

**Problema 1.** Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  donde  $k$  es un parámetro real.

- ¿Para qué valores del parámetro  $k$  la matriz  $A$  es invertible? (2 puntos)
- Para  $k = 0$ , si existe, calcular la matriz inversa de  $A$ . (4 puntos)
- Para  $k = 0$ , hallar las matrices diagonales  $D$  que verifican  $AD = DA$ . (4 puntos)

*Solución:*

a) ¿ $k?$  /  $A$  sea invertible.

$A$  es invertible si  $|A| \neq 0$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -3k + 2k - 2 + k^2 = k^2 - k - 2$$

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} k_1 = \frac{1+3}{2} = 2 \\ k_2 = \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto,  $A$  es invertible si  $k \neq -1$  y  $k \neq 2$ .

b) Para  $k = 0$ , calcular  $A^{-1}$ .

Como  $k = 0$  ( $k \neq -1$  y  $k \neq 2$ )  $\rightarrow$  existe la matriz inversa de  $A$ .

Cálculo de  $A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad |A| = (k^2 - k - 2)_{k=0} = -2$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{menores}} \left( \begin{array}{c|c|c} \left( \begin{array}{c|c} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{array} \right) & \begin{array}{c|c} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{array} & \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{array} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 2/3 & -2 & -2/3 \\ 3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{adjuntos}} \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{traspuesta}} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot Y \ A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solución:**  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) Para  $k = 0$ , calcular las matrices diagonales  $D$  que verifican  $AD = DA$ .

Como  $A$  es  $3 \times 3$ , para que se puedan efectuar los dos productos la matriz  $D$  también es  $3 \times 3$ .

$$D \text{ es una matriz diagonal } \rightarrow D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$$

Calculemos  $AD$ ,

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix}.$$

Calculemos  $DA$ ,

$$DA = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}.$$

Los dos productos deben ser iguales:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & y/3 & z \\ 2z & -y & -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & y/3 & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3z = 3x \\ y/3 = y/3 \\ z = y \\ 2z = 2z \\ -y = -z \\ -z = -z \end{cases} \text{ eliminando las identidades, } \begin{cases} 3z = 3x \\ z = y \\ -y = -z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = x \\ z = y \\ y = z \end{cases}$$

La 2ª y 3ª ecuaciones son la misma, queda  $\begin{cases} z = x \\ z = y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ , la solución es  $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \lambda \in \mathfrak{R}$

**Solución:** las matrices diagonales buscadas son  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \lambda \in \mathfrak{R}$ .

**Problema 2.** Se consideran las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ . Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real  $a$  para los que la ecuación matricial  $A^2 X = B$  tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector  $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$  es una solución de la ecuación  $A^2 X = B$ , encontrar el valor de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  dependiendo del parámetro real  $a$ . (5 puntos)

*Solución:*

a) Calculemos  $A^2$ ,

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

La ecuación  $A^2 X = B$  tendrá solución única si existe la inversa de  $A^2$ , por tanto si  $|A^2| \neq 0$

$$|A^2| = \begin{vmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{vmatrix} = (1+2a)4(2a+9) - 8 \cdot 4 \cdot 4a = 4[(1+2a)(2a+9) - 32a] = 4(4a^2 + 20a + 9 - 32a) =$$

$$= 4(4a^2 - 12a + 9). \quad 4(4a^2 - 12a + 9) = 0; \quad 4a^2 - 12a + 9 = 0$$

$$a = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$$

**Solución:** la ecuación  $A^2 X = B$  tiene solución única si  $a \neq \frac{3}{2}$ .

b)

$$\begin{aligned} \text{Sabemos que } \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (1+2a) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ (9+a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 4a \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (2a+9) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} \alpha = 6a-5 \\ \beta = 3a+8 \\ \gamma = 10a-9 \end{cases}$$

**Problema 3.** Se dan las rectas  $r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2}$  y  $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$ . Se pide:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto  $P$  de intersección. (5 puntos)
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$  y a  $s$ . (5 puntos)

*Solución:*

a) Comprobar que  $r$  y  $s$  se cortan

Nos interesa obtener un punto y un vector director de cada una de las rectas.

$$r: x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_r(1, 2, 1) \\ \vec{v}_r(1, 1, 2) \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathfrak{R}$$

$$s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \rightarrow \begin{cases} P_s(3, 3, -1) \\ \vec{v}_s(-2, -1, 2) \end{cases} \rightarrow s: \begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathfrak{R}$$

Para estudiar la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$  estudiamos el rango de la matriz  $\begin{bmatrix} \vec{v}_r & \vec{v}_s & \overrightarrow{P_r P_s} \end{bmatrix}$ , es

decir:  $M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

Rango de  $M$ ,  $\{M$  es  $3 \times 2$ , luego máximo rango de  $M$  es  $2\}$

$$\left. \begin{array}{l} |1| = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M) \geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ran}(M) = 2 \rightarrow r \text{ y } s \begin{cases} \text{se cortan} \\ o \\ \text{se cruzan} \end{cases}$$

Rango de  $M'$ ,  $\{M'$  es  $3 \times 3$ , luego máximo rango de  $M$  es  $3\}$ .

Por el cálculo del rango de  $M$ , sabemos que  $\text{ran}(M') \geq 2$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 4 - 4 + 2 + 4 = 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 2$$

Como  $\text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 2$ , las rectas  $r$  y  $s$  se cortan.

El punto de corte entre  $r$  y  $s$  lo obtenemos resolviendo el sistema de las rectas a partir de sus ecuaciones paramétricas. Es decir,

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\alpha \\ 2 + \lambda = 3 - \alpha \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\alpha \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ \lambda + \alpha = 1 \\ 2\lambda - 2\alpha = -2 \end{cases} \quad \text{De este sistema, según el estudio de rangos anterior, sabemos que}$$

rango de la matriz de coeficientes = rango de la matriz ampliada =  $2 = n^\circ$  de incógnitas ( $\lambda$  y  $\alpha$ ).

Resolvemos usando 1ª y 2ª ecuación (corresponden al menor de orden 2 no nulo). El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ \lambda + \alpha = 1 \end{cases} \rightarrow (-1)x2^a \begin{cases} \lambda + 2\alpha = 2 \\ -\lambda - \alpha = -1 \end{cases}$$

$$\alpha = 1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación:  $\lambda + 1 = 1$ ;  $\lambda = 0$

Sustituimos los valores de las incógnitas en las ecuaciones de  $r$  y  $s$  para comprobar que se obtiene el mismo punto. Sólo sería necesario sustituir en una de las rectas.

$$\text{En } r: \begin{cases} x=1+0=1 \\ y=2+0=2 \\ z=1+0=1 \end{cases}$$

$$\text{En } s: \begin{cases} x=3-2\alpha=3-2\cdot 1=1 \\ y=3-\alpha=3-1=2 \\ z=-1+2\alpha=-1+2\cdot 1=1 \end{cases}$$

Por tanto, el punto de corte entre las rectas  $r$  y  $s$  es  $P(1, 2, 1)$

b) ¿recta  $t$  /  $P \in t$  y  $t \perp r$  y  $s$ ?

$$\text{Como } t \perp r \text{ y } s \rightarrow \vec{v}_t = \vec{v}_r \otimes \vec{v}_s = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$$

Por tanto  $\vec{v}_t(4, -6, 1)$ . Como  $P(1, 2, 1) \in t$ , la ecuación de la recta  $t$  será:

$$\text{Ecuación paramétrica } t: \begin{cases} x=1+4\beta \\ y=2-6\beta \\ z=1+\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{ecuación continua } t: \frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = \frac{z-1}{1}.$$

**Problema 4.** Sea el plano  $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$ . Se pide:

- Calcular los valores de  $d$  para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro  $d$ , las coordenadas de los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$  que resultan de intersectar el plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , respectivamente. (3 puntos)
- Para  $d \neq 0$ , calcular el ángulo formado por los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$  determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

*Solución:*

a) ¿ $d?$  /  $d(\pi, (0,0,0)) = 1$ .

$$d(\pi, O) = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|d|}{\sqrt{61}}$$

$$\text{y debe ser } \frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \rightarrow |d| = 61 \rightarrow \begin{cases} d = \sqrt{61} \\ d = -\sqrt{61} \end{cases}$$

**Solución:**  $d = \sqrt{61}$  o  $d = -\sqrt{61}$ .

b) Calculemos los tres puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , intersección del plano  $\pi$  con cada uno de los tres ejes coordenados.

$A$ , corte del plano  $\pi$  con eje  $X$ . La ecuación del eje  $X$  es:  $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 6x - d = 0 \rightarrow 6x = d \rightarrow x = \frac{d}{6} \rightarrow A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$$

$B$ , corte del plano  $\pi$  con eje  $Y$ . La ecuación del eje  $Y$  es:  $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow 4y - d = 0 \rightarrow 4y = d \rightarrow y = \frac{d}{4} \rightarrow B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$C$ , corte del plano  $\pi$  con eje  $Z$ . La ecuación del eje  $Z$  es:  $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow -3z - d = 0 \rightarrow 3z = -d \rightarrow z = \frac{-d}{3} \rightarrow C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

**Solución:** los puntos son  $A\left(\frac{d}{6}, 0, 0\right)$ ,  $B\left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$  y  $C\left(0, 0, \frac{-d}{3}\right)$ .

c) Para  $d \neq 0$ , calcular el ángulo formado por los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

$$\text{Sea } \alpha = \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})}$$

$$\vec{AB} = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right)$$

$$\vec{AC} = \left(0, 0, \frac{-d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\left| \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \cdot \left(-\frac{d}{6}, 0, \frac{-d}{3}\right) \right|}{\sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}}} = \\ &= \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{52d^2}{576}} \sqrt{\frac{45d^2}{324}}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}} \sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{\sqrt{13d^2}}{12} \frac{\sqrt{5d^2}}{6}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{\sqrt{65d^4}}{72}} = \frac{\left| \frac{d^2}{36} \right|}{\frac{d^2 \sqrt{65}}{72}} = \\ &\left\{ \frac{d^2}{36} > 0 \rightarrow \left| \frac{d^2}{36} \right| = \frac{d^2}{36} \right\} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2 \sqrt{65}}{72}} = \frac{72 d^2}{36 d^2 \sqrt{65}} = \frac{2}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$

Entonces,  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} \rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{65}}\right) \cong 75'6367''$  o  $1'3201$  rds.

**Solución:** el ángulo formado por los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$  es  $75'6367''$  o  $1'3201$  rds.

- Problema 5.** Se considera la función  $h(x) = ax + x^2$  donde  $a$  es un parámetro real. Se pide:
- El valor de  $a$  que hace que la gráfica de la función  $y = h(x)$  tenga un mínimo relativo en la abscisa  $x = \frac{-3}{4}$ . (3 puntos)
  - Para el valor de  $a$  del apartado anterior, dibuja las curvas  $y = h(x)$  e  $y = h'(x)$ . (2 puntos)
  - Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Solución:

a) ¿a? /  $y = h(x)$  tenga un mínimo relativo en  $x = \frac{-3}{4}$ .

$$h'(x) = a + 2x; \quad a + 2x = 0; \quad 2x = -a; \quad x = \frac{-a}{2}$$

$$h''(x) = 2 \rightarrow h''\left(\frac{-a}{2}\right) = 2 > 0 \rightarrow \text{en } x = \frac{-a}{2} \text{ hay un mínimo relativo.}$$

$$\text{Por tanto, } \frac{-a}{2} = \frac{-3}{4} \rightarrow -a = \frac{-6}{4} \rightarrow a = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

**Solución:**  $a = \frac{3}{2}$ .

b) Para  $a = \frac{3}{2}$  dibujar las curvas  $y = h(x)$  e  $y = h'(x)$ .

$$y = h(x) = x^2 + \frac{3}{2}x$$

Polinomio de 2º grado, gráficamente una parábola.

Corte con ejes coordenados  $(0, 0)$  y  $\left(\frac{-3}{2}, 0\right)$

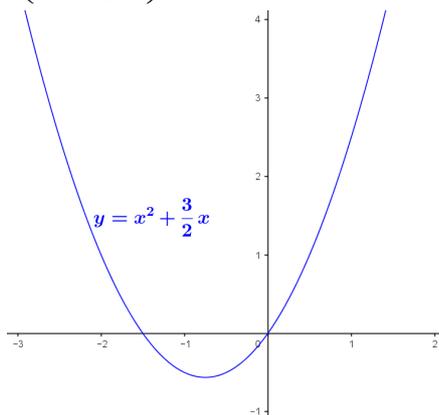
$$x = 0 \rightarrow y = 0$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 + \frac{3}{2}x = 0; \quad x\left(x + \frac{3}{2}\right) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x + \frac{3}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

Por lo estudiado en el apartado a), esta función tiene un mínimo

$$\text{relativo en } x = \frac{-3}{4} \rightarrow y = \left(\frac{-3}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} \cdot \frac{-3}{4} = \frac{9}{16} - \frac{9}{8} = \frac{-9}{16}$$

Mínimo relativo  $\left(\frac{-3}{4}, \frac{-9}{16}\right)$



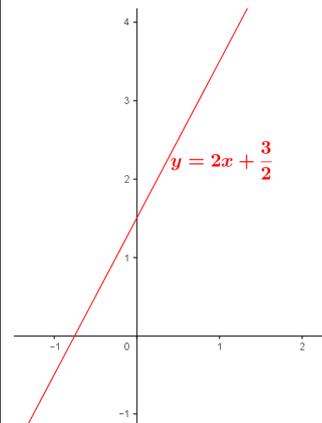
$$y = h'(x) = 2x + \frac{3}{2}$$

Polinomio de 1º grado, gráficamente una recta.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

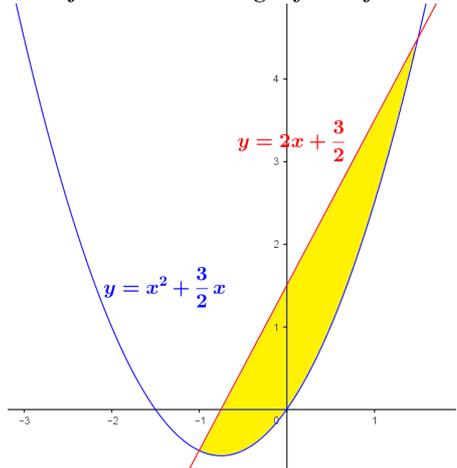
$$y = 0 \rightarrow 2x + \frac{3}{2} = 0; \quad 2x = \frac{-3}{2}; \quad x = \frac{-3}{4}$$

x	y
0	$\frac{3}{2}$
$\frac{-3}{4}$	0



c) ¿área del plano comprendida entre ambas curvas?

Dibujemos las dos gráficas juntas:



El área comprendida entre las dos curvas es la zona coloreada.

Obtengamos los puntos de corte entre las dos curvas,

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 2x + \frac{3}{2}; \quad 2x^2 + 3x = 4x + 3; \quad 2x^2 - x - 3 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm 5}{4} = \begin{cases} x_1 = \frac{1+5}{4} = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

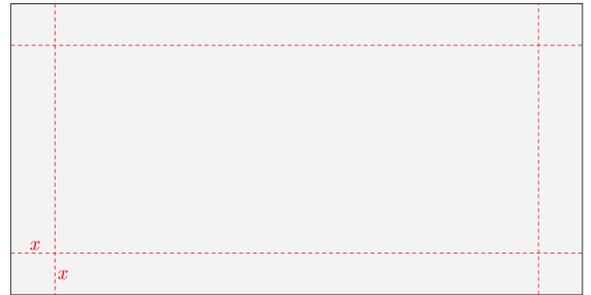
El área pedida la obtendremos a calculando la siguiente integral definida,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{3/2} \left( 2x + \frac{3}{2} - x^2 - \frac{3}{2}x \right) dx = \int_{-1}^{3/2} \left( -x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \left[ -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x \right]_{-1}^{3/2} = \\ &= \left[ -\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} + \frac{3}{2} \left(\frac{3}{2}\right) \right] - \left[ -\frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{4} + \frac{3}{2}(-1) \right] = \left( -\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right) = \\ &= \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{125}{48} \cong 2'6042 \end{aligned}$$

**Solución:** el área pedida mide  $\frac{125}{48}$  u.a.  $\cong 2'6042$  u.a.

**Problema 6.** Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud  $x$  en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
- b) Dicho volumen. (2 puntos)



*Solución:*

*Completando las dimensiones de la hoja:*

	<p>Las dimensiones, en cm, de la caja de cartón a construir son:</p> <p>largo <math>16 - 2x</math>,                  ancho <math>10 - 2x</math> y                  alto <math>x</math></p> <p>Por lo tanto el volumen de la caja será</p> $V(x) = (16 - 2x)(10 - 2x)x$
--	--

Y para que haya caja deberá cumplirse: 
$$\begin{cases} x > 0 \\ 16 - 2x > 0 \rightarrow 16 > 2x \rightarrow 8 > x \equiv x < 8, \text{ luego } 0 < x < 5 \\ 10 - 2x > 0 \rightarrow 10 > 2x \rightarrow 5 > x \equiv x < 5 \end{cases}$$

$$V(x) = (160 - 32x - 20x + 4x^2)x = (4x^2 - 52x + 160)x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$$

Debemos obtener el máximo de la función  $V(x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x$  siendo  $0 < x < 5$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$12x^2 - 104x + 160 = 0; \quad x = \frac{-(-104) \pm \sqrt{(-104)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 160}}{2 \cdot 12} = \frac{104 \pm 56}{24} = \begin{cases} x_1 = \frac{104 + 56}{24} = \frac{20}{3} > 5 \\ x_2 = \frac{104 - 56}{24} = 2 \in (0,5) \end{cases}$$

Obtengamos el signo de  $V'(x)$  a la izquierda y derecha de  $x = 2$ .

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160$$

$$x = 1.5 \rightarrow V'(1.5) = 12(1.5)^2 - 104(1.5) + 160 = 31 > 0 \text{ creciente}$$

$$x = 2.5 \rightarrow V'(2.5) = 12(2.5)^2 - 104(2.5) + 160 = -25 < 0 \text{ decreciente}$$

Por tanto, como  $V(x)$  es creciente a la izquierda de 2 y decreciente a su derecha el máximo relativo es absoluto.

$$\text{Para } x = 2, \text{ largo } 16 - 2 \cdot 2 = 12, \text{ ancho } 10 - 2 \cdot 2 = 6; \quad V(2) = 4 \cdot 2^3 - 52 \cdot 2^2 + 160 \cdot 2 = 144$$

*Solución:*

- a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible son: 12 cm de largo, 6 cm de ancho y 2 cm de altura.
- b) El volumen máximo es de  $144 \text{ cm}^3$ .

**Problema 7.** Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10'25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Utilizamos los siguientes sucesos:

$M_1$  = lata fabricada por la 1ª máquina

$M_2$  = lata fabricada por la 2ª máquina

$M_3$  = lata fabricada por la 3ª máquina

$B$  = lata buena                       $\bar{B}$  = lata defectuosa

De los datos del problema:

La máquina  $M_1$  fabrica el 30% de las latas →  $P(M_1) = 0'30$ .

La máquina  $M_2$  fabrica el 25% de las latas →  $P(M_2) = 0'25$ .

Y el resto (  $100 - 30 - 25 = 45$  ) lo fabrica la máquina  $M_3$  →  $P(M_3) = 0'45$ .

En  $M_1$  el 10% de las latas fabricadas son defectuosas →  $P(\bar{B}|M_1) = 0'10$  y  $P(B|M_1) = 1 - 0'10 = 0'90$

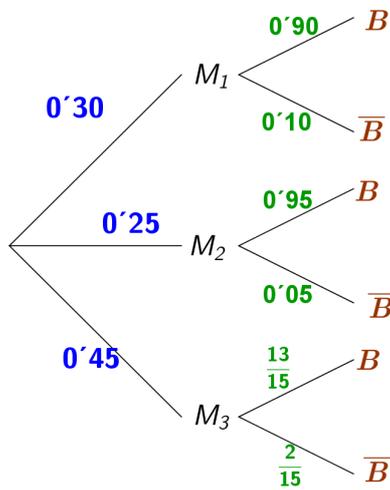
En  $M_2$  el 5% de las latas fabricadas son defectuosas →  $P(\bar{B}|M_2) = 0'05$  y  $P(B|M_2) = 1 - 0'05 = 0'95$

En  $M_3$  →  $P(\bar{B}|M_3) = x$  y  $P(B|M_3) = 1 - x$

El 10'25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas →  $P(\bar{B}) = 0'1025$

El árbol del problema es:

$P(\bar{B}) = 0'1025$  y del árbol  
 $P(\bar{B}) = 0'30 \cdot 0'10 + 0'25 \cdot 0'05 + 0'45 \cdot x = 0'0425 + 0'45 \cdot x$   
 Por tanto:  $0'0425 + 0'45 x = 0'1025$ ;  
 $0'45 x = 0'1025 - 0'0425$ ;  $0'45 x = 0'06$   
 $x = \frac{0'06}{0,45} = \frac{2}{15}$  y  $1 - x = 1 - \frac{2}{15} = \frac{13}{15}$   
 Entonces el árbol queda:



a) Probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa.

La probabilidad pedida es  $P\left(\frac{\bar{B}}{M_3}\right)$

$$P\left(\frac{\bar{B}}{M_3}\right) = \frac{P(\bar{B} \cap M_3)}{P(M_3)} = \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.45} = \frac{2}{15} \cong 0.1333.$$

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

La probabilidad pedida es  $P\left(\frac{M_1}{B}\right)$

$$P\left(\frac{M_1}{B}\right) = \frac{P(M_1 \cap B)}{P(B)} = \frac{0.30 \cdot 0.90}{1 - P(\bar{B})} = \frac{0.27}{1 - 0.1025} = \frac{108}{359} \cong 0.3008.$$

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

La probabilidad pedida es  $P\left(\frac{M_1}{\bar{B}}\right) + P\left(\frac{M_3}{\bar{B}}\right)$

$$P\left(\frac{M_1}{\bar{B}}\right) + P\left(\frac{M_3}{\bar{B}}\right) = \frac{P(M_1 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} + \frac{P(M_3 \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0.30 \cdot 0.10}{0.1025} + \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.1025} = \frac{36}{41} \cong 0.8780.$$

**Problema 8.** Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
- Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
- Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

*Solución:*

Utilizamos los siguientes sucesos:

$E$  = mensaje con emoticonos.  $\bar{E}$  = mensaje sin emoticonos

Como “el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp añade emoticono”  $\rightarrow$

$$P(E) = 0'60 \rightarrow P(\bar{E}) = 1 - 0'60 = 0'40$$

Se mandan 10 mensajes, usando la variable  $X$  = número de mensajes con emoticonos en 10 mensajes,  $X$  es una variable binomial de parámetros  $n = 10$  y  $p = 0'6$ .

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para  $p \leq 0'5$ ). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable:  $Y$  = número de mensajes sin emoticonos en 10 mensajes  $\rightarrow Y = B(10, 0'4)$  y la tabla nos da los resultados para  $Y$ .

La relación entre estas dos variables es:

$X$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$Y$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

a) Probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.

“ningún mensaje de los diez tenga emoticonos”  $\equiv X = 0 \equiv Y = 10$

$$P(X = 0) = P(Y = 10) = P(Y \leq 10) - P(Y \leq 9) = 1 - 0'9999 = 0'0001$$

**La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es 0'0001.**

b) Probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.

$$\frac{2}{5} \text{ de } 10 = \frac{2}{5} \cdot 10 = 4$$

“que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos”  $\equiv X = 4 \equiv Y = 6$

$$P(X = 4) = P(Y = 6) = P(Y \leq 6) - P(Y \leq 5) = 0'9452 - 0'8338 = 0'1114$$

**La probabilidad de que exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos es 0'1114.**

c) Probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos.

“que ocho o más mensajes tengan emoticonos”  $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$

$$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0'1673$$

**La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es 0'1673.**