Problema 1. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$-x+y+z=m$$
$$2x+my-z=3m$$
$$(m-1)x+3y-z=6+m$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. *(6 puntos)*

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. *(4 puntos)*

Solución:

a)

La matriz ampliada de este sistema es: $A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array}\right)$

A es una matriz 3x3, por tanto el máximo rango de A es 3.
A´ es una matriz 3x4, por tanto el máximo rango de A´ es 3.
Empezamos estudiando el rango de A

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_2+C_1 \\ = C_3+C_1 \\ \end{matrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & m+2 & 1 \\ m-1 & m+2 & m-2 \end{vmatrix} = \{desarrollando\ por\ la\ 1^a\ fila\} = -1\begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ m+2 & m-2 \end{vmatrix} =$$

$$= -((m+2)(m-2)-(m+2)) = -[(m+2)(m-2-1)] = -[(m+2)(m-3)]$$

$$-[(m+2)(m-3)]=0; \quad \left\langle \begin{matrix} m+2=0 & \rightarrow & m=-2 \\ m-3=0 & \rightarrow & m=3 \end{matrix} \right.$$

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3

|A| ≠ 0 → ran(A) = 3, y como el máximo rango de A´ es 3 → ran(A) = ran(A´) = 3 = nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible y determinado.

Para m = – 2

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Calculemos el rango de A
Sabemos que |A| = 0, estudiemos el rango de A,

$$En\ A, \left. \begin{matrix} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1-2 = -1 \neq 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Calculemos el rango de A´
Al menor anterior no nulo de A le añadimos la cuarta columna y tercera fila,

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -6 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 4+4+18+6+6-8 = 30 \neq 0 \quad \rightarrow \quad ran(A´) = 3$$

Por lo tanto, ran(A) ≠ ran(A´), luego el sistema es incompatible.

Para m = 3

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

En esta matriz F_2 y F_3 son iguales, podemos eliminar una de ellas (ambas ecuaciones son la misma). Queda:

$$A' = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

A es una matriz 2x3, por tanto el máximo rango de A es 2.
A´ es una matriz 2x4, por tanto el máximo rango de A´ es 2.

Empezamos estudiando el rango de A

$$\text{En A,} \quad \left.\begin{array}{l} |-1| = -1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow ran(A) = 2$$

Como el máximo rango de A´ es 2 $\rightarrow$ ran(A) = ran(A´) = 2 < nº incógnitas, por lo que el sistema es compatible indeterminado.

Por tanto,

Para m ≠ – 2 y m ≠ 3 el sistema es compatible determinado
Para m = – 2 el sistema es incompatible y
Para m = 3 el sistema es compatible indeterminado

b) Solución para m = 3.

Del estudio realizado en el apartado anterior para m = 3 el sistema es compatible indeterminado y las ecuaciones e incógnitas principales (las del menor de orden 2 no nulo) son 1ª y 2ª y x e y.
El sistema a resolver es:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - z \\ 2x + 3y = 9 + z \end{cases}$$

$$|A| = -5$$

Resolviendo por Cramer,

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3-z & 1 \\ 9+z & 3 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{9 - 3z - 9 - z}{-5} = \frac{-4z}{-5} = \frac{4z}{5}; \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 3-z \\ 2 & 9+z \end{vmatrix}}{-5} = \frac{-9 - z - 6 + 2z}{-5} = \frac{-15 + z}{-5} = \frac{15 - z}{5}$$

$$\textbf{Si } \boldsymbol{m = 3}\textbf{, la solución es: } \begin{cases} x = \dfrac{4\lambda}{5} \\ y = \dfrac{15 - \lambda}{5} \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \Re$$

Problema 2. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. *(3 puntos)*
b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B$. *(4 puntos)*
c) Para $m=-1$, calcular A^5. *(3 puntos)*

Solución:
a) Rango de A en función de m.
A es 3x3 por tanto el máximo rango de A es 3.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix}=\{desarrollando\ por\ la\ 2^a\ fila\}=m\begin{vmatrix} 1 & m \\ m & m \end{vmatrix}=m(m-m^2)$$

$$m(m-m^2)=0 \quad\rightarrow\quad \begin{cases} m=0 \\ m-m^2=0 \quad\rightarrow\quad m(1-m)=0 \begin{cases} m=0 \\ 1-m=0\rightarrow m=1 \end{cases} \end{cases}$$

Por lo tanto,
Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$, ran(A) = 3.

Si $m = 0$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.\quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como\quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)=2$$

Si $m = 1$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\quad Sabemos\ que\ |A|=0$$

$$como\quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0 \quad\rightarrow\quad ran(A)=2$$

Solución:
Si $m\neq 0$ y $m\neq 1$, ran(A) = 3.
Si $m = 0$ o $m = 1$, ran(A) = 2.

b) Para $m=-1$, resolver $AX=B$

Para $m=-1$ ($m\neq 0$ y $m\neq 1$) $\rightarrow$ ran(A) = 3, por lo tanto existe la matriz inversa de A.

Obtendremos X de la siguiente forma: $AX=B$, multiplicando por la izquierda por A^{-1}, $A^{-1}AX=A^{-1}B$, $X=A^{-1}B$

Cálculo de A^{-1}

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad |A|=m\left(m-m^2\right)\Big|_{m=-1}=-1(-1-1)=2$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{menores} \begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix} \xrightarrow{adjuntos} \begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{traspuesta} \begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}. \quad \text{Finalmente } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Luego

$$X=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1.1-3.0-1.0 & 1.0-3.1-1.0\\ 0.1-2.0-0.0 & 0.0-2.1-0.0\\ -1.1+1.0-1.0 & -1.0+1.1-1.0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -3/2\\ 0 & -1\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$$

Solución: $X=\begin{pmatrix}1/2 & -3/2\\ 0 & -1\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$

c) Para $m=0$, calcular A^5.

Para $m=0$, $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$

$$A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}; \qquad A^4=A^2\,A^2=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^5=A^4\,A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Solución: $A^5=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

Problema 3. Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano π: $3x - my + z = 1$.

Se pide:

a) Determinar el valor del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. *(4 puntos)*

b) Para los valores de m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π que contenga a la recta r. *(3 puntos)*

c) Calcular en función de m, la distancia entre π y el punto $P(1, -1, -2)$. *(3 puntos)*

Solución:

a) ¿m? / r // π.

$r \;//\; \pi$ *si* $\vec{v}_r$ *(vector director de r) y* $\vec{n}_\pi$ *(vector perpendicular a π) son perpendiculares.*

$\vec{v}_r(2,3,-1)$ y $\vec{n}_\pi(3,-m,1)$. $\quad \vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi \to \vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0;$

$(2,3,-1)\cdot(3,-m,1) = 0; \quad 6 - 3m - 1 = 0; \quad 5 - 3m = 0; \quad 5 = 3m; \quad m = \frac{5}{3}$

Para que r y π sean paralelos $m = \frac{5}{3}$.

¿m? / r ⊂ π.

Para que $r \subset \pi$ deben cumplirse dos condiciones: $P_r(1,-1,-2) \in \pi$ y que $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$.

Como hemos obtenido anteriormente, $\vec{v}_r \perp \vec{n}_\pi$ si $m = \frac{5}{3}$.

$P_r(1,-1,-2) \in \pi$, sustituyendo las coordenadas de P_r en π: $3 \,.\, 1 - m(-1) + (-2) = 1$;
$3 + m - 2 = 1$; $m + 1 = 1$; $m = 0$.
Hemos obtenido dos valores de m distintos, por lo que la recta r no está contenida en el plano π.

No existe valor de m para el que el plano π contiene a la recta r.

b) Para $m = \frac{5}{3}$ ¿plano σ? / σ // π y $r \subset \sigma$.

Para $m = \frac{5}{3} \;\to\; \pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1 \;\to\; \pi: 9x - 5y + 3z = 3$

Como σ // π → σ: $9x - 5y + 3z = D$
Para que $r \subset \sigma \to P_r(1,-1,-2) \in \sigma \to 9 \,.\, 1 - 5 \,.\, (-1) + 3 \,.\, (-2) = D \to 9 + 5 - 6 = D \to D = 8$

La ecuación del plano pedido es: $9x - 5y + 3z = 8$.

c) P(1,-2,-2) y π: $3x - my + z = 1$, ¿d(P,π)?

$$d(P,\pi) = \frac{|3\cdot 1 - m(-1) + (-2)\cdot 1|}{\sqrt{3^2 + m^2 + 1^2}} = \frac{|3 + m - 3|}{\sqrt{m^2 + 10}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Solución: $d(P,\pi) = \dfrac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$

Problema 4. Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$ y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. *(2 puntos)*

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. *(3 puntos)*

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. *(5 puntos)*

Solución:

a) ¿recta r?

Como la recta r es la que contiene los otros dos vértices del cuadrado será paralela a la que pasa por P y Q. Por tanto de la recta r sabemos $\begin{cases} \text{punto} \quad R(4,7,6) \\ \text{vector director } \vec{v}_r = \overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \end{cases}$

La ecuación vectorial de r: $\begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \quad \lambda \in \Re \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$

La ecuación continua de r: $\dfrac{x-4}{-1} = \dfrac{y-7}{2} = \dfrac{z-6}{-2}$

b) ¿Plano π*? /* $\pi \subset$ *cuadrado*

π *será el plano que contenga los punto P, Q y R.*

Por tanto del plano π *sabemos* $\begin{cases} \text{punto} \quad P(2,1,3) \\ \text{vectores directores} \left\langle \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}\ (-1,2,-2) \\ \overrightarrow{PR}\ (2,6,3) \end{array} \right. \end{cases}$

La ecuación del plano π *la obtenemos a partir de:*

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad (x-2)\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - (y-1)\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (z-3)\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

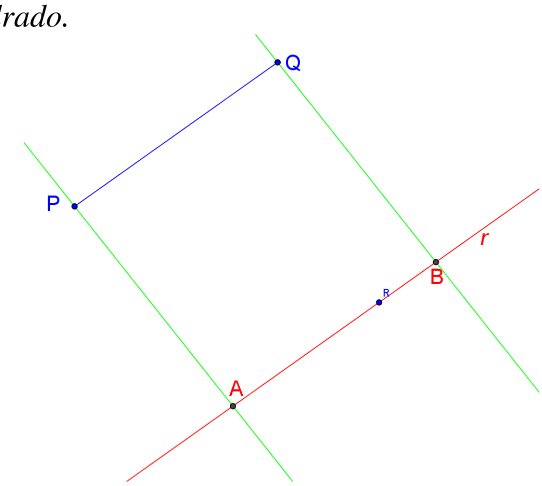
$$(x-2)(6+12) - (y-1)(-3+4) + (z-3)(-6-4) = 0; \quad 18(x-2) - (y-1) - 10(z-3) = 0$$

$$18x - 36 - y + 1 - 10z + 30 = 0; \quad 18x - y + 10z - 5 = 0$$

Solución: la ecuación del plano pedido es 18 x – y – 10 z – 5 = 0.

c) Coordenadas de los otros dos vértices del cuadrado.

El problema a resolver expresado de forma gráfica (en el plano en lugar del espacio) es:



Cálculo del vértice A.

Calculamos el plano que contiene al punto P y es perpendicular a la recta r (plano σ*). El vértice A será el punto de corte entre el plano* σ *y la recta r.*

Representamos por $\vec{n}_\sigma$ *el vector perpendicular al plano* σ*.*

Como $\sigma \perp r \;\rightarrow\; \vec{n}_\sigma = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano σ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $P(2,1,3) \in \sigma \;\rightarrow\; -2 + 2\,.\,1 - 2\,.\,3 + D = 0;\; -6 + D = 0;\; D = 6$

Luego $\sigma: -x + 2y - 2z + 6 = 0$

Punto de corte entre σ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$-(4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 2(6-2\lambda) + 6 = 0; \quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda + 6 = 0; \quad 4 + 9\lambda = 0$

$$\lambda = \frac{-4}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{-4}{9} = \dfrac{40}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{55}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{-4}{9}\right) = \dfrac{62}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad A\left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

Cálculo del vértice B.

Calculamos el plano que contiene al punto Q y es perpendicular a la recta r (plano δ*). El vértice B será el punto de corte entre el plano* δ *y la recta r.*

Representamos por $\vec{n}_\delta$ *el vector perpendicular al plano* δ*.*

Como $\delta \perp r \;\rightarrow\; \vec{n}_\delta = \vec{v}_r = (-1,2,-2)$

La ecuación del plano δ *será:* $-x + 2y - 2z + D = 0$

Como el punto $Q(1,3,1) \in \delta \;\rightarrow\; -1 + 2\,.\,3 - 2\,.\,1 + D = 0;\; 3 + D = 0;\; D = -3$

Luego $\delta: -x + 2y - 2z - 3 = 0$

Punto de corte entre δ *y r.*

Sustituyendo los valores de x, y, z de r en la ecuación del plano:

$-(4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 2(6-2\lambda) - 3 = 0; \quad -4 + \lambda + 14 + 4\lambda - 12 + 4\lambda - 3 = 0; \quad 9\lambda - 5 = 0$

$$\lambda = \frac{5}{9} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 4 - \dfrac{5}{9} = \dfrac{31}{9} \\ y = 7 + 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{73}{9} \\ z = 6 - 2\left(\dfrac{5}{9}\right) = \dfrac{44}{9} \end{cases} \quad \rightarrow \quad B\left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$$

Solución: los otros dos vértices del cuadrado son $A\left(\dfrac{40}{9}, \dfrac{55}{9}, \dfrac{62}{9}\right)$ *y* $B\left(\dfrac{31}{9}, \dfrac{73}{9}, \dfrac{44}{9}\right)$.

Problema 5. Sea la función $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$ donde k es un parámetro real . Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de *f(x)*. *(3 puntos)*

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f(x)* y sus máximos y mínimos. *(5 puntos)*

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo [– 1, 1]. *(2 puntos)*

Solución:

Como k es un parámetro real, si k = 0 f(x) = 0 y las respuestas a los tres apartados son inmediatas:

a) Dom f(x) = $\Re$, f(x) no tiene asíntotas.

b) f(x) es una función constante por tanto no es ni creciente ni decreciente y no tiene ni máximos ni mínimos.

c) f(x) es nula para cualquier valor de x por tanto f(x) se anula en cualquier punto del intervalo [– 1, 1].

A continuación resolvemos el ejercicio considerando $k \neq 0$.

a) $f(x)=\dfrac{k\,x}{e^{2x}}$

$e^{2x} \neq 0 \ \forall x \in \Re \quad \rightarrow \quad Dom\, f(x) = \Re.$

Asíntotas.

Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ f(x) no tiene asíntotas verticales.

Asíntota horizontal:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{k\,x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{0} = \infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{k\,x}{e^{2x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \{\text{como } e^{2x} \text{ es un infinito de orden superior a } kx\} = 0$$

La asíntota horizontal es y = 0 en $+\infty$.

Asíntota oblicua: (y = m x + n)

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{k\,x}{e^{2x}}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{k}{e^{2x}} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{k}{e^{2x}} = \dfrac{k}{0} = \infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{k}{e^{2x}} = \dfrac{k}{\infty} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{No hay asíntota oblicua.}$$

Luego f(x) sólo tiene asíntota horizontal y = 0 en $+\infty$.

b) Monotonía y máximos y mínimos de y = f(x)

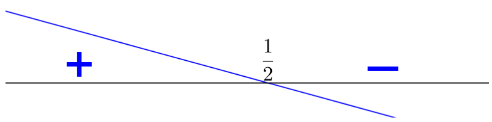
$$f'(x) = \frac{k\,e^{2x} - k\,x\,e^{2x}\,2}{\left(e^{2x}\right)^2} = \frac{k\,e^{2x}\,(1-2x)}{e^{4x}}$$

Estudiemos el signo de f´(x),

$\forall x \in \Re \quad e^{2x}$ *y* $e^{4x} > 0 \quad \rightarrow$ *el signo de f´(x) depende de la expresión k (1 – 2 x)*

1 – 2 x es un polinomio de primer grado (una línea recta) de pendiente negativa y raíz: 1 – 2 x = 0;

1 = 2 x; $x = \dfrac{1}{2}$. *Gráficamente*



En consecuencia:

si $k > 0$ f(x) es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y decreciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un máximo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

$$x = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{k\,\frac{1}{2}}{e^{2\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$$

si $k < 0$ f(x) es decreciente en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ ***y creciente en*** $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ***y tiene un mínimo en*** $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right)$**.**

c) Justificar que f(x) se anula en algún punto del intervalo [– 1 , 1]

Como Dom f(x) = $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en* $\Re$ $\rightarrow$ *f(x) es continua en [– 1 , 1]*

$$\left.\begin{array}{l} f(-1) = \dfrac{k\,(-1)}{e^{2\,(-1)}} = \dfrac{-k}{e^{-2}} = -k\,e^2 \\ f(1) = \dfrac{k \cdot 1}{e^{2\cdot 1}} = \dfrac{k}{e^2} \end{array}\right. \quad \rightarrow \quad f(-1)\cdot f(1) = -k\,e^2\,\frac{k}{e^2} = \left\{e^2 \neq 0\right\} = -k^2 < 0$$

Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano:

f(x) es continua en [– 1 , 1] y f(– 1) . f(1) < 0 $\rightarrow$ ***∃ c ∈ (– 1 , 1) / f(c) = 0***

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 6. Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (– 1,0), (1,0), (1,1) y (– 1, 1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$, contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. *(10 puntos)*

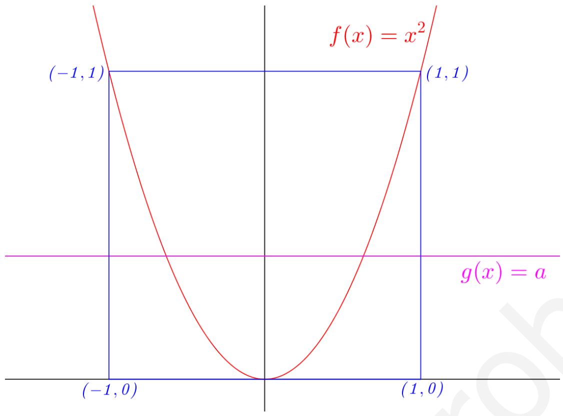
Solución:

La representación gráfica del problema es:

f(x) es una parábola

$f(x) = x^2$

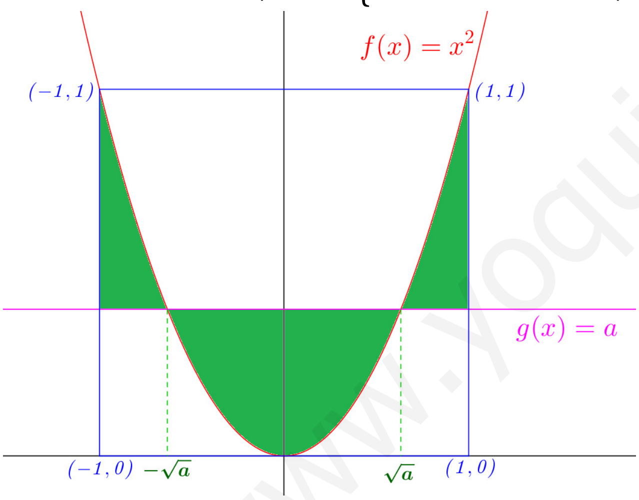
x	$f(x)$
-1	1
0	0
1	1



El área del rectángulo R es {la base mide 2 y la altura 1} $A_R = 2.1 = 2$

Para calcular el área entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$ necesitamos obtener sus puntos de corte:

$$x^2 = a \quad \rightarrow \quad x = \pm\sqrt{a} \qquad \left\{ como\ 0 < a < 1 \quad \exists \sqrt{a} \right\}$$



El área comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) y g(x) dentro de R son las zonas coloreadas del dibujo.

Como las dos funciones son simétricas respecto del eje OY, el cálculo de esta área lo obtenemos como sigue:

$$A = 2\left[\int_0^{\sqrt{a}} \left(a - x^2\right) dx + \int_{\sqrt{a}}^{1} \left(x^2 - a\right) dx\right] =$$

$$= 2\left[\left[a\,x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} + \left[\frac{x^3}{3} - a\,x\right]_{\sqrt{a}}^{1}\right] =$$

$$= 2\left[\left(a\sqrt{a} - \frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3}\right) - (0-0) + \left(\frac{1^3}{3} - a\cdot 1\right) - \left(\frac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{3} - a\sqrt{a}\right)\right] = 2\left(\sqrt{a^3} - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a - \frac{\sqrt{a^3}}{3} + \sqrt{a^3}\right) =$$

$$= 2\left(2\sqrt{a^3} - \frac{2\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = 2\left(\frac{4\sqrt{a^3}}{3} + \frac{1}{3} - a\right) = \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a$$

Debe cumplirse que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R $\rightarrow$

$$A = \frac{1}{3} A_R \quad \rightarrow \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} + \frac{2}{3} - 2\,a = \frac{1}{3}2; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} - 2\,a = 0; \quad \frac{8\sqrt{a^3}}{3} = 2\,a;$$

$$\frac{8\sqrt{a^3}}{2} = 3\,a; \quad 4\sqrt{a^3} = 3a; \quad \left(4\sqrt{a^3}\right)^2 = (3a)^2; \quad 16\,a^3 = 9\,a^2; \quad 16\,a^3 - 9\,a^2 = 0; \quad a^2\,(16a - 9) = 0$$

$$\begin{cases} a^2 = 0; \quad a = 0 \\ 16a - 9 = 0; \quad 16a = 9; \quad a = \dfrac{9}{16} \end{cases} \qquad \text{como } 0 < a < 1 \quad \rightarrow \quad a = \frac{9}{16}$$

Como en el proceso de resolución de la ecuación hemos elevado al cuadrado, comprobemos que la solución verifica la ecuación inicial:

$$4\sqrt{a^3} = 3a; \quad 4\sqrt{\left(\frac{9}{16}\right)^3} = 3\,\frac{9}{16}; \quad \frac{27}{16} = \frac{27}{16} \qquad a = \frac{9}{16} \text{ es solución.}$$

Solución: el valor de a buscado es $\dfrac{16}{9}$.

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

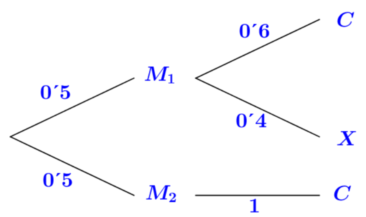
Problema 7. Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0´6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.
   a. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? *(3 puntos)*
   b. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? *(3 puntos)*

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. *(4 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
CM_1 = obtener cara en la moneda M_1. *XM_1 = obtener cruz en la moneda M_1*
CM_2 = obtener cara en la moneda M_2. *XM_2 = obtener cruz en la moneda M_2*
De los datos del problema, $P(CM_1)=0´6 \;\rightarrow\; P(XM_1)=1-0´6=0´4;\quad P(CM_2)=1 \;\rightarrow\; P(XM_2)=0.$

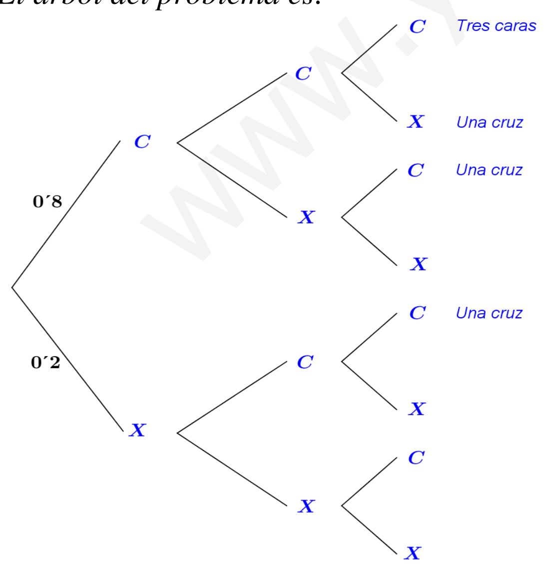
Experiencia: sacamos al azar una moneda de la bolsa que contiene las dos monedas M_1 y M_2 (las dos monedas tienen la misma probabilidad de ser extraídas), la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. El árbol sería:



La probabilidad de obtener cara o cruz sería:

P(C) = 0´5 . 0´6 + 0´5 . 1 = 0´8
P(X) = 0´5 . 0´4 = 0´2

a) Repetimos la experiencia anterior tres veces.
El árbol del problema es:



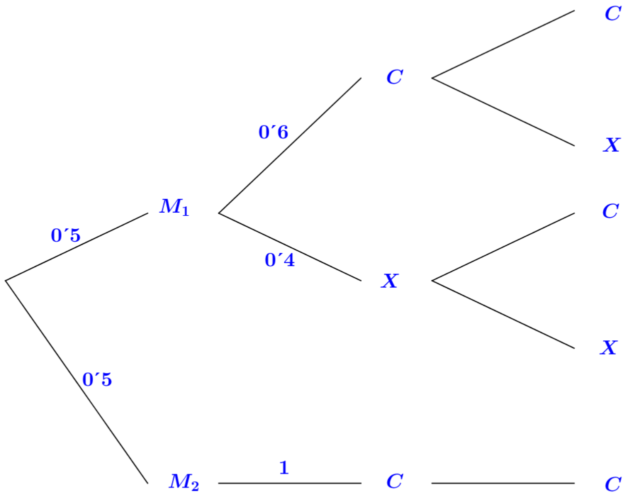
Las probabilidades pedidas son:

P(obtener tres caras) = 0´8 . 0´8 . 0´8 = 0´512

P(obtener una cruz) = 3 . 0´8 . 0´8 . 0´2 = 0´384

Otra forma de resolverlo sería: consideramos Y = número de cruces en tres lanzamientos → Y = B(3, 0´2) y usando la tabla de la binomial correspondiente,
P(obtener tres caras) = P(Y = 0) = 0´512
P(obtener una cruz) = P(Y = 1) = P(Y≤1) – P(Y≤0) = 0´896 – 0´512 = 0´384.

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces.
El árbol del problema es:



Las probabilidades pedidas son:

$$P\left(M_1/2\ caras\right)=\frac{P(M_1\cap 2\ caras)}{P(2\ caras)}=\frac{0'5\cdot 0'6\cdot 0'6}{0'5\cdot 0'6\cdot 0'6+0'5\cdot 1\cdot 1}=\frac{0'18}{0'68}=\frac{9}{34}\cong 0'2647$$

$$P\left(M_2/2\ caras\right)=\frac{P(M_2\cap 2\ caras)}{P(2\ caras)}=\frac{0'5\cdot 1\cdot 1}{0'68}=\frac{25}{34}\cong 0'7353$$

Todas las respuestas han de ser debidamente razonadas

Problema 8. Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. *(3 puntos)*
b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. *(3 puntos)*
c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. *(4 puntos)*

Solución:
Utilizamos los siguientes sucesos:
NV = no obtener venta. *V = obtener venta*
Como "sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta" $\rightarrow$ $P(NV) = 0'3 \rightarrow P(V) = 1 - 0'3 = 0'7$

El comercial realiza 10 llamadas, usando la variable X = número de ventas en 10 llamadas, X es una variable binomial de parámetros $n = 10$ *y* $p = 0'7$.

La tabla que tenemos de la binomial no da los resultados para esta variable (es para $p \leq 0'5$*). Por lo tanto utilizaremos la siguiente variable: Y = número de ventas en 10 llamadas* $\rightarrow$ $Y = B(10, 0'3)$ *y la tabla nos da los resultados para Y.*

La relación entre estas dos variables es:

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Y	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

a) Probabilidad de que consiga más de 7 ventas.
"que consiga más de 7 ventas" $\equiv X \geq 8 \equiv Y \leq 2$
$P(X \geq 8) = P(Y \leq 2) = 0'3828$

La probabilidad de que consiga más de 7 ventas es 0´3828.

b) Probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.
"que consiga al menos 5 ventas" $\equiv X \geq 5 \equiv Y \leq 5$
$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0'9527$

La probabilidad de que consiga al menos 5 ventas es 0´9527.

c) Probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.
"que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas" $\equiv 3 \leq X \leq 8 \equiv 2 \leq Y \leq 7$
$P(3 \leq X \leq 8) = P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1) = 0'9984 - 0'1493 = 0'8491$

La probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas es 0´8491.