Examen de Matemáticas II (Coordinador 2005)
Selectividad-Opción A
Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos).*

a) Justificar razonadamente que la gráfica de la función

$$f(x) = x^{15} + x + 1$$

corta al eje OX al menos una vez en el intervalo $[-1, 1]$.

b) Determinar el número exacto de puntos de corte con el eje OX cuando x recorre toda la recta real.

Solución:

a) La función $f(x) = x^{15} + x + 1$ en los extremos del intervalo $[-1, 1]$ toma los valores $f(-1) = -1$ y $f(1) = 3$, como además la función es continua por el teorema de Bolzano: $\exists c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

b) La derivada de la función $f'(x) = 15x^{14} + 1 > 0$ para cualquier valor de x, luego la función es siempre creciente, luego sólo puede cortar una vez al eje OX, y por el apartado anterior este punto de corte tiene que estar en el intervalo $[-1, 1]$.

Problema 2 *(2 puntos).*

a) (1 punto). Determinar el punto P, contenido en el primer cuadrante, en el que se corta la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 8$.

b) (1 punto). Calcular el área de la región limitada por la recta que une el origen y el punto P hallado en el apartado anterior, y el arco de la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ comprendido entre el origen y el punto P.

Solución:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 = 8 \end{array} \right. \Longrightarrow x = \pm 2$$

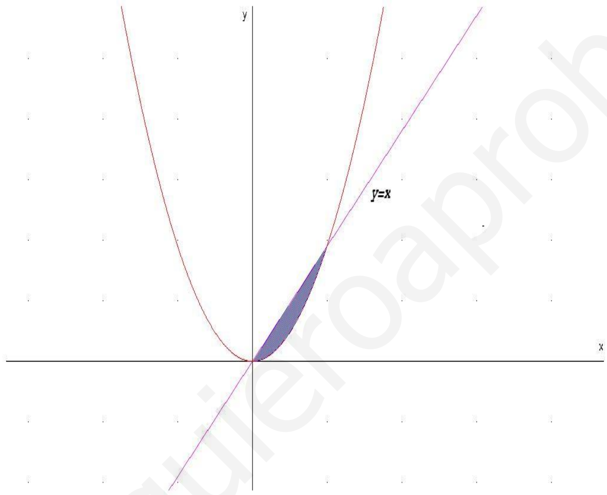
Como piden el punto del primer cuadrante la solución negativa no vale y el punto será $(2, 2)$.

b) La recta que une el origen de coordenadas y el punto $(2,2)$ es $y = x$. Los puntos de corte son

$$x = \frac{x^2}{2} \Longrightarrow x^2 - 2x = 0 \Longrightarrow x = 0, \quad x = 2$$

$$S = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} - x \right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \bigg]_0^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

$$\acute{A}rea = \left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} u^2$$



Problema 3 *(3 puntos).*

a) (2 punto). Discutir según los valores del parámetro λ el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rrrr} 2\lambda x + & 2y + & \lambda z = & 1 \\ x + & \lambda y - & z = & 1 \\ 4x + & 3y + & z = & 2\lambda \end{array} \right.$$

b) (1 punto). Resolver el sistema anterior en los casos en que sea compatible.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 2\lambda & 2 & \lambda & 1 \\ 1 & \lambda & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2\lambda \end{array} \right), \quad |A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2, \quad \lambda = \frac{5}{2}$$

Si $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2} \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango$(\overline{A}) = 3 =$ nº de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $\lambda = 2$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 4 \end{array} \right)$$

Como el menor $\left| \begin{array}{cc} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{array} \right| = 6 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\left| \begin{array}{ccc} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 \end{array} \right| = 15 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $\lambda = \dfrac{5}{2}$

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 5 & 2 & 5/2 & 1 \\ 1 & 5/2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Como el menor $\left| \begin{array}{cc} 5 & 2 \\ 1 & 5 \end{array} \right| = 23 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango$(A) = 2$. Por otro lado

$$\left| \begin{array}{lrr} 5 & 5/2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{array} \right| = -\frac{55}{2} \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overline{A}) = 3$$

Luego en este caso Rango$(\overline{A}) \neq$Rango$(A) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) El sistema sólo es compatible cuando $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \frac{5}{2}$ y $|A| = -2\lambda^2 + 9\lambda - 10$. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 1 & 2 & \lambda \\ 1 & \lambda & -1 \\ 2\lambda & 3 & 1 \end{array} \right|}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = \frac{2a^3 - 1}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$y = \frac{\left| \begin{array}{rrr} 2\lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 2\lambda & 1 \end{array} \right|}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{6a^2 - 2a - 5}{2a^2 - 9a + 10}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2\lambda & 2 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 4 & 3 & 2\lambda \end{vmatrix}}{-2\lambda^2 + 9\lambda - 10} = -\frac{4a^3 - 14a + 11}{2a^2 - 9a + 10}$$

Problema 4 *(3 puntos)* Dados los puntos $A(-1, 1, 1)$, $B(1, -3, -1)$ y $C(1, 0, 3)$, hallar las coordenadas de un punto D perteneciente a la recta:

$$r : x - 1 = \frac{y - 1}{-1} = z - 1$$

de manera que el tetraedro $ABCD$ tenga un volumen igual a 2.

Solución:

La ecuación paramétrica de la recta es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{array} \right.$$

$$D(1 + \lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$$

$$\overrightarrow{AB} = (2, -4, -2), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -1, 2), \quad \overrightarrow{AD} = (2 + \lambda, -\lambda, \lambda)$$

$$V = \frac{1}{6}|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]| = \frac{1}{6}|\begin{vmatrix} 2 + \lambda & -\lambda & \lambda \\ 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}| = \frac{2}{3}|\lambda - 5| = 2$$

$$|\lambda - 5| = 3$$

$$\lambda - 5 = 3 \Longrightarrow \lambda = 8 \Longrightarrow D\,(9, -7, 9)$$

$$\lambda - 5 = -3 \Longrightarrow \lambda = 2 \Longrightarrow D\,(3, -1, 3)$$

Examen de Matemáticas II (Coordinador 2006) Selectividad-Opción B

Tiempo: 90 minutos

Problema 1 *(2 puntos)*.Considerar el siguiente sistema de ecuaciones, en el que a es un parámetro real:

$$\left\{\begin{array}{rrrr} -ax+ & 4y+ & az = & -a \\ 4x+ & ay- & az = & a \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{array}\right.$$

Se pide:

a) (1 punto). Discutir el sistema

b) (1 punto). Resolver el sistema para $a = 1$.

Solución:

a)

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -a & 4 & a & -a \\ 4 & a & -a & a \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right), \quad |A| = a^2 - 16 = 0 \Longrightarrow a = \pm 4$$

Si $a \neq \pm 4 \Longrightarrow |A| \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) =Rango($\overline{A}$) $= 3 =$ n^o de incógnitas y el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.

Si $a = 4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & 4 & 4 & -4 \\ 4 & 4 & -4 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\left|\begin{array}{rr} -4 & 4 \\ 4 & 4 \end{array}\right| = -32 \neq 0 \Longrightarrow$ Rango(A) $= 2$. Como el menor

$$\left|\begin{array}{rrr} -4 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = -64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como Rango(A) $\neq$Rango($\overline{A}$) $\Longrightarrow$ sistema incompatible.

Si $a = -4$:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{rrr|r} 4 & 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 & -4 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} = -32 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(A) = 2$. Como el menor

$$\begin{vmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 64 \neq 0 \Longrightarrow \text{Rango}(\overrightarrow{A}) = 3$$

Como $\text{Rango}(A) \neq \text{Rango}(\overline{A}) \Longrightarrow$ sistema incompatible.

b) Cuando $a = 1$:

$$\begin{cases} -x+ & 4y+ & z = & -1 \\ 4x+ & y- & z = & 1 \\ -x- & y+ & z = & 1 \end{cases} \quad \overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right), \quad |A| = 1^2 - 16 = -15$$

Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{2}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = -\frac{2}{5}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-15} = \frac{19}{15}$$

Problema 2 *(2 puntos)* Sea la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto). Comprobar que

$$A^3 - 2A^2 = 0$$

b) (1 punto). Hallar A^n.

Solución:

a)

$$A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$2^2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2A$$

$$A^3 = 2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$2^3 \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 4A$$

$$A^3 - 2A^2 = 4A - 4A = 0$$

b) $A^n = 2^{n-1}A$

Problema 3 *(3 puntos)* Sea la función $f(x) = \ln(1+x^2)$, donde ln significa *Logaritmo Neperiano.*

a) (1 punto). Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los intervalos de concavidad y convexidad.

b) (1 punto). Dibujar la gráfica de f.

c) (1 punto). Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la gráfica de f en sus puntos de inflexión.

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$	decreciente	creciente

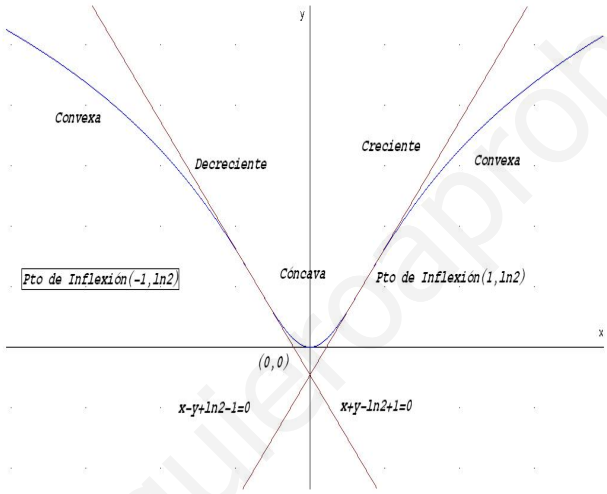
Luego en el punto $(0,0)$ tenemos un Mínimo.

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)} = 0 \Longrightarrow x = -1, \quad x = 1$$

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	convexa	cóncava	convexa

Luego en los puntos $(-1,\ln 2)$ y $(1,\ln 2)$ hay dos puntos de Inflexión.

b) Representación gráfica



c) La tangente en el punto $(-1,\ln 2)$ es:

$$m = f'(-1) = -1 \Longrightarrow y - \ln 2 = -x + 1 \Longrightarrow x + y - \ln 2 + 1 = 0$$

La tangente en el punto $(1,\ln 2)$ es:

$$m = f'(1) = 1 \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow x - y + \ln 2 - 1 = 0$$

Problema 4 *(3 puntos)*Se considera la recta: $r : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y-4}{3} = \dfrac{z-5}{2}$ y la familia de rectas dependientes del parámetro m:

$$s : \left\{ \begin{array}{l} 3x - y = 8 - 12m \\ y - 3z = 7 - 3m \end{array} \right.$$

a) (2 puntos). Determinar el valor de m para el que las dos rectas r y s se cortan.

b) (1 punto). Para el caso de $m = 0$, hallar la distancia entre las dos rectas.

Solución:

a)

$$r : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_r} = (2,3,2) \\ P_r(0,4,5) \end{array} \right. \qquad s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,3,1) \\ P_s(5-5m, 7-3m, 0) \end{array} \right. \qquad \overrightarrow{P_rP_s} = (5-5m, 3-3m, -5)$$

$$|A| = \left| \begin{array}{ccc} 5-5m & 3-3m & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right| = 15(m-2) = 0 \Longrightarrow m = 2$$

Cuando $m = 2$ el Rango$(A) = 2$, y además el Rango$\left(\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{array} \right) =$ $2 \Longrightarrow$ las dos rectas se cortan.

b) Si $m = 0$ las dos rectas se cruzan, ya que $|A| \neq 0$ y tenemos que

$$s : \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u_s} = (1,3,1) \\ P_s(5,7,0) \end{array} \right.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{P_rP_s}|}{|\overrightarrow{u_r} \times \overrightarrow{u_s}|} = \frac{|-30|}{\sqrt{18}} = 5\sqrt{2}$$