y-3z-d=0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

a) Hallamos la distancia del plano al punto (0, 0, 0) y la igualamos a 1.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 6x+4y-3z-d=0\\ O(0,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow d(\pi,O)=\frac{|0+0+0-d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}}=\frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

$$d(\pi,O)=1 \Rightarrow \frac{|d|}{\sqrt{61}}=1 \Rightarrow |d|=\sqrt{61} \Rightarrow \begin{cases} d=+\sqrt{61}\\ d=-\sqrt{61}\end{cases}$$

Para $d=+\sqrt{61}$ y $d=-\sqrt{61}$ la distancia del plano al origen vale 1.

b) Hallamos los puntos de corte del plano con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 6x+4y-3z-d=0\\ Eje\,OX \rightarrow \begin{cases} y=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 6x-d=0 \Rightarrow 6x=d \Rightarrow x=\frac{d}{6} \Rightarrow A\left(\frac{d}{6},0,0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 6x+4y-3z-d=0\\ Eje\,OY \rightarrow \begin{cases} x=0\\ z=0\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 4y-d=0 \Rightarrow 4y=d \Rightarrow y=\frac{d}{4} \Rightarrow B\left(0,\frac{d}{4},0\right)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi : 6x+4y-3z-d=0\\ Eje\,OZ \rightarrow \begin{cases} x=0\\ y=0\end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -3z-d=0 \Rightarrow 3z=-d \Rightarrow z=\frac{-d}{3} \Rightarrow C\left(0,0,\frac{-d}{3}\right)$$

Los puntos de corte del plano con los ejes son $A\left(\frac{d}{6},0,0\right)$, $B\left(0,\frac{d}{4},0\right)$ y $C\left(0,0,\frac{-d}{3}\right)$.

c) Hallamos las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{d}{4},0\right)-\left(\frac{d}{6},0,0\right)=\left(\frac{-d}{6},\frac{d}{4},0\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(0,0,\frac{-d}{3}\right)-\left(\frac{d}{6},0,0\right)=\left(\frac{-d}{6},0,\frac{-d}{3}\right)$$

Hallamos el ángulo formado por ambos vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\left(\frac{-d}{6},\frac{d}{4},0\right)\\ \overrightarrow{AC}=\left(\frac{-d}{6},0,\frac{-d}{3}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}=$$

$$=\frac{\left(\frac{-d}{6},\frac{d}{4},0\right)\left(\frac{-d}{6},0,\frac{-d}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2+0}\cdot\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+0+\left(\frac{-d}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{9}}}=$$

$$=\frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\cdot\sqrt{\frac{5d^2}{36}}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{\sqrt{13}d}{12}\cdot\frac{\sqrt{5}d}{6}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{\sqrt{65}d^2}{72}}=\frac{2}{\sqrt{65}}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right)=75.6^{\circ}$$

Para d $\neq 0$ el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tiene un valor aproximado de 75.6º.

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

a) Si la función *h(x)* tiene un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$ la derivada de la función debe anularse para $x = -\frac{3}{4} \rightarrow h'\left(\frac{-3}{4}\right) = 0$.

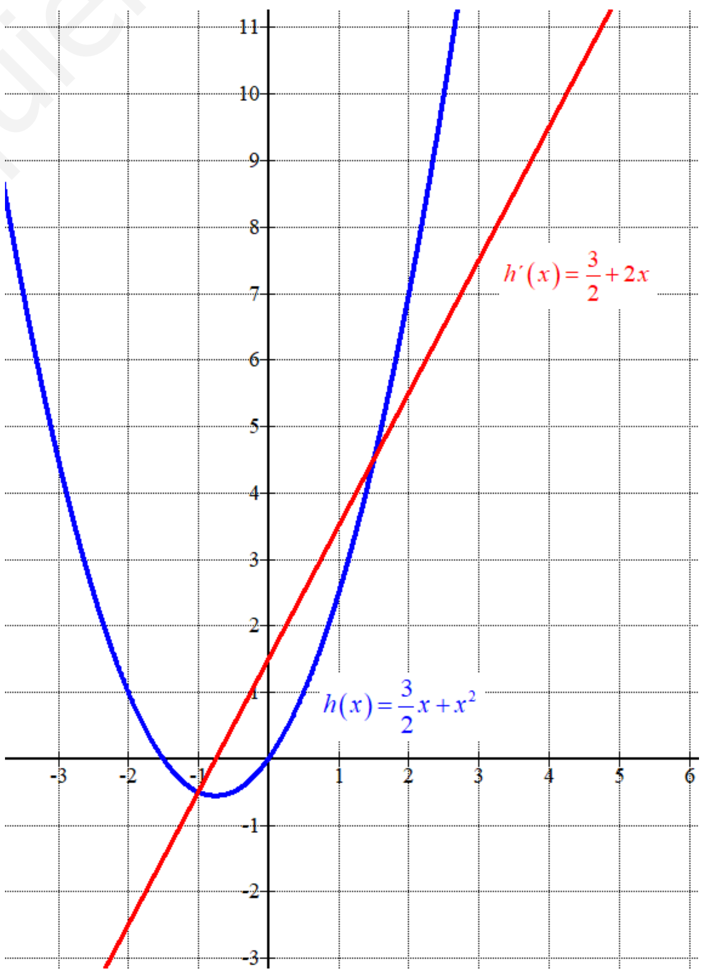
$$\left.\begin{array}{l} h'(x) = a + 2x \\ h'\left(\frac{-3}{4}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a + 2\frac{-3}{4} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

También se cumple que la derivada segunda $h''(x) = 2$ es positiva para $x = -\frac{3}{4}$, y por tanto presenta un mínimo relativo en dicho valor.

b) Para $a = \frac{3}{2}$ la función queda $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ y la derivada $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$.
Dibujamos la parábola y la recta asociada a ambas funciones.

x	$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$
-2	1
$-3/2$	0
$-3/4$	$-9/16$
0	0
2	7

x	$h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$
0	1.5
1	3.5
2	5.5



c) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=\dfrac{3}{2}x+x^2 \\ h'(x)=\dfrac{3}{2}+2x \\ h(x)=h'(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}x+x^2=\frac{3}{2}+2x \Rightarrow 3x+2x^2=3+4x \Rightarrow 2x^2-x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(2)(-3)}}{2(2)}=\frac{1\pm 5}{4}=\begin{cases} \dfrac{1+5}{4}=\boxed{\dfrac{3}{2}=x} \\ \dfrac{1-5}{4}=\boxed{-1=x} \end{cases}$$

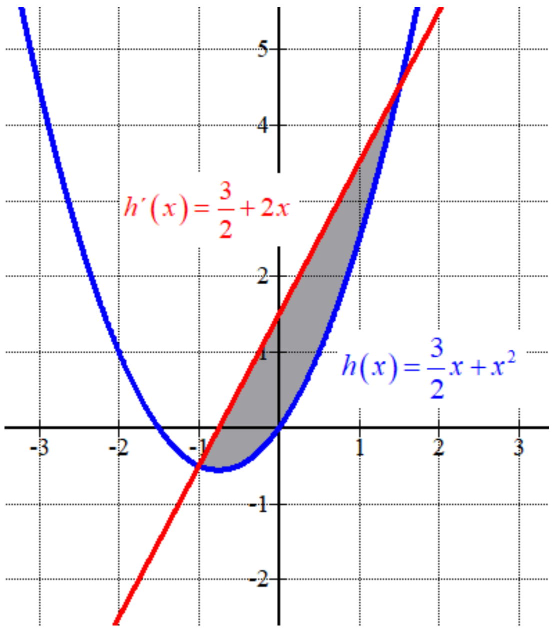
Calculamos el área de la región encerrada entre ambas gráficas como la integral definida entre -1 y $\dfrac{3}{2}$ de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\int_{-1}^{1.5}\frac{3}{2}+2x-\left(\frac{3}{2}x+x^2\right)dx=\int_{-1}^{1.5}\frac{3}{2}+2x-\frac{3}{2}x-x^2dx=$$

$$=\int_{-1}^{1.5}-x^2+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3/2}=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{4}+\frac{3}{2}x\right]_{-1}^{3/2}=$$

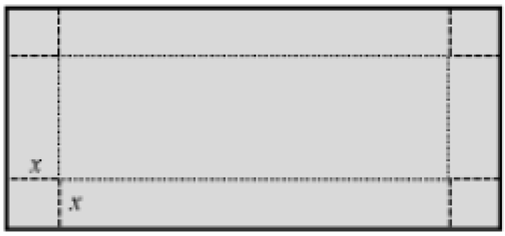
$$=\left[-\frac{(3/2)^3}{3}+\frac{(3/2)^2}{4}+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}+\frac{(-1)^2}{4}+\frac{3}{2}(-1)\right]=$$

$$=-\frac{27}{24}+\frac{9}{16}+\frac{9}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=-\frac{9}{8}+\frac{9}{16}+2-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\boxed{\frac{125}{48}\simeq 2.6\ u^2}$$

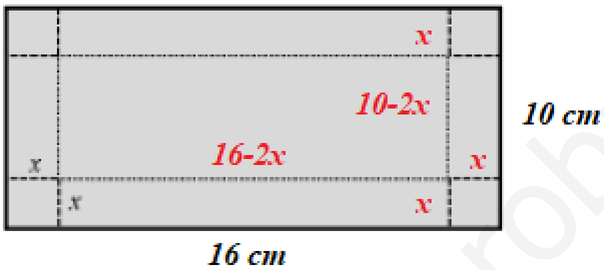


Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

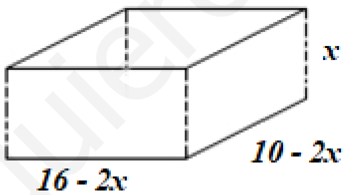
a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
b) Dicho volumen. (2 puntos)



Dibujamos la situación planteada.



El volumen de la caja es el volumen de un prisma de base rectangular de lados $16-2x$ y $10-2x$ con altura x.



$$Volumen = V(x) = (16-2x)(10-2x)x = \left(160-32x-20x+4x^2\right)x = 160x-52x^2+4x^3$$

a) Derivamos la función volumen y averiguamos cuando se anula la derivada.

$$V(x) = 160x-52x^2+4x^3 \Rightarrow V'(x) = 160-104x+12x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 160-104x+12x^2 = 0 \Rightarrow 40-26x+3x^2 = 0 \Rightarrow$$

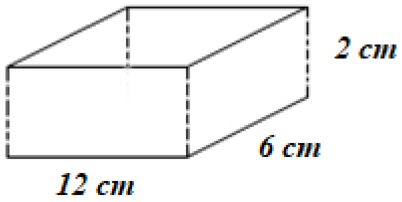
$$\Rightarrow x = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2-4(3)(40)}}{2(3)} = \frac{26 \pm 14}{6} = \begin{cases} \dfrac{26+14}{6} = \boxed{\dfrac{20}{3} = x} \\ \dfrac{26-14}{6} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Sustituimos estos dos puntos críticos de la función volumen en la segunda derivada.

$$V'(x) = 160 - 104x + 12x^2 \Rightarrow V''(x) = -104 + 24x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V''\left(\dfrac{20}{3}\right) = -104 + 24 \cdot \dfrac{20}{3} = 56 > 0 \rightarrow x = \dfrac{20}{3} \text{ es mínimo} \\ V''(2) = -104 + 24 \cdot 2 = -56 < 0 \rightarrow x = 2 \text{ es máximo} \end{cases}$$

El volumen es máximo para $x = 2$. Las dimensiones de la caja con volumen máximo son 12 cm × 6 cm × 2 cm.



b) El volumen máximo que se puede conseguir es con $x = 2$. Lo calculamos.

$$Volumen\, máximo = V(2) = (16 - 2 \cdot 2)(10 - 2 \cdot 2)2 = 12 \cdot 6 \cdot 2 = 144\, cm^3$$

El volumen máximo es de 144 cm^3.

Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)

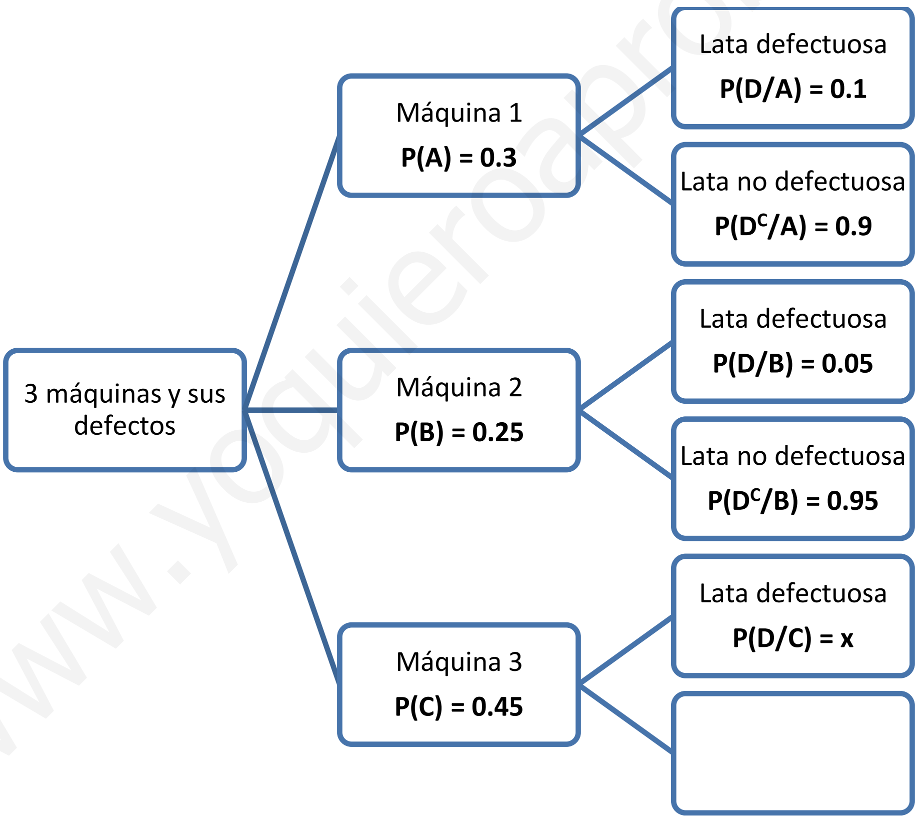
b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Llamamos A al suceso "la lata de refresco es fabricada por la primera máquina", B a "la lata de refresco es fabricada por la segunda máquina", C a "la lata de refresco es fabricada por la tercera máquina" y D al suceso "la lata fabricada es defectuosa".

Con los datos del ejercicio tenemos que $P(D)=0.1025$, $P(A)=0.30$, $P(D/A)=0.10$, $P(B)=0.25$, $P(D/B)=0.05$, $P(C)=1-0.3-0.25=0.45$.

Realizamos un diagrama de árbol para organizar toda la información del ejercicio.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)P(D/A)+P(B)P(D/B)+P(C)P(D/C)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.1025=0.3\cdot 0.1+0.25\cdot 0.05+0.45\cdot x\Rightarrow 0.1025=0.03+0.0125+0.45x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0.45x=0.1025-0.0425=0.06\Rightarrow x=\frac{0.06}{0.45}=\boxed{\frac{2}{15}\simeq 0.1333}$$

La probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa es de $\frac{2}{15}$.

b) Nos piden calcular $P\left(A/D^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/D^C\right)=\frac{P\left(A\cap D^C\right)}{P\left(D^C\right)}=\frac{P(A)P\left(D^C/A\right)}{1-P(D)}=\frac{0.3\cdot 0.9}{1-0.1025}=\boxed{\frac{108}{359}\simeq 0.3}$$

La probabilidad de que una lata no defectuosa proceda de la primera máquina es de $\frac{108}{359}$.

c) Calculamos la probabilidad de que la lata defectuosa haya sido fabricada por la segunda máquina: $P(B/D)$.

$$P(B/D)=\frac{P(B\cap D)}{P(D)}=\frac{P(B)P(D/B)}{P(D)}=\frac{0.25\cdot 0.05}{0.1025}=\frac{5}{41}$$

La probabilidad de que una lata defectuosa **no** haya sido fabricada por la segunda máquina tiene un valor de $1-\frac{5}{41}=\frac{36}{41}\simeq 0.878$.

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:
a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Llamamos X = Número de emoticonos enviados en 10 mensajes de WhatsApp.
El número de repeticiones es n = 10. La probabilidad de enviar un emoticono es p = 0.6.
Como cada repetición se supone independiente de las demás X es una variable binomial.
X = B(10, 0.6).

a) Nos piden calcular $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{10}{0}0.6^0\cdot 0.4^{10}=0.4^{10}\simeq\boxed{0.0001}$$

La probabilidad de que ningún mensaje contenga un emoticono es de 0.0001.

b) Las dos quintas partes de los 10 mensajes son $\frac{2}{5}\cdot 10=4$ mensajes.

Nos piden calcular $P(X=4)$.

$$P(X=4)=\binom{10}{4}0.6^4\cdot 0.4^6=\left\{\begin{array}{l}\binom{10}{4}=\frac{10!}{4!\cdot 6!}=\\ =\frac{10\cdot 9\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}=210\end{array}\right\}=210\cdot 0.6^4\cdot 0.4^6\simeq\boxed{0.1115}$$

La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es de 0.1115.

c) Nos piden calcular $P(X\geq 8)$.

$$P(X\geq 8)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$

$$=\binom{10}{8}0.6^8\cdot 0.4^2+\binom{10}{9}0.6^9\cdot 0.4^1+\binom{10}{10}0.6^{10}\cdot 0.4^0=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\binom{10}{8}=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=\\ =\frac{10\cdot 9}{2}=45\end{array}\right\}\left\{\binom{10}{9}=\frac{10!}{9!\cdot 1!}=10\right\}\left\{\binom{10}{10}=1\right\}=$$

$$=45\cdot 0.6^8\cdot 0.4^2+10\cdot 0.6^9\cdot 0.4+0.6^{10}\simeq\boxed{0.1673}$$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos tiene un valor aproximado de 0.1673.