GENERALITAT VALENCIANA
Conselleria d'Innovació, Universitats, Ciència i Societat Digital

COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT — PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: JUNY 2024	CONVOCATORIA: JUNIO 2024
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{aligned} -x+y+z&=m \\ 2x+my-z&=3m \\ (m-1)x+3y-z&=6+m. \end{aligned}$$

Se pide:
a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)
b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)
b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B$. (4 puntos)
c) Para $m=0$, calcular A^5. (3 puntos)

Problema 3. Se considera la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi:3x-my+z=1$. Se pide:
a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)
b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)
c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P=(1,-1,-2)$. (3 puntos)

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.
a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)
b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)
c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Problema 5. Sea la función $f(x)=\frac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$. (2 puntos)

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a, 0<a<1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Soluciones

Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{array}{l} -x+y+z=m \\ 2x+my-z=3m \\ (m-1)x+3y-z=6+m. \end{array} :$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

a) La matriz de coeficientes del sistema es $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{pmatrix}.$$

Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=m-m+1+6-m(m-1)+2-3=6-m^2+m=-m^2+m+6$$

$$|A|=0 \Rightarrow -m^2+m+6=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(6)}}{-2}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases} \dfrac{-1+5}{-2}=\boxed{-2=m} \\ \dfrac{-1-5}{-2}=\boxed{3=m} \end{cases}$$

Surgen tres situaciones diferentes que estudiamos por separado.

CASO 1. $m\neq -2 \ y \ m\neq 3$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución)

CASO 2. $m=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y el rango de A no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\2&-2&-1&-6\\-3&3&-1&4\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a+2\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}2&-2&-1&6\\-2&2&2&-4\\ \hline 0&0&1&2\end{array}\to Nueva\,Fila\,2^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-3\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}-3&3&-1&4\\3&-3&-3&6\\ \hline 0&0&-4&10\end{array}\to Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-1&1&1&-2\\0&0&1&2\\0&0&-4&10\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a+4\cdot Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}0&0&-4&10\\0&0&4&8\\ \hline 0&0&0&18\end{array}\to Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix}-2\\2\\18\end{matrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema no tiene solución (es incompatible).

CASO 3. $m=3$

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&3\\2&3&-1&9\\2&3&-1&9\end{pmatrix}$. Convertimos este sistema en otro equivalente más sencillo de estudiar.

$$A/B=\begin{pmatrix}-1&1&1&3\\2&3&-1&9\\2&3&-1&9\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,2^a\\ \begin{array}{cccc}2&3&-1&9\\-2&-3&1&-9\\ \hline 0&0&0&0\end{array}\to Nueva\,Fila\,3^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a+2\cdot Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}2&3&-1&9\\-2&2&2&6\\ \hline 0&5&1&15\end{array}\to Nueva\,Fila\,2^a\end{array}\right\}\Rightarrow\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&5&1\\0&0&0\end{pmatrix}}_{A}\begin{matrix}3\\15\\0\end{matrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m=3$ el sistema es compatible indeterminado. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r}-x+y+z=3\\2x+3y-z=9\\2x+3y-z=9\end{array}\right\}\Rightarrow\{Ecuación\,2^a=Ecuación\,3^a\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}-x+y+z=3\\2x+3y-z=9\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} z = 3 + x - y \\ 2x + 3y - z = 9 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x + 3y - (3 + x - y) = 9 \Rightarrow x + 4y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 12 - 4y \Rightarrow z = 3 + 12 - 4y - y = 15 - 5y \Rightarrow \begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$$

Las soluciones son $\begin{cases} x = 12 - 4\lambda \\ y = \lambda \\ z = 15 - 5\lambda \end{cases} ;\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2m & m\\ 0 & m & 0\\ m & 1 & m\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B$. (4 puntos)

c) Para $m=0$, calcular A^5. (3 puntos)

a) El rango de A es 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2m & m\\ 0 & m & 0\\ m & 1 & m\end{vmatrix}=m^2+0+0-m^3-0-0=m^2-m^3$$

$$|A|=0\Rightarrow m^2-m^3=0\Rightarrow m^2(1-m)=0\Rightarrow\begin{cases}m=0\\ 1-m=0\to m=1\end{cases}$$

Nos surgen tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $m\neq 0$ y $m\neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $m=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila segunda y la columna tercera (son nulas) → $\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

CASO 3. $m=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras → $\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$ el rango de A es 3 y si $m=0$ o $m=1$ el rango de A es 2.

b) Para $m=-1$ (caso 1) el determinante de A es no nulo y la matriz tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=1+1=2\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}}{2}=\frac{Adj\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{2}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y obtenemos su expresión.

$$AX=B\Rightarrow X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+0+0 & 0-3+0\\ 0+0+0 & 0-2+0\\ -1+0+0 & 0+1+0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -3/2\\ 0 & -1\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

c) Para $m=0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^4=A^3A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Problema 3. Se considera la recta $r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi:3x-my+z=1$. Se pide:

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P=(1,-1,-2)$. (3 puntos)

a) Para que recta y plano sean paralelos el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (producto escalar nulo) y además los puntos de la recta no deben pertenecer al plano (la recta no está contenida en el plano).
Hallamos el vector normal del plano y el director de la recta. Su producto escalar debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}\Rightarrow\begin{cases}P_r(1,-1,-2)\\ \overrightarrow{v_r}=(2,3,-1)\end{cases} \\ \pi:3x-my+z=1\Rightarrow\vec{n}=(3,-m,1) \\ r\,||\,\pi\Rightarrow\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2,3,-1)(3,-m,1)=0\Rightarrow 6-3m-1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5=3m\Rightarrow\boxed{m=\frac{5}{3}}$$

El plano queda $\pi:3x-\frac{5}{3}y+z=1\Rightarrow\pi:9x-5y+3z=3$.

Vemos si el punto $P_r(1,-1,-2)$ perteneciente a la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1,-1,-2)\in\pi:9x-5y+3z=3?\Rightarrow ¿9\cdot1-5(-1)+3(-2)=3?\Rightarrow ¿9+5-6=3?$$

La igualdad no es cierta y el punto P_r no pertenece al plano.

Para $m=\frac{5}{3}$ la recta r y el plano π son paralelos.

Para que la recta esté contenida en el plano el vector normal del plano y el director de la recta deben ser perpendiculares (producto escalar nulo) lo que implica que $m=\frac{5}{3}$. Para este valor ya hemos visto que el punto $P_r(1,-1,-2)$ no pertenece al plano. No existe ningún valor de m que haga que la recta esté contenida en el plano.

b) Para $m=\dfrac{5}{3}$ el plano queda $\pi: 9x-5y+3z=3$. Un plano π´ paralelo a π tiene ecuación $\pi´: 9x-5y+3z=D$. Para que este plano contenga a la recta *r* basta con que contenga al punto $P_r(1,-1,-2)$ de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\pi´: 9x-5y+3z=D\\ P_r(1,-1,-2)\in\pi´\end{array}\right\}\Rightarrow 9-5(-1)+3(-2)=D\Rightarrow \boxed{D=8}$$

El plano π´ paralelo a π, que contiene a la recta *r* tiene ecuación $\pi´: 9x-5y+3z=8$.

c) Utilizamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 3x-my+z-1=0\\ P(1,-1,-2)\end{array}\right\}\Rightarrow d(P,\pi)=\frac{|3\cdot 1-m(-1)-2-1|}{\sqrt{3^2+(-m)^2+1^2}}=\boxed{\frac{|m|}{\sqrt{10+m^2}}}$$

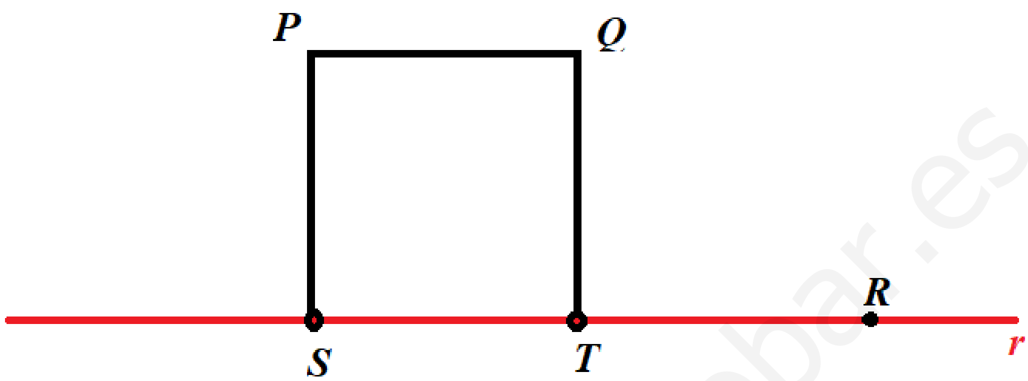
Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

La situación planteada es la del dibujo.



a) La recta r debe ser paralela al segmento PQ. Hallamos la recta r que pasa por el punto R y tiene como vector director el vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (1,3,1)-(2,1,3) = (-1,2,-2) \\ R(4,7,6) \in r \end{array}\right\} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 7+2\lambda ,\ \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 6-2\lambda \end{cases}$$

b) El plano que contiene el cuadrado es el plano que contiene el punto P(2,1,3) y tiene como vectores directores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = \overrightarrow{QR} = (4,7,6)-(1,3,1) = (3,4,5) \\ \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \\ P(2,1,3) \in \pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(x-2)-5(y-1)+6(z-3)+4(z-3)+6(y-1)-10(x-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18(x-2)+(y-1)+10(z-3) = 0 \Rightarrow -18x+36+y-1+10z-30 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi: -18x+y+10z+5=0}$$

El plano que contiene el cuadrado tiene ecuación $\pi: -18x+y+10z+5=0$.

c) Sabemos que el punto S es un punto de la recta r que cumple que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overrightarrow{PS}$, es decir, su producto escalar es nulo.

$$r:\begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 7+2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow S\left(4-\lambda, 7+2\lambda, 6-2\lambda\right) \\ z = 6-2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{PS} = \left(4-\lambda, 7+2\lambda, 6-2\lambda\right) - \left(2,1,3\right) = \left(2-\lambda, 6+2\lambda, 3-2\lambda\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{PS} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PS} = 0 \Rightarrow \left(-1,2,-2\right)\left(2-\lambda, 6+2\lambda, 3-2\lambda\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\left(2-\lambda\right) + 2\left(6+2\lambda\right) - 2\left(3-2\lambda\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+\lambda+12+4\lambda-6+4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = \frac{-4}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S\left(4+\frac{4}{9}, 7-2\frac{4}{9}, 6+2\frac{4}{9}\right) = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Sabemos que el punto T es un punto de la recta r que cumple que $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a $\overrightarrow{QT}$, es decir, su producto escalar es nulo.

$$r:\begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 7+2\lambda,\ \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow T\left(4-\lambda, 7+2\lambda, 6-2\lambda\right) \\ z = 6-2\lambda \end{cases}$$

$$\overrightarrow{QT} = \left(4-\lambda, 7+2\lambda, 6-2\lambda\right) - \left(1,3,1\right) = \left(3-\lambda, 4+2\lambda, 5-2\lambda\right)$$

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QT} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QT} = 0 \Rightarrow \left(-1,2,-2\right)\left(3-\lambda, 4+2\lambda, 5-2\lambda\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1\left(3-\lambda\right) + 2\left(4+2\lambda\right) - 2\left(5-2\lambda\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -3+\lambda+8+4\lambda-10+4\lambda = 0 \Rightarrow 9\lambda = 5 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{9} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T\left(4-\frac{5}{9}, 7+2\frac{5}{9}, 6-2\frac{5}{9}\right) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Los otros dos vértices del cuadrado son los puntos $S\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ y $T\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$.

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{kx}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [–1, 1]. (2 puntos)

a) La función *f(x)* tiene un denominador que no se anula por lo que su dominio son todos los números reales.

Asíntota vertical. $x=a$

No tiene pues el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Asíntota horizontal. $y=b$

Estudiamos la situación cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{kx}{e^{2x}}=\frac{\infty}{+\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{k}{2e^{2x}}=\frac{k}{+\infty}=\{k\neq 0\}=0$$

La función tiene una asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$: $y=0$.

Estudiamos la situación cuando x tiende a $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{kx}{e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty} kxe^{-2x}=k(-\infty)e^{+\infty}=\{k\neq 0\}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Hemos supuesto que k es distinto de cero. *Si k = 0* la función seria $f(x)=\dfrac{0\cdot x}{e^{2x}}=0$ que no tiene asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Cuando x tiende a $+\infty$ la función tiene asíntota horizontal y no puede tener asíntota oblicua.

Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{kx}{e^{2x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{kx}{xe^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{k}{e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty} ke^{-2x}=\{k\neq 0\}=\infty$$

La función no tiene asíntota oblicua.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{kx}{e^{2x}}=kxe^{-2x}\Rightarrow f'(x)=ke^{-2x}+kx(-2)e^{-2x}=(k-2kx)e^{-2x}=k(1-2x)e^{-2x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow k(1-2x)e^{-2x}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}k\neq 0\\ e^{-2x}\neq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow 1-2x=0\Rightarrow 2x=1\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después del valor crítico encontrado $x=\dfrac{1}{2}$.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ tomamos $x=0$ y la derivada vale $f'(0)=k(1-0)e^{0}=k$. Si k es positivo la función es creciente en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y si k es negativo la función es decreciente en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=k(1-2)e^{-2}=-ke^{-2}=\frac{-k}{e^{2}}$. Si k es positivo la función es decreciente en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ y si k es negativo la función es creciente en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Resumiendo: Si $k>0$ la función crece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$. Si $k<0$ la función decrece en $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.

Si $k>0$ la función tiene un máximo relativo en $x=\frac{1}{2}$. Si $k<0$ la función tiene un mínimo relativo en $x=\frac{1}{2}$.

c) La función es continua en [–1, 1]. Calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo: $f(-1)=\frac{k(-1)}{e^{2(-1)}}=\frac{-k}{e^{-2}}=-ke^{2}$, $f(1)=\frac{k(1)}{e^{2(1)}}=\frac{k}{e^{2}}=ke^{-2}$. La función toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo:

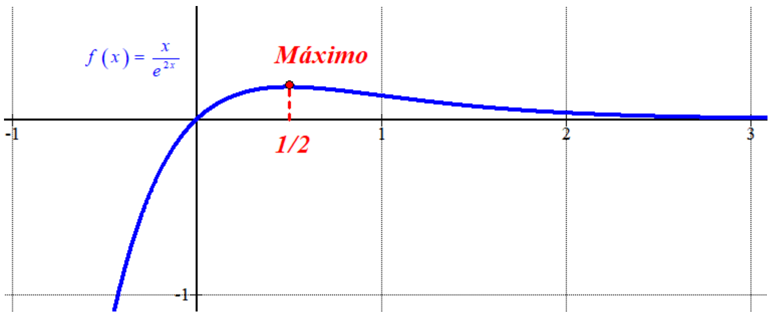
Si k > 0 → $f(-1)=-ke^{2}<0$ y $f(1)=ke^{-2}>0$.

Si k < 0 → $f(-1)=-ke^{2}>0$ y $f(1)=ke^{-2}<0$.

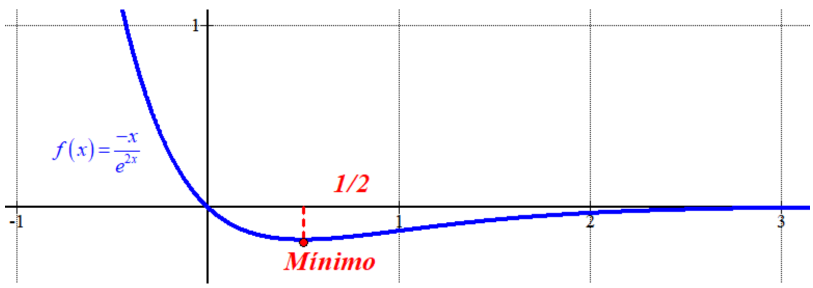
Aplicando el teorema de Bolzano tenemos que existe $c\in(-1,1)$ tal que $f(c)=0$.

Este valor que nos dice el teorema de Bolzano que existe es $c=0$.

Si $k=1>0$ la gráfica es



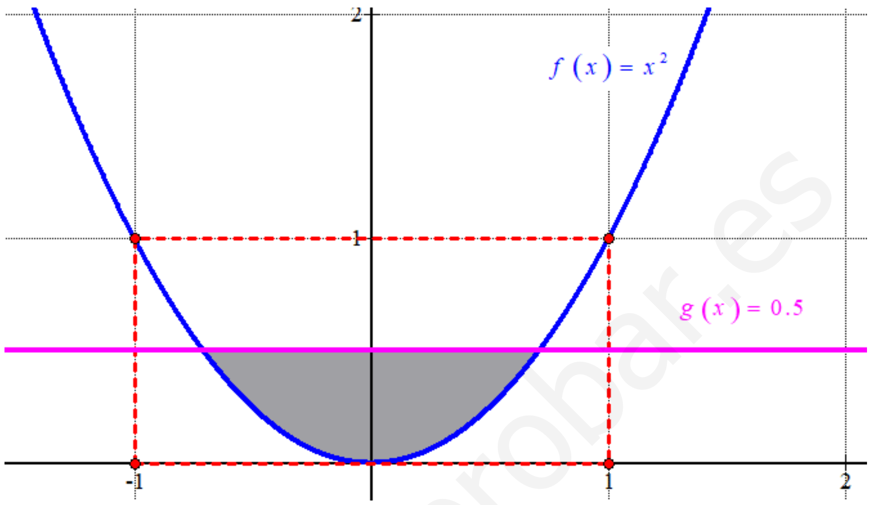
Si $k=-1<0$ la gráfica es



Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano $(-1,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(-1,1)$. Se consideran las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=a, 0<a<1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Dibujamos la situación planteada.

x	$f(x)=x^2$
-1	1
0	0
1	1



Averiguamos los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^2 \\ g(x)=a \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a}$$

El área del rectángulo R es: base · altura = 2 · 1 = 2 unidades cuadradas.
El área de la región gris del dibujo debe valer 2/3.

Calculamos el valor del área de la región limitada por las dos gráficas.

$$Área=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} g(x)-f(x)\,dx=\int_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}} a-x^2 dx=\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{\sqrt{a}}=$$

$$=\left[a\sqrt{a}-\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}\right]-\left[a\left(-\sqrt{a}\right)-\frac{\left(-\sqrt{a}\right)^3}{3}\right]=a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}+a\sqrt{a}-\frac{a\sqrt{a}}{3}=$$

$$=2a\sqrt{a}-\frac{2a\sqrt{a}}{3}=\frac{6a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}}{3}=\frac{4a\sqrt{a}}{3}\,u^2$$

Igualamos el área a 2/3 y obtenemos el valor de a.

$$\frac{4a\sqrt{a}}{3}=\frac{2}{3}\Rightarrow 2a\sqrt{a}=1\Rightarrow\left(2a\sqrt{a}\right)^2=1^2\Rightarrow 4a^2\cdot a=1\Rightarrow 4a^3=1\Rightarrow a^3=\frac{1}{4}\Rightarrow \boxed{a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}}$$

El valor buscado es $a=\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.
a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)
b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

La probabilidad de sacar cara con la moneda M_1 es $P(C/M_1)=0.6$.

La probabilidad de sacar cara con la moneda M_2 es $P(C/M_2)=1$.

La probabilidad de elegir una de las monedas es $P(M_1)=P(M_2)=0.5$.

Las tres elecciones de una de las monedas y el lanzamiento de la moneda son independientes entre si.

a.1) La probabilidad de sacar cara en un lanzamiento es $P(C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(C)=P(M_1)P(C/M_1)+P(M_2)P(C/M_2)=0.5\cdot 0.6+0.5\cdot 1=0.8$$

La probabilidad de sacar tres caras en tres lanzamientos es el producto de las probabilidades de sacar cara en un lanzamiento.

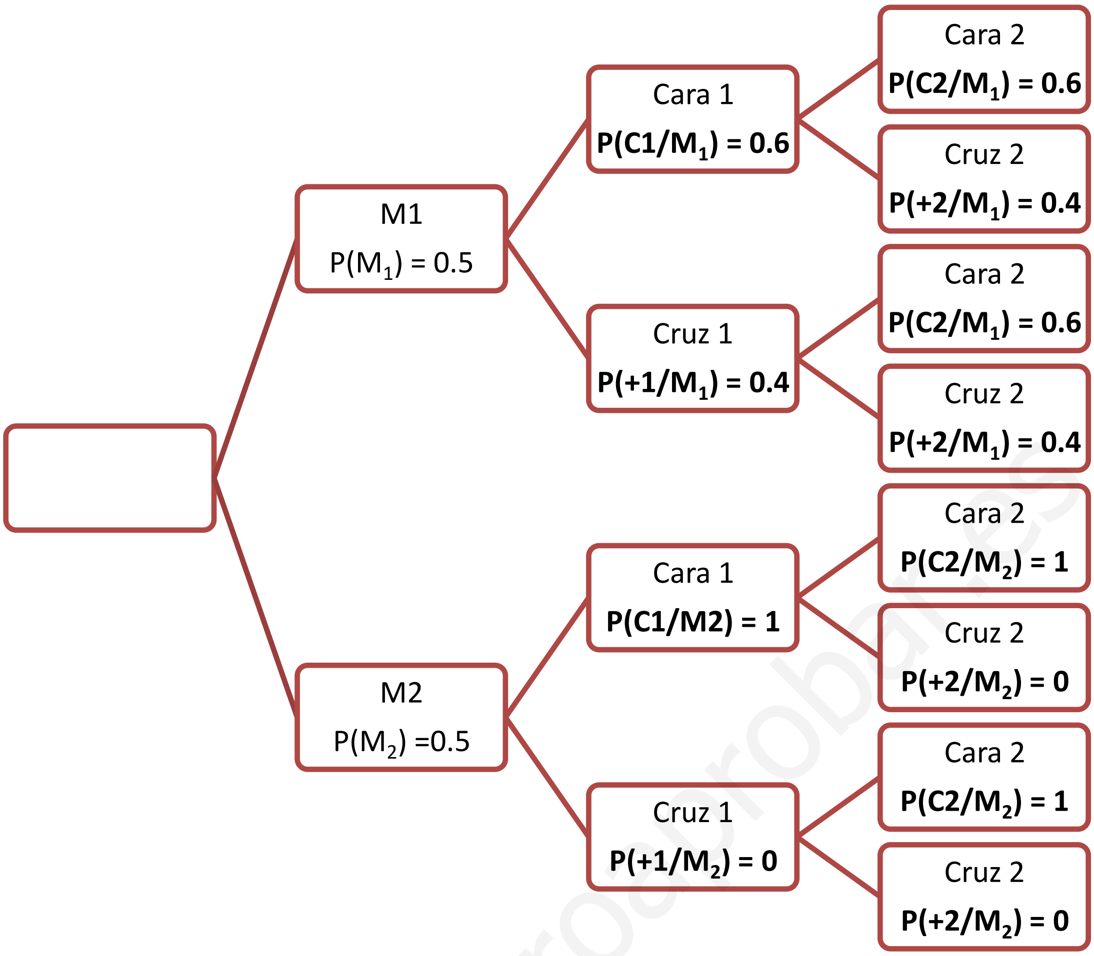
$$P(C1\cap C2\cap C3)=P(C1)\cdot P(C2)\cdot P(C3)=0.8\cdot 0.8\cdot 0.8=\boxed{0.512}$$

a.2) Para sacar exactamente una cruz debemos sacar una cruz y dos caras. Esto puede pasar de distintas maneras: C1 C2 +3, C1 +2 C3 o +1 C2 C3.

$$P(\text{Sacar 1 cruz})=P(C1\cap C2\cap +3)+P(C1\cap +2\cap C3)+P(+1\cap C2\cap C3)=$$

$$=0.8\cdot 0.8\cdot 0.2+0.8\cdot 0.2\cdot 0.8+0.2\cdot 0.8\cdot 0.8=3\cdot 0.8\cdot 0.8\cdot 0.2=\boxed{0.384}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



La probabilidad de sacar 2 caras en los dos lanzamientos es:

$$P(2\ caras) = P(M_1)P(C1/M_1)P(C2/M_1) + P(M_2)P(C1/M_2)P(C2/M_2) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 \cdot 1 = 0.68$$

Nos piden calcular $P(M_1/(2\ \text{caras}))$.

$$P(M_1/(2\ \text{caras})) = \frac{P(M_1 \cap (2\ \text{caras}))}{P(2\ \text{caras})} = \frac{P(M_1)P((2\ \text{caras})/M_1)}{P(2\ \text{caras})} =$$

$$= \frac{P(M_1)P(C1/M_1)P(C2/M_1)}{P(2\ \text{caras})} = \frac{0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6}{0.68} = \boxed{\frac{9}{34} \simeq 0.2647}$$

Nos piden calcular $P(M_2/(2\ \text{caras}))$.

$$P(M_2/(2\ \text{caras})) = \frac{P(M_2 \cap (2\ \text{caras}))}{P(2\ \text{caras})} = \frac{P(M_2)P((2\ \text{caras})/M_2)}{P(2\ \text{caras})} =$$

$$= \frac{P(M_2)P(C1/M_2)P(C2/M_2)}{P(2\ \text{caras})} = \frac{0.5 \cdot 1 \cdot 1}{0.68} = \boxed{\frac{25}{34} \simeq 0.7353}$$

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Llamamos X = Número de ventas en 10 llamadas.
El número de repeticiones es n = 10. La probabilidad de realizar una venta en una llamada es p = 1 – 0.30 = 0.7.
X es una variable binomial. X = B(10, 0.7).

a) Nos piden calcular $P(X>7)$.

$$P(X>7)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$

$$=\binom{10}{8}0.7^8\cdot 0.3^2+\binom{10}{9}0.7^9\cdot 0.3^1+\binom{10}{10}0.7^{10}\cdot 0.3^0=\boxed{0.3828}$$

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es de 0.3828.

b) Nos piden calcular $P(X\geq 5)$.

$$P(X\geq 5)=P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=$$

$$=\binom{10}{5}0.7^5\cdot 0.3^5+\binom{10}{6}0.7^6\cdot 0.3^4+\binom{10}{7}0.7^7\cdot 0.3^3+\binom{10}{8}0.7^8\cdot 0.3^2+$$

$$+\binom{10}{9}0.7^9\cdot 0.3^1+\binom{10}{10}0.7^{10}\cdot 0.3^0=\boxed{0.9527}$$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es de 0.9527.

c) Nos piden calcular $P(3\leq X\leq 8)$.

$$P(3\leq X\leq 8)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$$

$$=\binom{10}{3}0.7^3\cdot 0.3^7+\binom{10}{4}0.7^4\cdot 0.3^6+\binom{10}{5}0.7^5\cdot 0.3^5+\binom{10}{6}0.7^6\cdot 0.3^4+$$

$$+\binom{10}{7}0.7^7\cdot 0.3^3+\binom{10}{8}0.7^8\cdot 0.3^2=\boxed{0.8491}$$

La probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas es de 0.8491.