Problema 1. Una tienda de televisores ha obtenido *247250* euros por la venta de *220* televisores de sus modelos *ULED, QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta *1250* euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED*, respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Llamando: x = *número de televisores ULED vendidos*
y = *número de televisores QLED vendidos*
z = *número de televisores LD vendidos*

Calculemos el precio de cada tipo de televisor. P_x *precio del televisor ULED,* P_y *del QLED y* P_z *del LD.*

Del enunciado del problema obtenemos:

"un televisor del modelo ULED cuesta 1250 euros" $\rightarrow P_x = 1250$

"los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo ULED, respectivamente"
$\rightarrow P_y = 0'90 \cdot 1250 = 1125$ *y* $P_z = 0'80 \cdot 1250 = 1000$

Las ecuaciones para resolver el problema las obtenemos a partir de:

"la suma de la cantidad de televisores QLED y de televisores LD vendidos es igual al triple de los televisores ULED vendidos" $\rightarrow \quad y + z = 3x \quad \rightarrow \quad 3x - y - z = 0$

"ha obtenido 247250 euros por la venta de 220 televisores de sus modelos ULED, QLED y LD" $\rightarrow$
$1250x + 1125y + 100z = 247250$ *e* $x + y + x = 220$

El sistema a resolver es:
$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 3x - y - z = 0 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 0 \end{cases}$$

Lo resolveremos por Gauss.
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1250 & 1125 & 1000 & 247250 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 - 1000 \cdot F_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 4 & 0 & 0 & 220 \\ 250 & 125 & 0 & 27250 \end{array}\right)$$

De $F_2 \rightarrow 4x = 220 \rightarrow x = \frac{220}{4} = 55$

De $F_3 \rightarrow 250x + 125y = 27250 \rightarrow 250 \cdot 55 + 125y = 27250 \rightarrow 13750 + 125y = 27250 \rightarrow$
$125y = 27250 - 13750 \rightarrow 125y = 13500 \rightarrow y = \frac{13500}{125} = 108$

De $F_1 \rightarrow x + y + x = 220 \rightarrow 55 + 108 + z = 220 \rightarrow z = 220 - 55 - 108 \rightarrow z = 57$

***Solución:* se han vendido 55 tv ULED, 108 QLED y 57 LD.**

www.yoquieroaprobar.es

Problema 2. Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad y \quad B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1} A + A = B$. *(4 puntos)*

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A – B)\, Y – A\, Y = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3 *(4 puntos)*

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $A\, Z\, A^{-1} = I$. *(2 puntos)*

Solución:

a) *¿Matriz X? /* $X^{-1} A + A = B$.

$X^{-1} A + A = B \;\rightarrow\; X^{-1} A = B – A$; *multiplicando por la izquierda por X:* $X\; X^{-1} A = X\,(B – A)$

$\{como\ X\ X^{-1} = I\} \;\rightarrow\; I\,A = X\,(B – A) \;\rightarrow\; A = X\,(B – A)$

Si existe $(B – A)^{-1} \;\rightarrow$ *multiplicando por la derecha por* $(B – A)^{-1}$: $A\,(B – A)^{-1} = X\,(B – A)\,(B – A)^{-1}$

$\{como\ (B – A)\,(B – A)^{-1} = I\} \;\rightarrow\; A\,(B – A)^{-1} = X$

Cálculos:

$$B-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}; \qquad |B-A|=\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{vmatrix}=1\neq 0 \;\rightarrow\; \exists\,(B-A)^{-1}$$

Cálculo de la inversa de (B – A),

$$B-A=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{menores}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&-1&-1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{adjuntos}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix} \quad\rightarrow\quad (B-A)^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Finalmente

$$X=A(B-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot 0 & 1\cdot 0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 0+(-1)\cdot 0\\ 0\cdot 0+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot 0+1\cdot(-1)+0\cdot 1 & 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0\\ 0\cdot 0+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 0+0\cdot(-1)+1\cdot 1 & 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$

www.yoquieroaprobar.es

b) ¿Matriz Y? / (A – B) Y – A Y = I

Despejemos Y,

A Y – B Y – A Y = I; – B Y = I; B Y = – I; si existe B^{-1} *entonces, multiplicando por* B^{-1} *la izquierda*

$B^{-1} B Y = B^{-1} (-I)$; $I Y = -B^{-1} I$; $Y = -B^{-1}$

Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, B^{-1}$

Cálculo de B^{-1},

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{traspuesta}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Finalmente: \quad Y = -B^{-1} = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Solución: $Y = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c) ¿Matriz Z? / A Z $A^{-1} = I$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \rightarrow \quad \exists\, A^{-1}$

Despejemos Z, multiplicando por A^{-1} *por la izquierda:* $A^{-1} A\ Z\ A^{-1} = A^{-1}\ I$; $I\ Z\ A^{-1} = A^{-1}$; $Z\ A^{-1} = A^{-1}$;
multiplicando por A por la derecha: $Z\ A^{-1} A = A^{-1} A$; $Z I = I$; $Z = I$

Solución: Z = I

www.yoquieroaprobar.es

Problema 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\frac{x^2-3x}{x^2-3x+x+1}=\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$$

a) Dominio,

$$x^2-2x+1=0 \quad\to\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1 \quad\to\quad Dom\ f(x)=\Re-\{1\}$$

Puntos de corte con los ejes coordenados,

$$x=0 \quad\to\quad f(0)=\frac{0^2-3\cdot 0}{0^2-2\cdot 0+1}=\frac{0}{1}=0 \quad\to\quad (0,0)$$

$$f(x)=0 \quad\to\quad \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=0;\quad x^2-3x=0 \quad\to\quad x(x-3)=0\left\langle\begin{array}{l} x=0 \quad\to\quad (0,0)\\ x-3=0;\quad x=3 \qquad (3,0)\end{array}\right.$$

Dom f(x) = $\Re$ ~{1} y los puntos de corte con los ejes coordenados son: (0 , 0) y (3 , 0).

b) Asíntota horizontal y asíntota vertical.

Asíntota horizontal,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}1=1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}1=1$$

, *la asíntota horizontal es y =1.*

Asíntotas verticales.

Del dominio de la función deducimos que la posible a.v. es x = 1.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=\frac{1-3}{1-2+1}=\frac{-2}{0}=\infty \quad\to\quad x=1 \quad es\ a.v.$$

La asíntota horizontal es y = 1 y la asíntota vertical x = 1.

c) Monotonía.

Estudiemos el signo de $f'(x)$

$$f'(x)=\frac{(2x-3)\cdot\left(x^2-2x+1\right)-\left(x^2-3x\right)\cdot(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{x^2+2x-3}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$\begin{array}{r} x^2-2x+1 \\ 2x-3 \\ \hline -3x^2+6x-3 \\ 2x^3-4x^2+2x \\ \hline 2x^3-7x^2+8x-3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2-3x \\ 2x-2 \\ \hline -2x^2+6x \\ 2x^3-6x^2 \\ \hline 2x^3-8x^2+6x \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x^3-7x^2+8x-3 \\ -2x^3+8x^2-6x \\ \hline x^2+2x-3 \end{array}$$

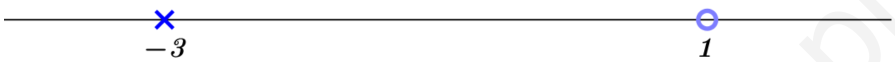
Obtengamos las raíces del numerador y denominador,

$$x^2+2x-3=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm4}{2}=$$

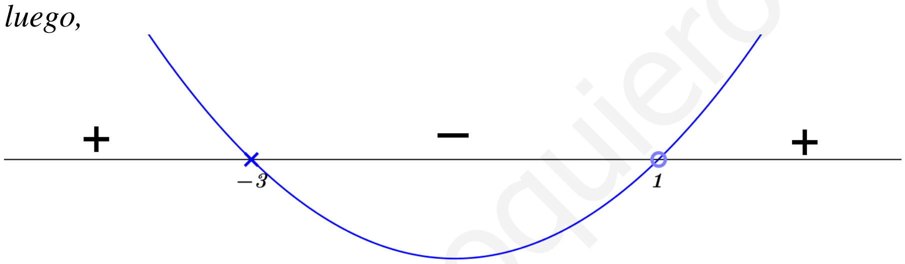
$$=\left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+4}{2}=\dfrac{2}{2}=1 \\ x_2=\dfrac{-2-4}{2}=\dfrac{-6}{2}=-3 \end{array}\right.$$

$$\left(x^2-2x+1\right)^2=0 \quad\rightarrow\quad x^2-2x+1=0 \quad\rightarrow\quad \{resuelta\ en\ a)\} \quad x=1$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ en los intervalos: ($\{1\}\notin Dom\ f(x)$)



El denominador de $f'(x)$ está elevado al cuadrado, siempre será positivo. El signo de $f'(x)$ sólo depende del numerador que, gráficamente, es un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 positivo y raíces -3 y 1, luego,



Por tanto,

f(x) es creciente en $(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$ y

f(x) es decreciente en $(-3,1)$

d) Máximos y mínimos locales.

Del estudio anterior deducimos que para $x=-3$ hay un máximo local.

$$x=-3 \quad f(1)=\frac{(-3)^2-3\cdot(-3)}{(-3)^2-2\cdot(-3)+1}=\frac{18}{16}=\frac{9}{8} \quad\rightarrow\quad Máximo\ local\ \left(-3,\frac{9}{8}\right)$$

Solución: f(x) sólo tiene un máximo local en $\left(-3,\frac{9}{8}\right)$

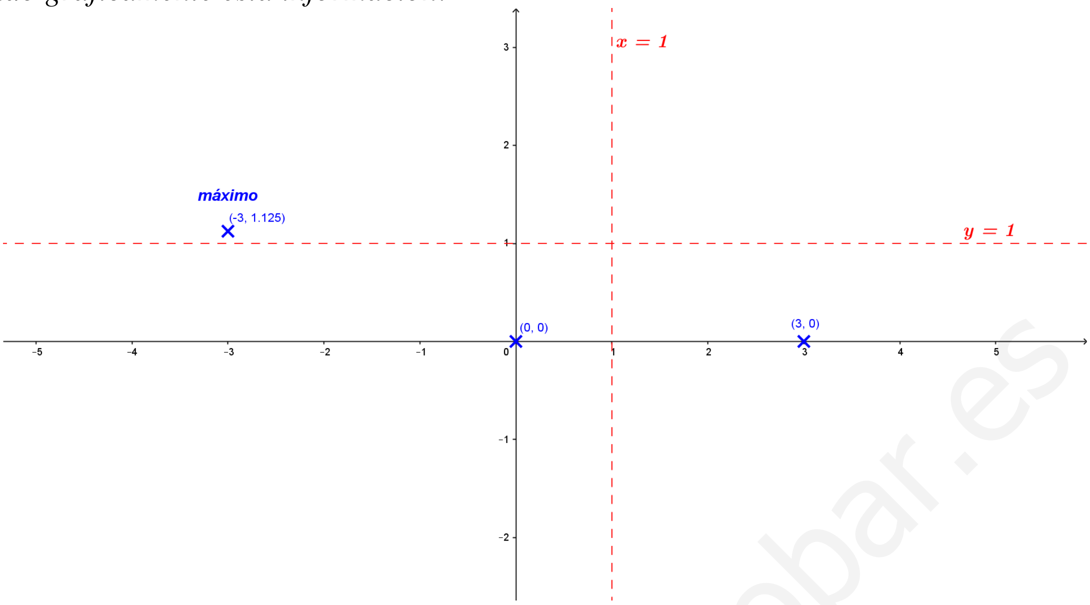
www.yoquieroaprobar.es

e) Representación gráfica.

De lo estudiado en los apartados anteriores sabemos:

Corte con ejes coordenados (0 , 0) y (3 , 0), máximo local en $\left(-3, \dfrac{9}{8}\right)$*; a.h. y = 1, a.v. x = 1.*

Representando gráficamente esta información:



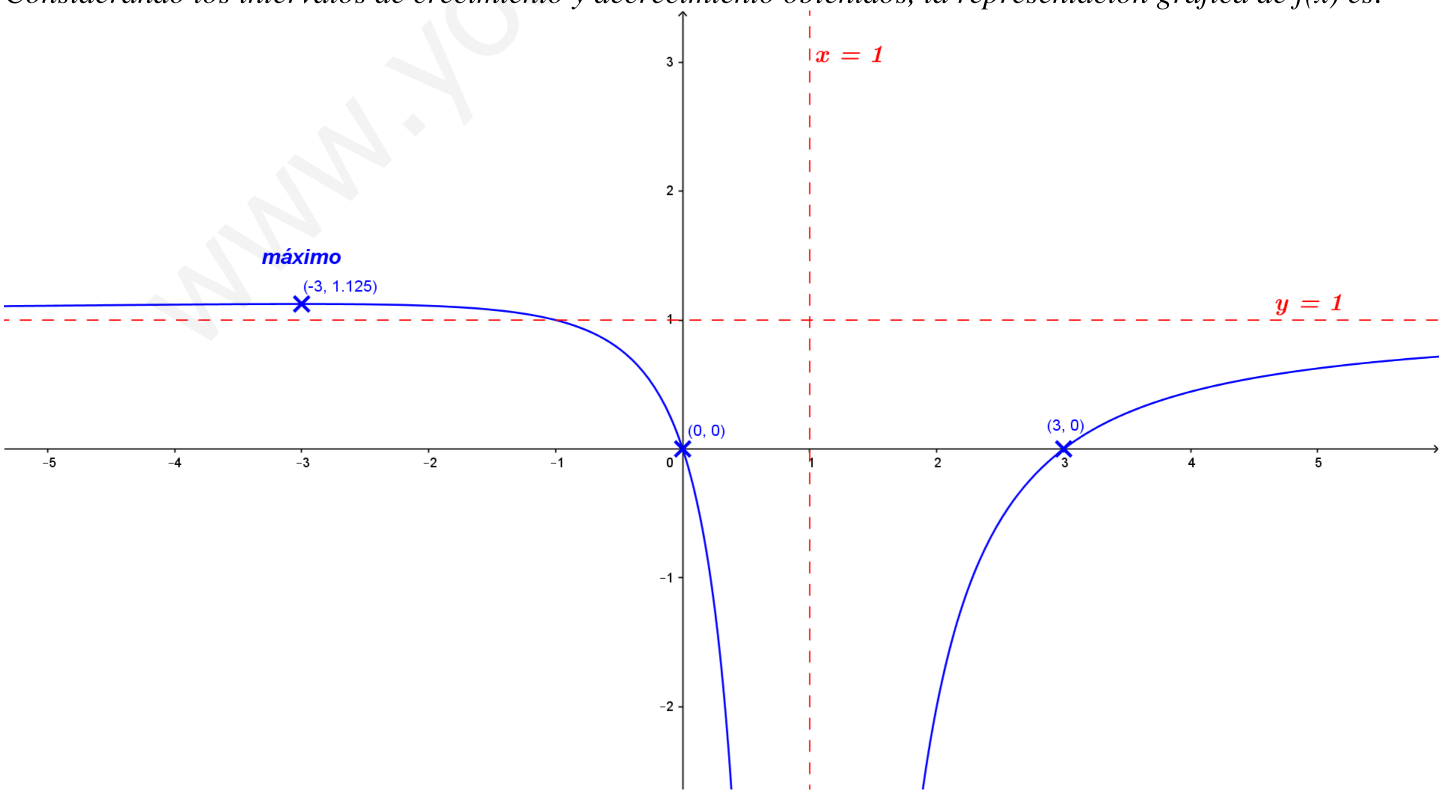
Si con esta información la representación no queda definida, podemos obtener la posición de la curva respecto de su asíntota horizontal.

A.H. y = 1

$$En\ -\infty, \quad x=-1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{(-1000)^2-3\cdot(-1000)}{(-1000)^2-2\cdot(-1000)+1}=1'0009...>1$$

$$En\ +\infty, \quad x=1000 \quad \rightarrow \quad y=\frac{1000^2-3\cdot 1000}{1000^2-2\cdot 1000+1}=0'998...<1$$

Considerando los intervalos de crecimiento y decrecimiento obtenidos, la representación gráfica de f(x) es:



www.yoquieroaprobar.es

Problema 4. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases} x^3+a\,x^2+24x & si \quad x\le -1 \\ (x-1)^2+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. *(2 puntos)*

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimo locales que tiene esta función en el intervalo $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$. *(4 puntos)*

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esta función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. *(2 puntos)*

Solución:

a) ¿Valor de a para que f(x) sea continua?

Para $x < -1$ $f(x) = x^3 + a\,x^2 + 24\,x$ *es, independientemente del valor de a, un polinomio luego es continua.*

Para $x > -1$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *es un polinomio luego es continua.*

El problema para continuidad está en el cambio de definición, es decir, en $x = -1$.

Continuidad en $x = -1$,

a) $f(1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24(-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

b) $$\lim_{x\to -1} f(x)=\begin{cases} \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(x^3+a\,x^2+24x\right)=(-1)^3+a(-1)^2+24(-1)=a-25 \\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left[(x-1)^2+3\right]=(-1-1)^2+3=7 \end{cases}$$

Para que exista el límite $a-25=7 \rightarrow a=7+25=32$

c) *Para* $32 = 2$ $f(-1) = \lim_{x\to -1} f(x)$

Solución: para que f(x) sea continua debe ser a = 32.

b) Para a = 9, máximos y mínimos locales de f(x) en $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right) = (-4'5, -1'5)$.

Como $(-4'5, -1'5) \subset \{x \le -1\} \rightarrow f(x) = x^3 + 9\,x^2 + 24\,x$

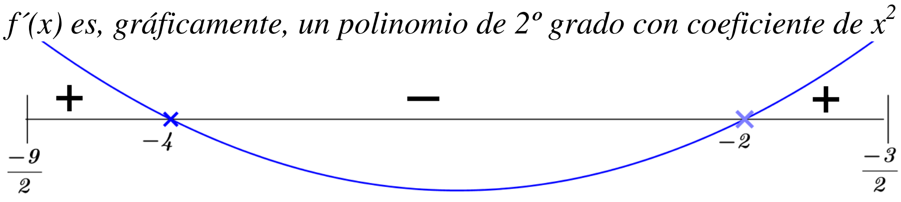
$f'(x) = 3\,x^2 + 18\,x + 24$

estudiemos el signo de $f'(x)$

$$3x^2+18x+24=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-18\pm\sqrt{12^2-4\cdot 3\cdot 24}}{2\cdot 3}=\frac{-18\pm 6}{6}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-18+6}{6}=-2 \\ x_2=\dfrac{-18-6}{6}=-4 \end{cases}$$

Por tanto, debemos estudiar el signo de $f'(x)$ *en:*

f´(x) es, gráficamente, un polinomio de 2º grado con coeficiente de x^2 *positivo y raíces* -4 *y* -2, *luego,*



En $x = -4$ *hay un máximo local y en* $x = -2$ *hay un mínimo local*

www.yoquieroaprobar.es

Para $x = -4 \;\rightarrow\; f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24(-4) = -16$
Para $x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24(-2) = -20$

Solución: ***para*** $a = 9$ ***los máximos y mínimos locales de f(x) en*** $\left(\frac{-9}{2}, \frac{-3}{2}\right)$ ***son:***

(– 4 , – 16) máximo local y (– 2 , – 20) mínimo local.

c) Si $a = 0$ *¿área de la región delimitada por f(x), x=2, x = 3 y eje OX?*

Si $a = 0 \;\rightarrow\; f(x) = \begin{cases} x^3 + 24x & si \;\; x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 & si \;\; x > -1 \end{cases}$

Entre $x = 2$ *y* $x = 3$ $f(x) = (x-1)^2 + 3$ *y, además, como f(x) es algo al cuadrado más tres:* $f(x) > 0$.
Por tanto el área pedida la obtenemos mediante el siguiente cálculo:

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx$$

$$Cálculo \;\; auxiliar: \quad \int (x-1)^2 dx = \left\{ cambio \;\; de \; variable \quad \begin{matrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{matrix} \right\} \int t^2 dx = \frac{t^3}{3} = \frac{(x-1)^3}{3}$$

$$A = \int_2^3 \left[(x-1)^2 + 3\right] dx = \left[\frac{(x-1)^3}{3} + 3x\right]_2^3 = \left(\frac{(3-1)^3}{3} + 3\cdot 3\right) - \left(\frac{(2-1)^3}{3} + 3\cdot 2\right) = \frac{8}{3} + 9 - \left(\frac{-1}{3} + 6\right) = \frac{16}{3}$$

Por tanto, ***el área de la región pedida es*** $\frac{16}{3}$ *u.a.*

www.yoquieroaprobar.es

Problema 5. Un *30 %* de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el *40 %* de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el *40 %* sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? *(4 puntos)*
b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? *(3 puntos)*
c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (3 puntos)

Solución:
Utilizando los sucesos: I = el directivo sabe inglés y A = el directivo sabe alemán

(Denotamos por I^c *y* A^c*, respectivamente, el suceso complementario de I y el suceso complementario de A).*

Los datos del problema son:

"Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" $\rightarrow P(I \cap A) = 0'30$,

"el 40 % de los directivos sabe inglés" $\rightarrow P(I) = 0'40$ *y*

"Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés" $\rightarrow P\left(I/_{A}\right) = 0'40.$

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? Debemos obtener P(A).

$$P\left(I/_{A}\right) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \quad \rightarrow \quad 0'40 = \frac{0'30}{P(A)} \quad \rightarrow \quad P(A) = \frac{0'3}{0'4} = 0'75$$

Solución: P(A) = 0´75.

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? Debemos obtener $P(A \cap I^c)$

$$A = \{I \cup I^c = U \quad \text{suceso seguro}\} A \cap (I \cup I^c) = (A \cap I) \cup (A \cap I^c), \quad \text{luego}$$

$$P(A) = P[(A \cap I) \cup (A \cap I^c)] = P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - P(A \cap I \cap A \cap I^c) =$$

$$A \cap I \cap A \cap I^c = A \cap I \cap I^c = \{\text{Como} \quad I \cap I^c = \varnothing\} = A \cap \varnothing = \varnothing \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

$$= P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - P(\varnothing) = P(A \cap I) + P(A \cap I^c) - 0 = P(A \cap I) + P(A \cap I^c)$$

$$\text{Hemos obtenido}: \quad P(A) = P(A \cap I) + P(A \cap I^c)$$

Sustituyendo las probabilidades conocidas:

$$\rightarrow \quad 0'75 = 0'3 + P(A \cap I^c) \quad \rightarrow \quad P(A \cap B^c) = 0'75 - 0'3 = 0'45$$

Solución: la probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés es 0´45.

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? Debemos obtener $P\left(I/_{A^c}\right)$

$$P\left(I/_{A^c}\right) = \frac{P(I \cap A^c)}{P(A^c)} = \frac{P(I \cap A^c)}{1 - P(A)} = \frac{P(I \cap A^c)}{1 - 0'75} = \frac{P(I \cap A^c)}{0'25} =$$

Calculemos $P(I \cap A^c)$ *de forma similar al cálculo realizado en el apartado anterior.*

$$I = \{A \cup A^c = U \quad \text{suceso seguro}\} I \cap (A \cup A^c) = (I \cap A) \cup (I \cap A^c), \quad \text{luego}$$

$$P(I) = P[(I \cap A) \cup (I \cap A^c)] = P(I \cap A) + P(I \cap A^c) - P(I \cap A \cap I \cap A^c) =$$

$$A \cap I \cap A \cap I^c = A \cap I \cap I^c = \{\text{Como} \quad I \cap I^c = \varnothing\} = A \cap \varnothing = \varnothing \quad \{\text{suceso imposible}\}$$

www.yoquieroaprobar.es

Entonces $\quad P(I)=P(I\cap A)+P(I\cap A^c)-P(\varnothing)=P(I\cap A)+P(I\cap A^c)-0=P(I\cap A)+P(I\cap A^c)$

Hemos obtenido: $\quad P(I)=P(I\cap A)+P(I\cap A^c) \;\rightarrow\; 0'4=0'3+P(I\cap A^c) \;\rightarrow\; P(I\cap A^c)=0'4-0'3=0'1$

Finalmente, $\quad P\left(I/A^c\right)=\dfrac{P(I\cap A^c)}{0'25}=\dfrac{0'1}{0'25}=0'4$

Solución: la probabilidad hay de que si el directivo no sabe alemán sepa inglés es 0´40.

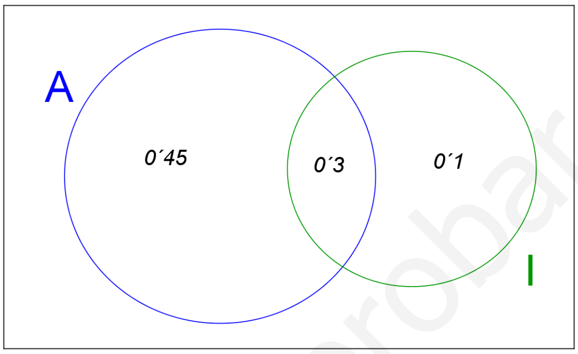
* * * * * * *

Los apartados b y c podemos resolverlos utilizando el diagrama de Venn de estos dos sucesos.
De los datos y cálculos realizados inicialmente y en el apartado a) se deduce que:

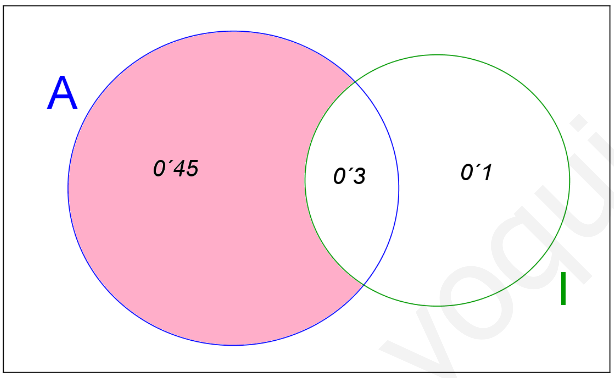
$P(I) = 0'4$

$P(I\cap A) = 0'3$

$P(A) = 0'75 \quad \rightarrow \quad P(A^c) = 0'25$



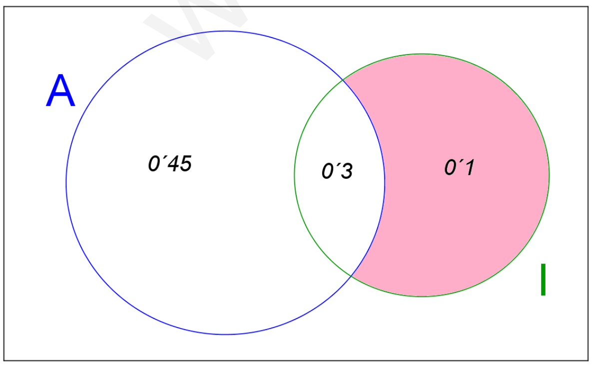
b) ¿ $P(A\cap I^c)$?



$P(A\cap I^c) = 0'45$

c) ¿ $P\left(I/A^c\right)$?

$I\cap A^c$ *es*:



$P\left(I/A^c\right)=\dfrac{P(I\cap A^c)}{P(A^c)}=\dfrac{0'1}{0'25}=0'4$

www.yoquieroaprobar.es

Problema 6. Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? *(3 puntos)*

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda”. *(4 puntos)*

c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? *(3 puntos)*

Solución:
Consideramos los siguientes sucesos:
En el dado equilibrado,

A = *obtener un número mayor que dos* $\rightarrow$ $P(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

B = *obtener un número menor o igual que dos* $\rightarrow$ $P(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

C = *obtener cara* y X = *obtener cruz*

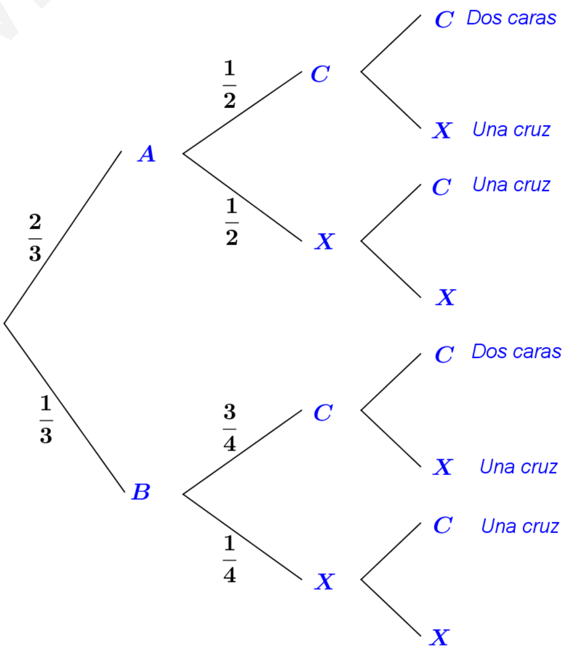
En la moneda bien construida, $P(C) = P(X) = \frac{1}{2}$.

En la moneda defectuosa la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz,

$P(C) = 3\,P(X)$ $\rightarrow$ como $P(C) + P(X) = 1$ $\rightarrow$ $3\,P(X) + P(X) = 1$ $\rightarrow$ $4P(X) = 1$ $\rightarrow$ $P(X) = \frac{1}{4}$

y $P(C) = 3\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

El árbol del problema es:



www.yoquieroaprobar.es

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Llamando CC = obtener dos caras en los dos lanzamientos de la moneda,

la probabilidad pedida es: $P\left(A/_{CC}\right)$

$$P\left(A/_{CC}\right)=\frac{P(A\cap CC)}{P(CC)}=\frac{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}}{\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{3}{4}\frac{3}{4}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}+\frac{3}{16}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}}=\frac{8}{17}\cong 0{\acute{}}4706$$

Solución: $P\left(A/_{CC}\right)=\frac{8}{17}\cong 0{\acute{}}4706.$

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda"

Llamando D = obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de la moneda

la probabilidad pedida es: $P(B\cup D)$

$$P(B\cup D)=P(B)+P(D)-P(B\cap D)=\frac{1}{3}+\frac{13}{16}-\frac{5}{16}=\frac{5}{6}\cong 0{\acute{}}8333$$

$$P(B)=\frac{1}{3}$$

$$P(D)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)=\frac{2}{3}\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\frac{15}{16}=\frac{13}{16}$$

$$P(B\cap D)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{3}\frac{15}{16}=\frac{5}{16}$$

Solución: $P(B\cup D)=\frac{5}{6}\cong 0{\acute{}}8333.$

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"?

Llamamos: F = obtener un 6 al lanzar el dado y G = obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda.

F y G serán independientes si $P(F\cap G) = P(F) . P(G)$

$$P(F)=\frac{1}{6}$$

$$P(G)=\frac{2}{3}\frac{1}{2}\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\frac{1}{4}\frac{1}{4}=\frac{1}{6}+\frac{1}{48}=\frac{3}{16}$$

$P(F\cap G)=$ *{como se obtiene un 6 (>2) la moneda que se lanza está bien construida}* $\frac{1}{6}\frac{1}{2}\frac{1}{2}=\frac{1}{24}$

$$P(F)P(G)=\frac{1}{6}\frac{3}{16}=\frac{1}{32}\neq\frac{1}{24}=P(F\cap G)$$

Solución: los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda" no son independientes.

www.yoquieroaprobar.es