Problema 1. Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0,5 euros y por cada uno de los sofisticados 0,7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? *(8 puntos)*

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? *(2 puntos)*

Solución:

Llamando: x = *nº de unidades del bolígrafo sencillo* y = *nº de unidades del bolígrafo sofisticado*

Los datos del problema los resumimos en la tabla:

bolígrafo	*tinta*	*plástico*	*ganancias/unidad*
sencillo	*1*	*1*	*0´50 €*
sofisticado	*1*	*1´5*	*0´70 €*

Las restricciones serán:

"dispone de 2500 unidades de tinta" $\rightarrow$ $x + y \le 2500$

"dispone de 3000 unidades de plástico" $\rightarrow$ $x + 1´5\,y \le 3000$

"no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos" $\rightarrow$ $x \le 2000$

Como las variables x e y representan latas, deben ser números naturales.

Las ganancias de la empresa vienen dadas por la función: $z = 0´5\,x + 0´7\,y$

El problema a resolver es:

$$\text{maximizar} \quad z = 0´5\,x + 0´7\,y$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} x + y \le 2500 \\ x + 1´5\,y \le 3000 \\ x \le 2000 \\ x,\ y \in N \end{cases}$$

Efectuamos los cálculos necesarios para la representación gráfica de las inecuaciones.

$x + y \le 2500$

$x + y = 2500$

x	y
0	2500
2500	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 0 \le 2500$ *Sí*

$x + 1´5y \le 3000$

$x + 1´5y = 3000$

x	y
0	2000
3000	0

¿(0,0) cumple?

$0 + 1´5 \cdot 0 \le 3000$ *Sí*

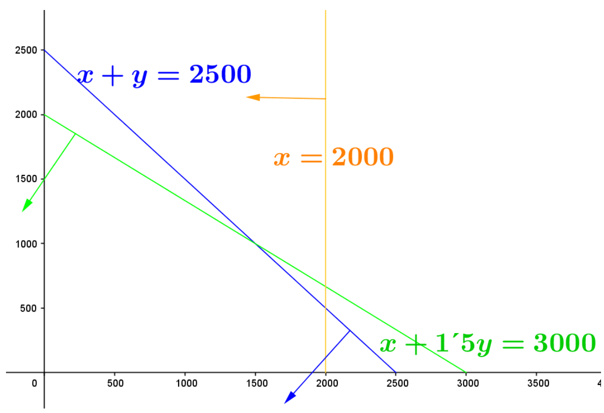
$x \le 2000$

$x = 2000$

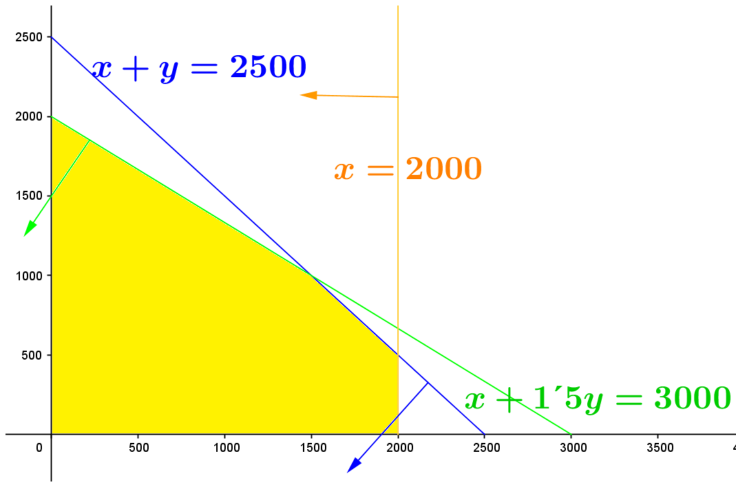
x	y
2000	0
2000	1000

¿(0,0) cumple?

$0 \le 2000$ *Sí*



La región determinada por el sistema de inecuaciones (región factible) está formada por los puntos de coordenada natural de la zona sombreada.



Vértices de la región factible:

Los de los ejes coordenados los obtuvimos en los cálculos para la representación: (0 , 0), (0 , 2000) y (2000, 0). Faltan los puntos de corte entre las rectas.

Corte entre las rectas:

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x + 1´5\,y = 3000 \end{cases} \rightarrow \quad -1x1^{a} \begin{cases} -x - y = -2500 \\ x + 1´5\,y = 3000 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones: $0´5\,y = 500;\quad y = \dfrac{500}{0´5} = 1000$

Sustituyendo el valor de y en la 1ª ecuación,
$x + 1000 = 2500;\quad x = 2500 - 1000;\quad x = 1500$ *Luego punto de corte (1500 , 1000)*

$$\begin{cases} x + y = 2500 \\ x = 2000 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de x en la 1ª ecuación,
$2000 + y = 2500;\quad y = 2500 - 2000;\quad y = 500$ *Luego punto de corte (2000 , 500)*

Los vértices de la región factible son: (0 , 0), (0 , 2000), (1500 , 1000), (2000 , 500) y (2000 , 0).

El máximo de z en la región se alcanzará en alguno de los vértices. Calculemos la función en los vértices,

x , y	$z = 0´5\,x + 0´7\,y$	
0 , 0	$0´5 \cdot 0 + 0´7 \cdot 0 = 0$	
0 , 2000	$0´5 \cdot 0 + 0´7 \cdot 2000 = 1400$	
1500 , 1000	$0´5 \cdot 1500 + 0´7 \cdot 1000 = 1450$	*máximo*
2000 , 500	$0´5 \cdot 2000 + 0´7 \cdot 500 = 1350$	
2000 , 0	$0´5 \cdot 2000 + 0´7 \cdot 0 = 1000$	

El máximo se alcanza en el punto (1500 , 1000). Por tanto,

a) ***Para maximizar las ganancias la empresa debe producir 1500 bolígrafos sencillos y 1000 sofisticados.***

b) ***Las ganancias máximas ascienden a 1450 euros.***

Problema 2. Consideramos las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\quad y\quad C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

a) Analiza si la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. *(3 puntos)*

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2\,X\,C=B^t$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. *(4 puntos)*

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & z\end{pmatrix}$ cumple la condición $C\,D=D\,C$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿$A\,B-2\,I$ es invertible?

Cálculos:

$$A\,B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot 0 & 1\cdot 4+0\cdot 2 & 1\cdot 0+0\cdot 3\\ 0\cdot(-1)+1\cdot 0 & 0\cdot 4+1\cdot 2 & 0\cdot 0+1\cdot 3\\ -1\cdot(-1)+3\cdot 0 & -1\cdot 4+3\cdot 2 & -1\cdot 0+3\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}$$

$$A\,B-2I=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 7\end{pmatrix}$$

$A\,B-2\,I$ será invertible si su determinante es distinto de cero.

$$\left|A\,B-2I\right|=\begin{vmatrix}-3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 2 & 7\end{vmatrix}=12+18=30\neq 0\quad\rightarrow\quad\exists\left(A\,B-2I\right)^{-1}$$

Solución: la matriz $A\,B-2\,I$ es invertible.

b) ¿Matriz X? / $A+2\,X\,C=B^t$

Despejemos X,

$2\,X\,C=B^t-A$; $X\,C=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)$; *si existe C^{-1} entonces, multiplicando por C^{-1} por la derecha*

$$X\,C\,C^{-1}=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)C^{-1};\quad X\,I=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)C^{-1};\quad X=\frac{1}{2}\left(B^t-A\right)C^{-1}$$

Como $|C|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\quad\rightarrow\quad\exists\, C^{-1}$

Cálculo de C^{-1},

$$C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\rightarrow\quad C^{-1}=\frac{1}{|C|}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$$

Cálculo de X,

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(B^t - A\right)C^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\cdot 0 + 0\cdot 1 & -2\cdot 1 + 0\cdot(-3) \\ 4\cdot 0 + 1\cdot 1 & 4\cdot 1 + 1\cdot(-3) \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 & 1\cdot 1 + 0\cdot(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente $X = \frac{1}{2}\left(B^t - A\right)C^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Valor de z? / C D = D C

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Estas dos matrices serán iguales si $\begin{cases} -3+z=1 \\ 1=-3+z \end{cases}$ *que es la misma ecuación, por tanto resolvamos:* $-3 + z = 1; \quad z = 1 + 3 = 4$

Solución: la matriz D cumple la condición C D = D C para z = 4.

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{1}{(3x^2-1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:
a) Dominio,

$$(3x^2-1)^2=0 \;\rightarrow\; 3x^2-1=0 \;\rightarrow\; 3x^2=1 \;\rightarrow\; x^2=\frac{1}{3} \;\rightarrow\; x=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\rightarrow \quad Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \;\rightarrow\; f(0)=\frac{1}{(3\cdot 0^2-1)^2}=\frac{1}{1}=1 \;\rightarrow\; (0,1)$$

$$f(x)=0 \;\rightarrow\; \frac{1}{(3x^2-1)^2}=0;\quad 1=0 \quad Falso,\quad no\ corta\ al\ eje\ OX$$

$Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ***y el único punto de corte con los ejes coordenados es: (0 , 1).***

b) Asíntotas horizontales y verticales.
Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{(3x^2-1)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(3x^2-1)^2}=\frac{1}{\infty}=0$$

, *la asíntota horizontal es y = 0.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que las posibles a.v. son $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ *o* $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{-\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(3x^2-1)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=\frac{-\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}}\frac{1}{(3x^2-1)^2}=\frac{1}{\left(3\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-1\right)^2}=\frac{1}{0}=\infty \;\rightarrow\; x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 0 y las asíntotas verticales $x=\frac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$**.**

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

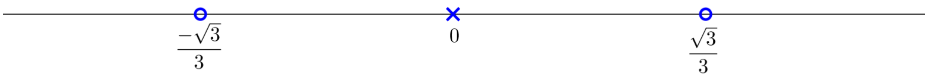
$$f'(x)=\frac{1}{\left(3x^2-1\right)^2}\frac{-1\cdot 2\left(3x^2-1\right)6x}{\left[\left(3x^2-1\right)^2\right]^2}=\frac{-12\,x\left(3x^2-1\right)}{\left(3x^2-1\right)^4}=\frac{-12x}{\left(3x^2-1\right)^3}$$

Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$-12x=0 \quad\to\quad x=0$

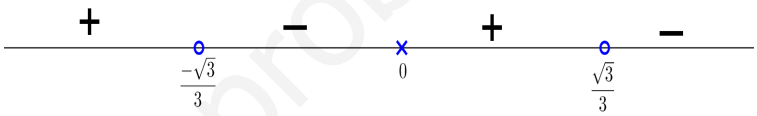
$$\left(3x^2-1\right)^3=0 \quad\to\quad 3x^2-1=0 \quad\to\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\cong\pm 0'58$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en los intervalos:* $\left[\ Dom\ f(x)=\Re-\left\{\frac{-\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}\ \right]$



Calculemos el signo de $f'(x)$ *en cada uno de los intervalos,*

x	$f'(x)=\frac{-12x}{\left(3x^2-1\right)^3}$
-1	$\frac{-12\cdot(-1)}{\left(3\,(-1)^2-1\right)^3}=\frac{12}{8}>0$
$-0'3$	$\frac{-12\cdot(-0'3)}{\left(3\,(-0'3)^2-1\right)^3}=\frac{3'6}{-0'3890}<0$
$0'3$	$\frac{-12\cdot(0'3)}{\left(3\,(0'3)^2-1\right)^3}=\frac{-3'6}{-0'3890}>0$
1	$\frac{-12\cdot 1}{\left(3\cdot 1^2-1\right)^3}=\frac{-12}{8}<0$



Por tanto,

f(x) es creciente en $\left(-\infty,\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ***y f(x) es decreciente en*** $\left(\frac{-\sqrt{3}}{3},0\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$**.**

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que en $x = 0$ $f(x)$ *tiene un mínimo local y que no tiene máximos locales.*

Para $x = 0$ $f(0) = 1$ *{calculado en el apartado a}*

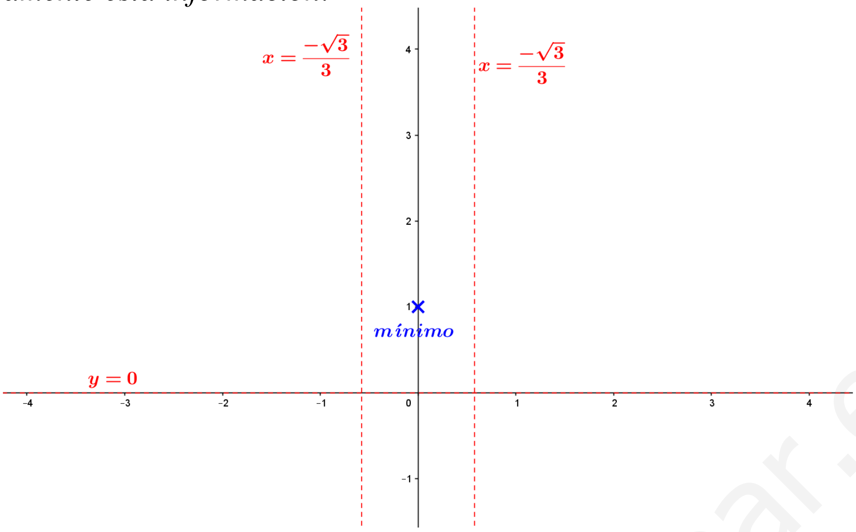
Solución: f(x) sólo tiene un mínimo local en (0 , 1).

e) Representación gráfica.

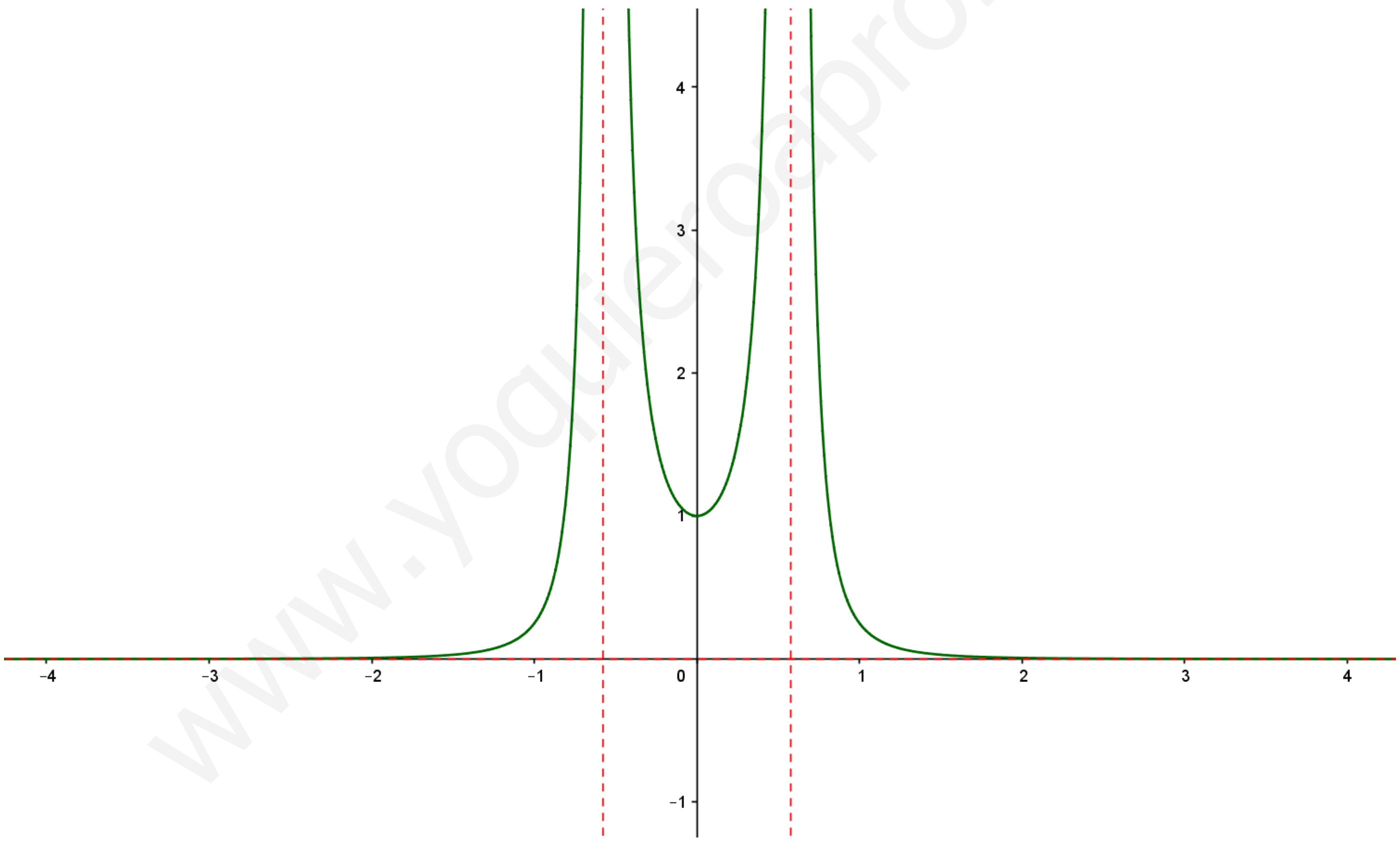
De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 1), mínimo local en (0 , 1); a.h. y = 0, a.v. $x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ *y* $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Representando gráficamente esta información:



Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



Si con la información anterior la representación no nos queda definida, calculamos puntos de la curva,

x	$f(x) = \frac{1}{(3x^2 - 1)^2}$
-1	$\frac{1}{(3\,(-1)^2 - 1)^2} = \frac{1}{8} > 0$
1	$\frac{1}{(3 \cdot 1^2 - 1)^2} = \frac{1}{8} > 0$

Problema 4. Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? *(3 puntos)*

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? *(4 puntos)*

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? *(2 puntos)*

Solución:

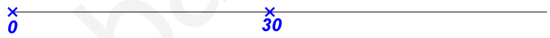
Los ingresos que obtiene son $I(x) = -x^2 + 60x + 100$; *x kilos de abono.*

Como x representa kilos $\text{Dom } I(x) = [0, +\infty)$

a) ¿Cantidad de abono que maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

Buscamos el máximo de I(x).

$I'(x) = -2x + 60; \quad -2x + 60 = 0; \quad -2x = -60; \quad x = \frac{-60}{-2} = 30.$

Debemos estudiar el signo de I´(x) en los siguientes intervalos: 

x	$I'(x) = -2x + 60$
10	$-2 \cdot 10 + 60 = 40 > 0$
40	$-2 \cdot 40 + 60 = -20 < 0$

Por tanto en x = 30 hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de x = 30 la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de I(x).

Para $x = 30$, $I(30) = -30^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus ingresos son 30 kg y estos ingresos máximos son de 1000€.

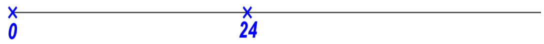
b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

Beneficio = Ingresos – Costes, $B(x) = I(x) - 12x = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$

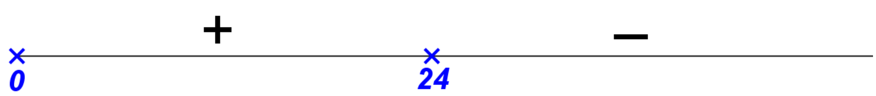
Como x representa kilos $\text{Dom } B(x) = [0, +\infty)$

Buscamos el máximo de B(x),

$B'(x) = -2x + 48; \quad -2x + 48 = 0; \quad -2x = -48; \quad x = \frac{-48}{-2} = 24.$

Debemos estudiar el signo de B´(x) en los siguientes intervalos: 

x	$B'(x) = -2x + 48$
10	$-2 \cdot 10 + 48 = 28 > 0$
30	$-2 \cdot 30 + 48 = -12 < 0$



Por tanto en x = 24 hay un máximo relativo. Además, como a la izquierda de x = 24 la función es creciente y a la derecha decreciente, el máximo relativo es el absoluto de B(x).

Para $x = 24$, $B(24) = -24^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$

Solución: la cantidad de abono que maximiza sus beneficios son 24 kg y estos beneficios máximos son de 676€.

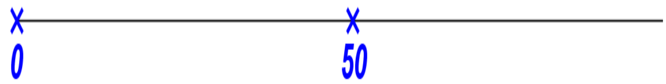
c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? $\quad$ ¿x? / $B(x) > 0$

$$-x^2 + 48x + 100 > 0$$

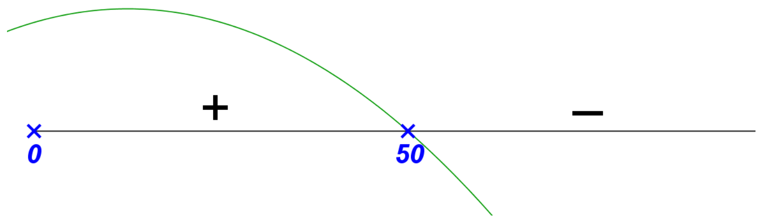
$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4\cdot(-1)\cdot 100}}{2\cdot(-1)} = \frac{-48 \pm 52}{-2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-48+52}{-2} = -2 \\ x_2 = \dfrac{-48-52}{-2} = 50 \end{array} \right.$$

Dom $B(x)$ = [0, $+\infty$), por tanto {– 2} $\notin$ Dom $B(x)$.

Hay que estudiar el signo de $B(x)$ en los intervalos:



Como $B(x)$ es un polinomio de segundo grado con coeficiente de x^2 negativo y raíces – 2 y 50,



Luego, $B(x) > 0$ si $x \in (\ 0\ ,\ 50\ )$.

Solución: para garantizar beneficios positivos debe emplear menos de 50 kg de abono.

Problema 5. Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música". *(3 puntos)*

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"? (3 puntos)

Solución:

Construyamos la tabla de distribución de los estudiantes por nivel y extraescolar (cada alumno escoge sólo una extraescolar).

El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol.

El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música.

	Fútbol	*Baloncesto*	*Música*	*total*
ESO	***230***	***60***		***310***
Bachillerato			***8***	
total	***300***			***400***

Completamos la tabla con las restas y sumas correspondientes,

$310 - 230 - 60 = 20$; $300 - 230 = 70$; $20 + 8 = 28$; $400 - 300 - 28 = 72$; $72 - 60 = 12$; $400 - 310 = 90$.

	Fútbol	*Baloncesto*	*Música*	*total*
ESO	***230***	***60***	***20***	***310***
Bachillerato	***70***	***12***	***8***	***90***
total	***300***	***72***	***28***	***400***

Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música"

Sucesos: ESO = "el estudiante está en ESO" y MUS = "el estudiante ha escogido música"

La probabilidad pedida es: $P(ESO \cup MUS)$

$$P(ESO \cup MUS) = P(ESO) + P(MUS) - P(ESO \cap MUS) = \frac{310}{400} + \frac{28}{400} - \frac{20}{400} = \frac{159}{200} = 0'795$$

La probabilidad pedida es 0´795.

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Suceso: DEP = "el estudiante ha seleccionado extraescolar deportiva"

La probabilidad pedida es: $P\left(ESO/_{DEP}\right)$

$$P\left(ESO/_{DEP}\right)=\frac{P(ESO\cap DEP)}{P(DEP)}=\frac{\frac{230+60}{400}}{\frac{230+60}{400}+\frac{70+12}{400}}=\frac{\frac{290}{400}}{\frac{372}{400}}=\frac{290}{372}=\frac{145}{186}\cong 0'7796$$

La probabilidad pedida es 0´7796.

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"?

Sucesos: BAC = "el estudiante está en Bachillerato" y NBAL = "el estudiante no ha escogido baloncesto"

Debemos comprobar si $P(BAC\cap NBAL)=P(BAC)\cdot P(NBAL)$

$$\left.\begin{array}{l} P(BAC\cap NBAL)=\frac{70+8}{400}=\frac{39}{200}=0'195 \\ P(BAC)=\frac{90}{400} \\ P(NBAL)=\frac{300+28}{400}=\frac{328}{400} \end{array}\right\} \quad ¿0'195=\frac{90}{400}\,\frac{328}{400}?;\quad ¿0'195=\frac{369}{2000}?;\quad ¿0'195=0'1845?\ \text{No}$$

Por tanto, los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto" no son independientes.

Problema 6. Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30% de las reses vacunadas por el método A, el 20% de las vacunadas por el método B y el 60% de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. *(3 puntos)*

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. *(4 puntos)*

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios". *(3 puntos)*

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

A = res vacunada con el método A

B = res vacunada con el método B

N = res no vacunada

R = tiene problemas respiratorios $\overline{R}$ *= no tiene problemas respiratorios*

De los datos del problema,

"de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas":

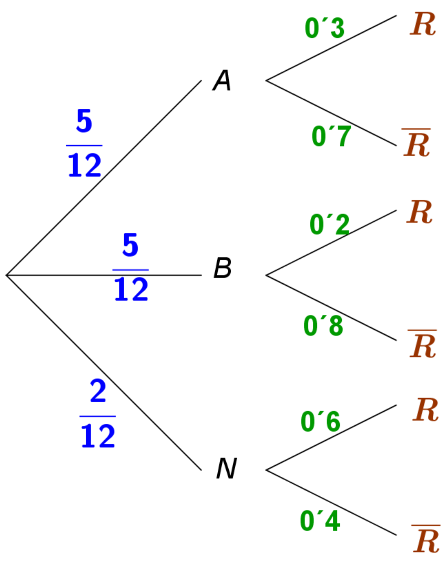
$$P(A)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}; \qquad P(B)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}; \qquad \{600-250-250=100\} \quad P(N)=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$$

"tuvieron problemas respiratorios el 30% de las reses vacunadas por el método A" $\rightarrow$ *si la res está vacunada con A* $\rightarrow$ $P(R)=0'30$ *y* $P(\overline{R})=1-0'30=0'70$

"tuvieron problemas respiratorios el 20% de las reses vacunadas por el método B" $\rightarrow$ *si la res está vacunada con B* $\rightarrow$ $P(R)=0'20$ *y* $P(\overline{R})=1-0'20=0'80$

"tuvieron problemas respiratorios el 60% de las reses no vacunadas" $\rightarrow$ *si la res no está vacunada* $\rightarrow$ $P(R)=0'60$ *y* $P(\overline{R})=1-0'60=0'40$

El árbol del problema es:



a) Probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

$$P(R)=\frac{5}{12}0'3+\frac{5}{12}0'2+\frac{2}{12}0'6=\frac{37}{120}\cong 0'3083$$

Solución: la probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios es 0´3083.

b) Probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.

$$P\left(B/\overline{R}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)}=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{1-P(R)}=\frac{\frac{5}{12}0'8}{1-\frac{37}{120}}=\frac{40}{83}\cong 0'4819$$

Solución: la probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B es 0´4819.

b) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios"

$$P(N\cap R)=\frac{2}{12}0'6=0'1$$

Solución: la probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios" es 0´1.